

Двойные и тройные коэффициенты зацепления в пространстве

А. Б. Скопенков

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|-----|
| § 1. Зацепленность в трёхмерном пространстве | 90 |
| 1.1. Зацепленность треугольников | 90 |
| 1.2. Зацепленность по модулю 2 замкнутых ломаных | 93 |
| 1.3. Коэффициент зацепления замкнутых ломаных | 98 |
| 1.4. Изотопность зацеплений | 100 |
| 1.5. Комбинаторная изотопность зацеплений треугольников | 102 |
| 1.6. Сингулярная гомотопность зацеплений | 103 |
| 1.7. Кольца и треугольники Борромео | 105 |
| 1.8. Алгебраическое число пересечений | 107 |
| 1.9. Коэффициент зацепления и зейфертовы цепи | 111 |
| 1.10. Тройной коэффициент зацепления | 113 |
| § 2. Зацепленность в четырёхмерном пространстве | 117 |
| 2.1. Как работать с четырёхмерным пространством? | 117 |
| 2.2. Зацепленность симплексов | 120 |
| 2.3. Зацепленность ломаных и двумерных «многогранников» | 123 |
| 2.4. Коэффициенты зацепления как пересечения в \mathbb{R}^4 | 126 |
| Список литературы | 130 |

Понятие коэффициента зацепления двух непересекающихся замкнутых ломаных в пространстве — одно из важнейших базовых понятий для топологии и её приложений к физике. То же справедливо для «тройного коэффициента зацепления» трёх попарно непересека-

Статья написана по материалам спецкурсов и докладов на мехмате МГУ, на ФПМИ МФТИ, в НМУ, на Летней Конференции Турнира Городов [KRR+]. Благодарю Э. Алкина, Е. Бордачеву, Т. Гараева и А. Заславского за полезные обсуждения, а также Е. Бордачеву за перевод части текста на русский язык.

ющихся замкнутых ломаных. Важные применения этих понятий — доказательства нерасцепляемости ломаных. Говоря неформально, коэффициент зацепления — количество оборотов, которые одна ломаная делает вокруг другой. Это понятие является трёхмерной версией количества оборотов ломаной вокруг точки $[Wn]$. Мы приводим строгое определение, удобное для вычисления на компьютере (п. 1.3).

Сначала зацепленность изучается для простейшего случая, когда обе ломаные являются треугольниками (п. 1.1). Эта конструкция обобщается до зацепленности по модулю 2 произвольных ломаных (п. 1.2). Определение коэффициента зацепления, приведённое в п. 1.3, отличается от обычно излагаемого на математических кружках, которое использует проекцию ломаных на плоскость (см. утверждения о проекции 1.2.7 и 1.3.5, а также $[Sk20u, \S 4, 8]$). Приведённое определение более естественно: оно

- не требует для доказательства его важнейшего свойства (изотопической инвариантности) технически непростого утверждения $[Sk20u, \text{теорема Рейдемейстера 3.4}]$;
- позволяет продемонстрировать некоторые базовые идеи теории гомологий на элементарном языке, доступном неспециалистам, на примере доказательства свойств коэффициента зацепления.

Неформально, две непересекающиеся замкнутые ломаные *изотопны*, если одна может быть преобразована в другую деформацией, при которой эти ломаные остаются непересекающимися. Строгое определение даётся сначала для «комбинаторной» формализации (п. 1.5), а затем для «топологической» (п. 1.4).

В пространстве можно зацепить три кольца, чтобы их нельзя было расцепить, но после разрезания любого из них они расцеплялись. Аналогичный пример есть и для большего числа колец. Эти примеры приводятся и обсуждаются в п. 1.7 (плоский аналог приведён в $[Sk20, \text{задача 3.2.2}]$). Для доказательства нерасцепляемости вводится свойство зацепленности по модулю 2 трёх замкнутых ломаных (никакие две из которых не зацеплены по модулю 2). Это свойство и «тройной коэффициент зацепления» (число Милнора) трёх замкнутых ломаных определяются в п. 1.10. Приводимые определения используют тройные пересечения некоторых поверхностей, ограниченных этими ломаными. Более точно, используются комбинаторные аналоги таких поверхностей, т. е. *зейфертовы цепи* (п. 1.9). Для их определения необходим новый взгляд на «двойной» коэффициент зацепления — основы комбинаторной (алгебраической) теории пересечений в пространстве (п. 1.8).

Многие области знания и техники — прежде всего математика, программирование и физика — часто работают с многомерным пространством. Изучение п. 2.1 позволит освоить базовые навыки такой работы: развивать пространственное воображение и интуицию, а также проверять их строгими рассуждениями. Это полезно для последующего изучения компьютерной графики и необходимой для неё базы из линейной алгебры и геометрии. В п. 2.1 не требуется предварительных знаний по стереометрии. Полезны пространственное воображение и умение решать системы линейных уравнений (см. задачу 2.1.2). В пп. 2.2–2.4 приводятся простейшие аналоги предыдущего материала для зацепленности в четырёхмерном и в многомерном пространстве.

В этом тексте «трёхмерное пространство \mathbb{R}^3 » коротко называется «пространством». Если не оговорено противное, то фигуры рассматриваются в пространстве, и слова «в пространстве» часто пропускаются. Под *треугольником* Δ подразумевается часть плоскости, ограниченная замкнутой трёхзвенной ломаной (контуром) $\partial\Delta$. «Кусочно-линейный» сокращается до «PL».

Основные идеи представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших (обычно маломерных) частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму алгебраического языка. За счёт этого и текст становится доступным для начинающих, и удаётся быстро добраться до интересных, сложных и важных результатов, методов и теоретических идей. Более простой материал приводится для того, чтобы сделать естественным и доступным более сложный.

Как правило, мы приводим *формулировку* красивого или важного утверждения *перед* последовательностью определений и результатов, составляющих его *доказательство*. В таких случаях для доказательства утверждения требуется часть дальнейшего материала. Об этом указано после формулировок. Некоторые теоремы приведены без доказательств, тогда даются ссылки вместо указаний. Основные результаты называются «теоремами», менее важные результаты — «утверждениями», вспомогательные результаты — «леммами».

Изучение путём решения задач не только характерно для серьёзного изучения математики [HC19, § 1.1], [ZSS, § 1.2], но и продолжает древнюю культурную традицию. В тексте имеется небольшое количество задач (полезно рассматривать и утверждения как задачи). Если условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать (и тогда в ссылках мы называем это утверждение утверждением, а не задачей). Указания к задачам

приводятся либо сразу, либо в конце параграфа. *Загадкой* называется не сформулированный чётко вопрос; здесь нужно придумать и чёткую формулировку, и доказательство. Если номер задачи помечен звёздочкой, то эта задача посложнее соседних.

Определения важных понятий помечены **жирным шрифтом**, чтобы их было проще найти.

Замечания формально не используются в дальнейшем.

§ 1. ЗАЦЕПЛЕННОСТЬ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1.1. ЗАЦЕПЛЕННОСТЬ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В этом пункте Δ и Δ' — невырожденные треугольники (в пространстве), контуры которых не пересекаются.

Пусть сначала никакие четыре из вершин двух треугольников не лежат в одной плоскости. Треугольники называются **зацепленными**, если контур первого пересекает второй ровно в одной точке. См. пример на рис. 1.1.1 и [Sk14, рис. 2].

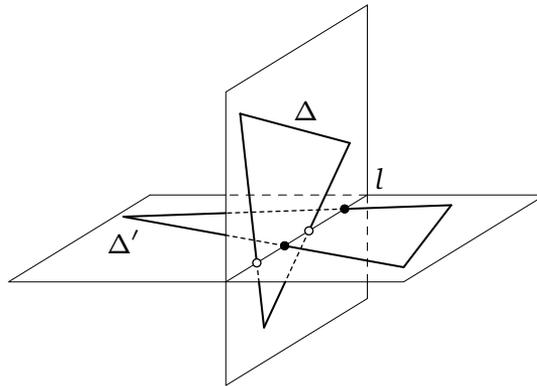


Рис. 1.1.1. Зацепленные треугольники и зацепленные пары точек

В общем случае треугольники Δ и Δ' называются **зацепленными**, если выполнено любое из следующих равносильных условий.

Задача 1.1.1. Следующие условия равносильны.

- (1) Каждый из треугольников пересекает контур другого.
- (2) Пересечение треугольников есть отрезок, концы которого лежат на контурах разных треугольников.
- (3) Пересечение $\partial\Delta \cap \Delta'$ есть одна точка, и два отрезка контура $\partial\Delta$, выходящие из этой точки, находятся по разные стороны от плоскости треугольника Δ' .

(3') То же, что в (3), с переменной местами Δ и Δ' .

(4) Плоскость треугольника Δ' пересекает контур $\partial\Delta$ в двух точках, лежащих по разные стороны от контура $\partial\Delta'$ (такая пара точек называется *зацепленной* с $\partial\Delta'$).

(4') То же, что в (4), с переменной местами Δ и Δ' .

(5) Плоскости треугольников пересекаются по прямой, пересечение которой с контуром каждого из треугольников есть пара точек, причём эти пары точек чередуются вдоль прямой (такие пары точек называются *зацепленными* на прямой; рис. 1.1.1).

Указание. Пересечение $\Delta \cap \Delta'$ является либо пустым, либо одной точкой, либо отрезком.

Предложение 1.1.2 (о проекции). *Пусть никакие четыре из точек A, B, C, D, E, F, O не лежат в одной плоскости. Тогда следующие три условия равносильны.*

(1) *Треугольники ABC и DEF зацеплены.*

(2) *Отрезок BC проходит ниже ровно одной из сторон треугольника DEF при взгляде из точки A (т. е. существует единственная пара (P, x) , состоящая из точки $P \in BC$ и стороны x треугольника DEF , такая что отрезок AP пересекает сторону x).*

(3) *Контур треугольника ABC проходит ниже нечётного числа сторон треугольника DEF при взгляде из точки O .*

Равносильность (1) \Leftrightarrow (2) вытекает из того, что, когда P пробегает отрезок BC , отрезки AP заметают треугольник ABC . Равносильность (1) \Leftrightarrow (3) есть [Sk14, лемма 2.6] (она там же несложно доказана).

Задача 1.1.3. Существуют ли 100 попарно зацепленных треугольников?

Задача 1.1.4. В пространстве имеется 13 точек: 3 красных и 10 жёлтых. Никакие четыре из них не лежат в одной плоскости. Тогда количество жёлтых треугольников, зацепленных с красным треугольником, чётно. *Красным (жёлтым) треугольником* называется любой треугольник с красными (жёлтыми) вершинами. Треугольники, отличающиеся перестановкой вершин, считаются одинаковыми.

Задача 1.1.5. Для любых 6 точек $0, 1, 2, 3, 4, 5$

(а) если любые два объекта из треугольников $0jk$, $1 \leq j < k \leq 5$, $k \neq 2$, и отрезка 12 не имеют общих внутренних точек, то контур треугольника 012 пересекает треугольник 345 ; более того, треугольники 012 и 345 зацеплены;

(б) если любые два объекта из треугольников $0jk$, $1 \leq j < k \leq 5$, $(j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3)\}$, и отрезков $12, 13$ не имеют общих внутренних

точек, то зацеплены либо треугольники 012 и 345, либо треугольники 013 и 245;

(с) если любые два объекта из треугольников $0jk$, $1 \leq j < k \leq 5$, $(j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$, и отрезков 12, 13, 14 не имеют общих внутренних точек, то зацеплены либо треугольники 012 и 345, либо треугольники 013 и 245, либо треугольники 014 и 235.

(d) Попробуйте угадать утверждение!

Утверждения 1.1.5.abc следуют из количественной линейной теоремы Конвея — Гордона — Закса [Sk14, теорема 1.2'], ср. теорему 1.2.9.a. Утверждения [Sk18, 1.7.1 и 1.7.2], 1.1.5 и 2.2.4 иллюстрируют некоторые идеи доказательства теоремы об NP-трудности [Sk18, 3.8.3].

Подсказка к части задачи 1.1.1. Обозначим через l прямую из (5).

Доказательство импликации (3)&(3') \Rightarrow (5). Ввиду (3), Δ пересекает плоскость треугольника Δ' , поэтому $\Delta \cap l \neq \emptyset$. Пересечение $\Delta \cap l$ содержит только две точки, назовём их A, B . Аналогично, ввиду (3'), пересечение $\Delta' \cap l$ содержит только две точки, назовём их A', B' . Пересечение $\Delta' \cap \partial\Delta$ содержится в отрезке $A'B'$. Значит, ровно одна из точек A и B лежит на отрезке $A'B'$. Поэтому пары A, B и A', B' зацеплены в l .

Доказательство импликации (4)&(5) \Rightarrow (3). Предположим, что пары $\{A, B\} = \Delta \cap l$ и $\{A', B'\} = \Delta' \cap l$ зацеплены в l . Тогда (3) следует из (4).

Подсказка к 1.1.3. Ответ: да.

РЕШЕНИЕ (придумано Е. Коганом, предварительная версия написана Р. Карасевым). Возьмём правильный треугольник T . Обозначим через AB одну из его высот, а через $R^\varepsilon = R_{AB}^{\varepsilon, \varepsilon}$ преобразование пространства, являющееся композицией переноса на вектор $\varepsilon \overrightarrow{AB}$ и вращения вокруг \overrightarrow{AB} на угол ε (винтовое движение). При достаточно малом ε треугольники T и $R^\varepsilon(T)$ зацеплены, так как пересечение их плоскостей содержит высоты каждого из них и в этом пересечении контур одного из них проходит через выпуклую оболочку другого. Поэтому

$$R^{m\varepsilon/100}(T) \quad \text{и} \quad R^{n\varepsilon/100}(T) = R^{(n-m)\varepsilon/100}(R^{m\varepsilon/100}(T))$$

зацеплены при любых $0 \leq m < n < 100$.

ОТРЕДАКТИРОВАННОЕ РЕШЕНИЕ Ю. Семенова. Покажем, как строить пример по индукции. Пусть у нас есть несколько попарно зацепленных треугольников и контур одного из них находится на расстоянии не менее ε от контуров всех других. Тогда этот треугольник T можно пошевелить менее чем на ε и получить треугольник T' , зацепленный с T

(например, работает конструкция из предыдущего решения для двух треугольников). Так как при шевелении контур двигался менее чем на ε , то контур движущегося треугольника не пересекал контуры других треугольников. Следовательно, T' зацеплен с каждым из остальных треугольников, как и T (см. утверждение 1.4.1.b и замечание 1.4.6).

Подсказка к 1.1.4. Чётность этого количества равна сумме количеств точек пересечения (выпуклых оболочек) жёлтых треугольников с контуром красного. Эта сумма чётна, поскольку объединение жёлтых треугольников разлагается в сумму по модулю 2 поверхностей некоторых тетраэдров. Ср. утверждение 1.8.5.a и лемму о чётности 1.8.2.

РЕШЕНИЕ И. БОГДАНОВА. Рассмотрим полный двудольный граф на множестве жёлтых точек: одна доля — точки с одной стороны от плоскости красного треугольника, другая — с другой. Покрасим ребро в красный, если оно пересекает красный треугольник, и в чёрный иначе. Тогда количество треугольников, зацепленных с красным, — это количество пар разноцветных рёбер с общим концом (назовём их галками).

Если обе доли нечётны, то количество галок с центром в любой вершине чётно.

Если обе доли чётны, то количество галок с центром в данной вершине нечётно тогда и только тогда, когда её (красная) степень нечётна. Поскольку количество таких вершин чётно, то и общее количество галок тоже чётно.

1.2. ЗАЦЕПЛЕННОСТЬ ПО МОДУЛЮ 2 ЗАМКНУТЫХ ЛОМАНЫХ

Узлом называется замкнутая несамопересекающаяся ломаная. **Зацеплением** называется набор попарно непересекающихся узлов, которые называются *компонентами* зацепления (рис. 1.2.1). Такие упорядоченные наборы называются упорядоченными или раскрашенными зацеплениями, а такие неупорядоченные наборы называются неупорядоченными или нераскрашенными зацеплениями. В дальнейшем мы будем сокращать «упорядоченное зацепление» до «зацепление», поскольку будем рассматривать только упорядоченные зацепления.

В пп. 1.2, 1.3 через a и b обозначены непересекающиеся узлы.

Говоря неформально, двухкомпонентное зацепление *зацеплено по модулю 2*, если поверхность «общего положения» («случайная»), натянутая на первую компоненту, пересекает вторую компоненту в нечётном числе точек (см. подробнее замечание 1.2.8.a). Путь к удобной формализации этого понятия не так короток. Во-первых, поверхность

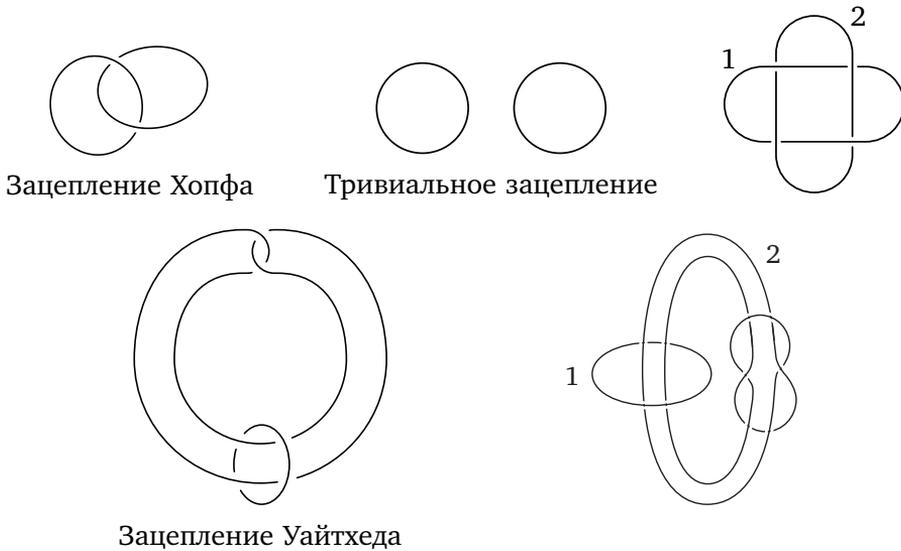


Рис. 1.2.1. Примеры зацеплений

удобно взять самопересекающейся, а тогда и просто «диском» (подробнее см. замечание 1.2.8.b,d). Во-вторых, вместо этой поверхности (или диска) удобно рассматривать набор треугольников, т. е. вместо геометрического объекта — алгебраический. Последнее подводит к одной из основных идей теории гомологий (см. также более общее определение зацепленности по модулю 2 в п. 1.9).

Точка O находится в **общем положении** с зацеплением (a, b) , если для каждого ребра MN узла a выполнено $b \cap \partial OMN = \emptyset$ и OMN не содержит вершин узла b .

Например, один треугольник внутри другого в плоскости образуют зацепление, для которого никакая вершина треугольников не находится в общем положении с зацеплением.

Задача 1.2.1. Какие точки куба находятся в общем положении с границами противоположных граней куба?

Лемма 1.2.2. (а) В любом двухкомпонентном зацеплении есть точка, находящаяся в общем положении с этим зацеплением.

(б) Если точка O находится в общем положении с (a, b) , то для каждого ребра MN узла a пересечение $OMN \cap b$ состоит из конечного числа точек.

Пункт (б) следует из того, что для каждого ребра MN узла a и для каждого ребра PQ узла b пересечение $OMN \cap PQ$ либо пусто, либо является внутренней точкой как треугольника OMN , так и отрезка PQ .

Узлы a, b (или зацепление (a, b)) называются **зацепленными по модулю 2**, если существует точка O в общем положении с (a, b) , для которой нечётна сумма

$$\sum_{MN} |OMN \cap b|,$$

где суммирование ведётся по рёбрам MN узла a . Корректность определения следует из леммы 1.2.2.а.

Задача 1.2.3. Какие из зацеплений на рис. 1.2.1 и 1.2.2.аw зацеплены по модулю 2? (Возьмите любые зацепления с данными проекциями на ваш выбор; используйте без доказательства лемму 1.2.4.а.)

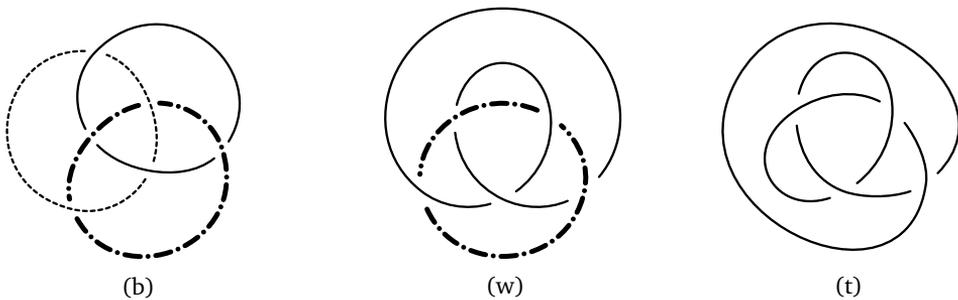


Рис. 1.2.2. Кольца Борромео, зацепление Уайтхеда и трилистник

Определение связной суммы зацеплений приведено, например, в [Sk20u, конец § 7].

ЛЕММА 1.2.4. (а) Зацепление (a, b) является зацепленным по модулю 2 тогда и только тогда, когда сумма $\sum_{MN} |OMN \cap b|$ нечётна для каждой точки O в общем положении с зацеплением.

(б) Два треугольника, имеющие непересекающиеся контуры, зацеплены (в смысле п. 1.1) тогда и только тогда, когда они зацеплены по модулю 2 (в смысле этого раздела).

(с) Зацепленность по модулю 2 является «аддитивной» по отношению к связной сумме двухкомпонентных зацеплений.

Подсказка. В утверждении (а) используйте лемму 1.2.5.

Ясно, что если ломаная не пересекает контур треугольника и ни одна из вершин ломаной не лежит в треугольнике, то ломаная пересекает треугольник в конечном числе точек (ср. [Sk18, утверждение 1.3.1]).

ЛЕММА 1.2.5 (о чётности; ср. [Sk18, лемма о чётности 1.3.2]). Даны замкнутая несамопересекающаяся ломаная и тетраэдр. Ломаная не

пересекает рёбер тетраэдра, и ни одна из вершин ломаной не лежит на поверхности тетраэдра. Тогда ломаная пересекает поверхность тетраэдра в чётном числе точек.

Указание. Тетраэдр разбивает пространство, далее аналогично [Sk18, лемма о чётности 1.3.2.a].

Обозначим через $\partial XYZT$ поверхность тетраэдра $XYZT$.

Набросок доказательства леммы 1.2.4.a. Пусть пара точек $\{O, O'\}$ находится в общем положении с (a, b) (определите это так, чтобы приведённое доказательство было верным!). Тогда

$$\sum_{MN} (|OMN \cap b| + |O'MN \cap b|) \equiv_2 \sum_{MN} |\partial OO'MN \cap b| \equiv_2 0.$$

Здесь суммирование ведётся по рёбрам MN узла a . Второе сравнение следует из леммы 1.2.5.

Если каждая из двух точек O, O' находится в общем положении с зацеплением, то существует точка O'' , для которой каждая из пар $\{O, O''\}$ и $\{O'', O'\}$ находится в общем положении с зацеплением. \square

Предложение 1.2.6 (о симметричности). Зацепленность по модулю 2 пары ломаных не зависит от порядка ломаных.

Подсказка. Используйте либо сингулярные конусы, либо утверждение о проекции 1.2.7.

Набросок доказательства утверждения 1.2.6 с использованием сингулярного конуса. Пусть пара точек (O, O') находится в общем положении с зацеплением (a, b) (определите это так, чтобы приведённое доказательство было верным!). Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{MN} |OMN \cap b| &\stackrel{(1)}{\equiv} \sum_{MN, PQ} |OMN \cap PQ| \stackrel{(2)}{\equiv} \sum_{MN, PQ} |OMN \cap \partial O'PQ| \stackrel{(3)}{\equiv} \\ &\stackrel{(3)}{\equiv} \sum_{MN, PQ} |\partial OMN \cap O'PQ| \stackrel{(4)}{\equiv} \sum_{PQ} |a \cap O'PQ|. \end{aligned}$$

Здесь суммирование ведётся по всем рёбрам MN узла a и рёбрам PQ узла b ; сравнения по модулю 2. Сравнение (3) справедливо, поскольку

- либо $OMN \cap O'PQ = \emptyset$, тогда $OMN \cap \partial O'PQ = \partial OMN \cap O'PQ = \emptyset$,
- либо $OMN \cap O'PQ$ является невырожденным отрезком, имеющим два конца, тогда $|OMN \cap \partial O'PQ| \equiv_2 |\partial OMN \cap O'PQ|$.

Сравнение (4) аналогично сравнениям (1) и (2). \square

Предложение 1.2.7 (о проекции; ср. утверждение о проекции 1.1.2). Пусть вершины ортогональной проекции некоторого двухкомпонентного зацепления на некоторую плоскость находятся в общем положении (см. определение в [Sk18, п. 1.3]). В точках, где проекции компонент пересекаются, отметим, какая из компонент «проходит выше» другой (как на рис. 1.2.1 и 1.2.2). Зацепление является зацепленным по модулю 2 тогда и только тогда, когда число точек пересечения, где первая компонента проходит выше второй, нечётно.

Замечание 1.2.8. (а) Пусть существует «изотопия» ([Sk20ц, § 1], п. 1.4) между двумя двухкомпонентными зацеплениями, причём вторая компонента не меняется при этой гомотопии. Тогда след первой компоненты является сингулярным (т. е. криволинейным и самопересекающимся) цилиндром, не пересекающимся со второй компонентой. Если после изотопии компоненты содержатся в непересекающихся шарах, то цилиндр может быть дополнен до сингулярного диска, не пересекающего второй компоненты. Это мотивирует неформальное описание в начале п. 1.2.

(б) Для точки O и подмножества $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ сингулярным конусом $O * \Gamma$ над Γ называется объединение отрезков $\bigcup_{M \in \Gamma} OM$. Если $OM \cap ON = \{O\}$ для каждой двух различных точек $M, N \in \Gamma$, то сингулярный конус называется просто конусом.

(с) Существуют зацепление (a, b) и точка O в общем положении с этим зацеплением, такие что зацепление является зацепленным по модулю 2, но $|(O * a) \cap b|$ чётно. (Действительно, возьмём узел a , у которого есть непересекающиеся скрещивающиеся рёбра PQ и RS , возьмём точку O , такую что треугольники OPQ и ORS имеют общую точку, отличную от O , и возьмём узел b , проходящий через эту точку.)

(д) Следующее эквивалентное определение зацепленности по модулю 2 более наглядно, но с ним сложнее работать (поскольку (с) показывает, что нужно более сильное условие общего положения, приведённое ниже).

Зацепление (a, b) является зацепленным по модулю 2, если $|(O * a) \cap b|$ нечётно для некоторой (или, что эквивалентно, для любой) точки O , такой что

- ни одна вершина узла b не принадлежит $O * a$ и
- если M является либо вершиной ломаной a , либо точкой ломаной a , для которой внутренность отрезка OM пересекает a , то $b \cap OM = \emptyset$.

Предложение 1.2.9. (а) (Конвей — Гордон — Закс) В пространстве даны 6 точек. Любые две из них соединены несамопересекающейся ло-

маной, причём пересекаются только ломаные, имеющие общий конец, и только в этом конце. Тогда найдутся два зацепленных по модулю 2 цикла длины 3. (Иными словами, в образе любого кусочно-линейного вложения графа K_6 в пространство найдутся два зацепленных по модулю 2 цикла длины 3.)

(б) (Закс) В пространстве даны 4 красные и 4 синие точки. Любые две разноцветные из них соединены несамопересекающейся ломаной, причём пересекаются только ломаные, имеющие общий конец, и только в этом конце. Тогда найдутся два зацепленных по модулю 2 цикла длины 4. (Иными словами, в образе любого кусочно-линейного вложения графа $K_{4,4}$ в пространство найдутся два зацепленных по модулю 2 цикла длины 4.)

Эти утверждения доказываются аналогично их «линейным» аналогам [Sk14, § 2]. См. простое доказательство в [Zi13].

1.3. Коэффициент зацепления замкнутых ломаных

Мотивировки к нижеприведённому строгому определению коэффициента зацепления аналогичны мотивировкам, приведённым в начале п. 1.2. Альтернативные определения приведены в утверждении о проекции 1.3.5, в замечании 1.3.6.ab, а также в п. 1.9.

Отрезок и треугольник называются *трансверсальными*, если вектор e отрезка вместе с базисом f_1, f_2 плоскости треугольника образуют базис e, f_1, f_2 пространства.

Знаком $\operatorname{sgn} X$ точки пересечения X трансверсальных ориентированных отрезка и треугольника называется число $+1$, если вектор e отрезка вместе с положительным базисом f_1, f_2 треугольника образуют положительный базис e, f_1, f_2 пространства, и число -1 в противном случае. Иными словами, *знаком* называется число $+1$, если ориентации отрезка и треугольника согласованы по правилу *левой руки* (*левого винта*), и -1 , если не согласованы.

Коэффициентом зацепления $\operatorname{lk}(a, b)$ ориентированного зацепления (a, b) называется

$$\operatorname{lk}(a, b) := \sum_{MN} \sum_{X \in OMN \cap b} \operatorname{sgn} X,$$

где точка O находится в общем положении с зацеплением и первое суммирование ведётся по ориентированным рёбрам MN узла a .

Задача 1.3.1. Найдите коэффициенты зацепления зацеплений на рис. 1.2.1. (Возьмите некоторую ориентацию зацеплений с данной проекцией на ваш выбор; используйте без доказательства лемму 1.3.2.a.)

ЛЕММА 1.3.2. (а) (Ср. лемму 1.2.4.а.) Коэффициент зацепления корректно определён, т. е. не зависит от выбора точки O .

(б) Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ существует ориентированное зацепление, имеющее коэффициент зацепления n .

(с) Коэффициент зацепления аддитивен по отношению к связной сумме двухкомпонентных зацеплений.

(д) Для каждой тройки целых чисел k, l, m существует трёхкомпонентное ориентированное зацепление с попарными коэффициентами зацепления k, l, m .

Лемма 1.3.2.а и утверждения 1.3.4, 1.3.5, 1.4.4 доказываются аналогично их аналогам по модулю 2, с использованием подходящей версии следующей леммы.

ЛЕММА 1.3.3 (ср. [Sk18, лемма о тривиальности 1.3.3] и лемму о чётности 1.2.5). Даны замкнутая ориентированная несамопересекающаяся ломаная и ориентированный тетраэдр (т. е. тетраэдр с согласованными ориентациями граней, см. рис. 1.3.1). Ломаная не пересекает рёбер тетраэдра, и ни одна из вершин ломаной не лежит на поверхности тетраэдра. Тогда сумма знаков точек пересечения ломаной и поверхности тетраэдра нулевая.

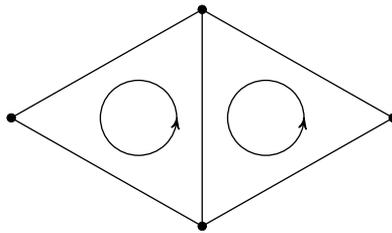


Рис. 1.3.1. Согласованные ориентации

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.4 (о симметричности). (а) (Ср. утверждение о симметричности 1.2.6.) Коэффициент зацепления пары ломаных не зависит от порядка ломаных.

(б) Изменение ориентации одной из компонент меняет коэффициент зацепления на противоположный.

(с) Зеркальная симметрия меняет коэффициент зацепления на противоположный.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.5 (о проекции). В условиях утверждения о проекции 1.2.7, для ориентированного зацепления коэффициент зацепления равен сумме знаков (определение приведено в [Sk18, п. 1.6]) тех точек пересечения, в которых первая компонента проходит над второй.

Замечание 1.3.6. (а) Пусть $f, g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — (кусочно-линейные, гладкие или непрерывные) отображения с непересекающимися образами. Коэффициент зацепления их ориентированных образов равен степени [Sk20, § 8] отображения $S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$, определяемого формулой

$$(x, y) \mapsto \frac{f(x) - g(y)}{|f(x) - g(y)|}.$$

(б) Для непересекающихся гладких замкнутых кривых

$$f, g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

имеем

$$\text{lk}(f, g) = \int_{[0, 2\pi]^2} \frac{f(x) - g(y)}{|f(x) - g(y)|^3} \wedge f'(x) \wedge g'(y) dx dy.$$

(с) Для вложения графа в \mathbb{R}^3 можно определить аналог коэффициента зацепления — инвариант Bu (аналогично [Sk18, пп. 1.5, 1.6]). См. подробнее [Sk06, §§ 4, 5].

(д) См. [Sk, утверждения 6.13.2.abc] и дальнейшие обсуждения в [BE82, § 19], [RN11].

1.4. ИЗОТОПНОСТЬ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

Предложение 1.4.1 (устойчивость). Для любого двухкомпонентного зацепления существует $\delta > 0$, такое что при любом сдвиге вершин ломаных на расстояния, не превышающие δ ,

(а) сдвинутые компоненты не пересекаются;

(б) сдвинутые компоненты зацеплены по модулю 2 тогда и только тогда, когда исходные компоненты зацеплены по модулю 2.

Часть (а) доказывается несложно. А вот для доказательства части (б) полезно понятие изотопности зацеплений, введённое ниже.

Пусть стороны AC и CB треугольника ABC — рёбра некоторого узла, не пересекающего треугольник ABC ни в каких других точках. Элементарная изотопия $ACB \rightarrow AB$ — замена двух рёбер AC и CB ребром AB (рис. 1.4.1). Два узла называются (кусочно-линейно объемлемо) **изотопными**, если их можно соединить последовательностью

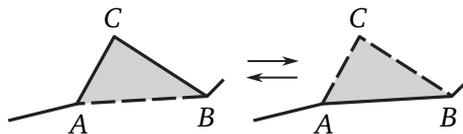


Рис. 1.4.1. Элементарная изотопия

узлов, в которой соседние получаются друг из друга элементарной изотопией.

Аналогичным образом определяется изотопность зацеплений.

Предложение 1.4.2. *Изотопные (даже кусочно-линейно сингулярно гомотопные) двухкомпонентные зацепления одновременно зацеплены по модулю 2 или не зацеплены по модулю 2.*

Набросок доказательства. Достаточно рассмотреть элементарную изотопию $ACB \rightarrow AB$, меняющую зацепление (a, b) на зацепление (a', b) . Существует точка O общего положения, т. е.

- находящаяся в общем положении с (a, b) , в общем положении с (a', b) , причём
- такая что никакая вершина ломаной b не лежит на поверхности тетраэдра $OABC$ и b не пересекает рёбер $OABC$.

Так как $ABC \cap b = \emptyset$, то по лемме о чётности 1.2.5 имеем

$$|OAC \cap b|_2 + |OCB \cap b|_2 = |OAB \cap b|_2.$$

Используя точку O , заметим, что зацепления (a, b) и (a_1, b) либо оба зацеплены по модулю 2, либо оба не зацеплены по модулю 2. \square

Тривиальным зацеплением (с любым числом компонент) называется зацепление, состоящее из попарно непересекающихся треугольников.

Пример 1.4.3. Существует двухкомпонентное зацепление, не зацепленное по модулю 2 и не изотопное тривиальному.

В качестве примера можно взять любое зацепление с коэффициентом зацепления 2, например, третье зацепление на рис. 1.2.1. Неизотопность доказывается при помощи коэффициента зацепления; она следует из результата задачи 1.3.1, леммы 1.3.2.a и утверждения 1.4.4.ab.

Предложение 1.4.4. (a) *Изотопные ориентированные двухкомпонентные зацепления имеют равные коэффициенты зацепления.*

(b) *Изотопные двухкомпонентные зацепления имеют равные модули коэффициентов зацепления.*

Пример 1.4.5. Существует двухкомпонентное зацепление, имеющее нулевой коэффициент зацепления, но не изотопное тривиальному.

Примером является зацепление Уайтхеда (рис. 1.2.2.w и предпоследнее зацепление на рис. 1.2.1). Неизотопность доказывается через «высший коэффициент зацепления» (число Сато — Левина); она следует из результатов задач 1.10.10.abg.

Замечание 1.4.6. Справедлив аналог утверждений 1.4.1.ab для треугольников и их зацепленности. Обсудим доказательство аналога утверждения 1.4.1.b.

Пусть никакие четыре из шести вершин двух треугольников не лежат в одной плоскости. Количество точек пересечения отрезков и треугольников (из пяти вершин которых никакие четыре не лежат в одной плоскости) сохраняется при достаточно малом шевелении этих пяти вершин. Тогда аналог утверждения 1.4.1.b вытекает из следующего результата (который следует из простого частного случая леммы 1.2.5).

Пусть никакие четыре из семи вершин треугольника Δ и точек A, B, C, X, Y, Z, Z' не лежат в одной плоскости. Если $(XZZ' \cup YZZ') \cap \partial\Delta = \emptyset$, то пары (Δ, XYZ) и (Δ, XYZ') либо обе зацеплены, либо обе не зацеплены.

Интересно, что перенесение столь естественного рассуждения на общий случай включает технические сложности, поэтому для общего случая удобнее использовать более общее понятие зацепленности ломаных по модулю 2: аналог утверждения 1.4.1.b вытекает из утверждения 1.4.1.b и леммы 1.2.4.b.

1.5. Комбинаторная изотопность зацеплений треугольников

Если вершины двух треугольников движутся непрерывно так, что контуры треугольников в любой момент не пересекаются, то треугольники остаются зацепленными или незацепленными. Строгая формулировка этого факта на «дискретном» языке (утверждение 1.5.1.a) использует нижеприведённое понятие комбинаторной изотопности.

Мы не различаем треугольники, отличающиеся перестановкой вершин. Пусть (Δ, XYZ) — зацепление двух треугольников, а Z' — точка вне прямой XY , для которой $(XZZ' \cup YZZ') \cap \partial\Delta = \emptyset$. Тогда *элементарной комбинаторной изотопией* назовём замену XYZ на XYZ' . *Элементарной комбинаторной изотопией* назовём также аналогичное преобразование первого треугольника при неизменном втором. Два зацепления треугольников назовём *комбинаторно изотопными*, если их можно соединить последовательностью зацеплений треугольников, в которой соседние получаются друг из друга элементарной комбинаторной изотопией.

Предложение 1.5.1. (a) *Комбинаторно изотопные зацепления треугольников одновременно зацеплены или не зацеплены. (Значит, существуют два зацепления треугольников, не являющиеся комбинаторно изотопными.)*

(b) Если два треугольника не зацеплены, то образованное ими зацепление комбинаторно изотопно тривиальному зацеплению треугольников.

(c) Любые две пары зацепленных треугольников комбинаторно изотопны.

Пункт (a) следует из утверждения 1.4.1.b (или из леммы 1.2.4.b или утверждения 1.4.2), поскольку элементарную комбинаторную изотопию можно сделать за две элементарные изотопии. Пункт (c) вытекает из свойства 1.1.1.(2); записать доказательство интересно, ибо оно даст алгоритм преобразования пары зацепленных треугольников к стандартному виду, а также позволит подойти к гипотезам 2.2.6, 2.2.8. Ср. [Ko19], [Sk20c, утверждение 4.5].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5.2. (a) Из утверждений 1.5.1.bc вытекает, что любое зацепление треугольников комбинаторно изотопно либо тривиальному зацеплению, либо либо зацеплению Хопфа, см. рис. 1.2.1. (Иными словами, два треугольника зацеплены тогда и только тогда, когда соответствующее зацепление не тривиально.)

(b) Было бы интересно доказать, что существуют три зацепления ориентированных треугольников, для которых любое такое зацепление ориентированно комбинаторно изотопно одному из них. (Дайте необходимые определения самостоятельно. Это аналог утверждений 1.5.1.bc.)

(c) Из утверждения 1.5.1.c вытекает, что комбинаторная изотопность пар треугольников равносильна изотопности (определённой в п. 1.4). Было бы интересно выяснить, равносильны ли они для зацеплений более двух треугольников.

1.6. Сингулярная гомотопность зацеплений

Введём естественное понятие *сингулярной гомотопности* зацеплений, относительно которого «полным» инвариантом двухкомпонентных зацеплений является коэффициент зацепления (теорема 1.6.1, ср. с примером 1.4.5). «Полным» инвариантом трёхкомпонентных зацеплений относительно сингулярной гомотопности окажется «тройной» коэффициент зацепления, введённый в п. 1.10 (см. теорему Милнора 1.7.4).

Говоря неформально, два зацепления называются *сингулярно гомотопными*, если одно из зацеплений можно привести к другому непрерывной деформацией, при которой не возникает пересечений разных компонент (но могут появляться самопересечения компонент).

Приведём строгое определение (для неориентированных зацеплений; определение для ориентированных зацеплений аналогично).

Пусть AC и CB являются последовательными рёбрами одной компоненты a зацепления и ни одна из остальных компонент не пересекает треугольника ABC . *Элементарной сингулярной гомотопией* называется замена в a двух рёбер AC и CB ребром AB . Два зацепления называются *сингулярно гомотопными*, если их можно соединить последовательностью зацеплений, в которой каждые два соседних зацепления элементарно сингулярно гомотопны. (Или, что эквивалентно, если некоторая плоская диаграмма одного зацепления может быть преобразована в некоторую плоскую диаграмму второго зацепления движениями Рейдемейстера и изменениями перекрёстков одной из компонент, все эти определения приведены в [Sk20u, § 3].)

Например, зацепление Уайтхеда сингулярно гомотопно тривиальному зацеплению.

Приведём стандартное более общее определение (используемое только в замечании 1.6.2). Отображение $f: X_1 \sqcup X_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется *сингулярным зацеплением*, если $f(X_1) \cap f(X_2) = \emptyset$. Более общо, отображение $f: X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется *сингулярным зацеплением*, если $f(X_i) \cap f(X_j) = \emptyset$ для любых i, j . Сингулярные зацепления $f_0, f_1: X \rightarrow \mathbb{R}^3$, где $X := X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$, называются *сингулярно гомотопными*, если существует семейство $f_t: X \rightarrow \mathbb{R}^3$ сингулярных зацеплений, непрерывно зависящих от $t \in [0, 1]$.

ТЕОРЕМА 1.6.1. *Ориентированные двухкомпонентные зацепления сингулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их коэффициенты зацепления равны.*

Необходимость доказывается аналогично утверждению 1.4.4.а. Доказательство достаточности сложнее, и мы не рекомендуем начинающему пытаться его придумать (сначала приводят первые компоненты к «стандартным», а затем совмещают вторые компоненты в дополнении к совпадающим стандартным первым).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6.2. (а) Возьмём двухкомпонентное сингулярное зацепление, у которого первая компонента — одно из колец Борромео (рис. 1.2.2.б), а вторая — объединение других двух колец. Это сингулярное зацепление сингулярно гомотопно тривиальному зацеплению.

(б) Двухкомпонентные сингулярные зацепления, состоящие из дизъюнктного объединения двух графов (не обязательно связных), сингулярно гомотопны тогда и только тогда, когда у них равны наборы коэффициентов зацепления для циклов из разных компонент [Sk00].

1.7. КОЛЬЦА И ТРЕУГОЛЬНИКИ БОРРОМЕО

ПРИМЕР 1.7.1 (кольца Борромео). (а) Существует трёхкомпонентное зацепление, не изотопное тривиальному, каждое двухкомпонентное подзацепление которого изотопно тривиальному (рис. 1.2.2.b и 1.7.1).

(б) Для каждого r существует r -компонентное зацепление, не изотопное тривиальному, каждое $(r - 1)$ -компонентное подзацепление которого изотопно тривиальному [BL, BL4].

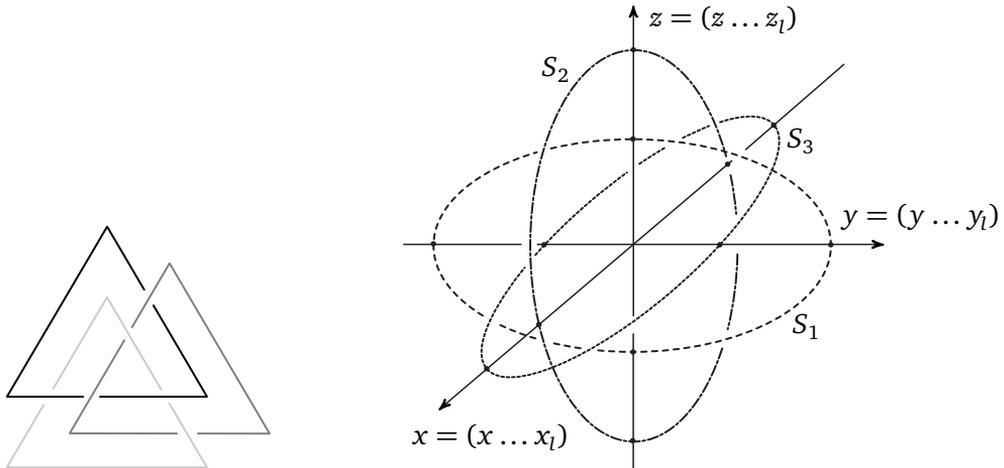


Рис. 1.7.1. Слева: треугольники Борромео. Справа: эллипсы Борромео

В качестве колец Борромео можно взять три эллипса (рис. 1.7.1, справа), заданные уравнениями

$$\begin{cases} x = 0, \\ y^2 + 2z^2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ z^2 + 2x^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Построение колец Борромео при помощи тора. См. рис. 1.7.2. Рассмотрим стандартный тор, т. е. фигуру, образованную вращением окружности $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ вокруг оси Oy . Первая кривая — окружность вне тора, близкая к меридиану тора. Вторая кривая — окружность вне тора, зацепленная с меридианом тора и пересекающая тор в двух точках. Третья кривая — кривая на торе, близкая к границе квадрата, полученного из тора разрезанием вдоль параллели и меридиана.

Ясно, что построенные три ломаные (или кривые) попарно не зацеплены. Нетривиальность в примере 1.7.1.a следует из лемм 1.10.1.ab и утверждения 1.10.2. Аналогично доказываются пример 1.7.1.b и утверждения 1.7.3.ab.

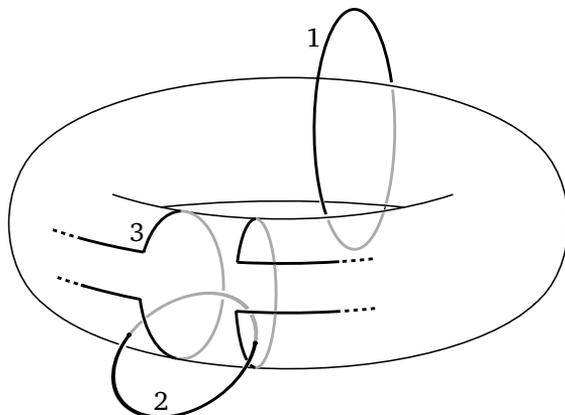


Рис. 1.7.2. Построение колец Борромео при помощи тора

Другое доказательство нерасцепляемости использует фундаментальную группу (см., например, [Sk20, п. 14.1]). Приведём это доказательство для построения на рис. 1.7.2. Обозначим через S и S' первую и вторую кривую. Группа $\pi_1(\mathbb{R}^3 - S - S')$ изоморфна свободной группе с двумя образующими. Параллель и меридиан тора (произвольно ориентированные) представляют первую и вторую образующие соответственно. Третья кривая представляет их коммутатор. Так как он не равен единице и даже не сопряжён с ней, то третья кривая не гомотопна вне $S \cup S'$ отображению в точку.

Задача 1.7.2. (а) Существует три треугольника, проекции которых показаны на рис. 1.7.1 слева (ср. [Val, CKS+, GSS+]).

(б) (нерешённая задача) При каких r существует r попарно непересекающихся треугольников со свойством из примера 1.7.1.b?

(с) (нерешённая задача) Опишите классы комбинаторной изотопности зацеплений трёх треугольников. (Комбинаторная изотопность зацеплений из трёх треугольников определяется аналогично случаю пар. Гипотеза и продвижения приведены в [Ko19].)

Задача 1.7.3. (а) Существуют два не изотопных (даже не сингулярно гомотопных) ориентированных трёхкомпонентных зацепления с попарными коэффициентами зацепления $2, 0, 0$, сужения которых на любое двухкомпонентное подзацепление изотопны.

(б) Зацепление «кольца Борромео» B не является сингулярно гомотопным тривиальному зацеплению.

(с) Для некоторого ориентированного трёхкомпонентного зацепления L с попарными коэффициентами зацепления $1, 0, 0$ некоторая связная сумма $B \# L$ сингулярно гомотопна L .

(д) Любые два ориентированных трёхкомпонентных зацепления с попарными коэффициентами зацепления $1, 0, 0$ сингулярно гомотопны.

(е) Для некоторого ориентированного трёхкомпонентного зацепления L с попарными коэффициентами зацепления $2, 0, 0$ некоторая связная сумма $B\#B\#L$ сингулярно гомотопна L .

Доказательства утверждений (а) и (б) используют п. 1.10. Доказательства утверждений (с), (д) и (е) могут быть непросты для начинающего.

ТЕОРЕМА 1.7.4 (Милнор). *Множество классов сингулярной гомотопности трёхкомпонентных ориентированных зацеплений с попарными коэффициентами зацепления k, l, m*

- содержит бесконечно много элементов, если $k = l = m = 0$, и
- содержит $\gcd(k, l, m)$ элементов иначе.

Этот результат легко получить из [Mi54] (хотя ранее он не был сформулирован столь явно). Ср. лемму 1.3.2.d. Мы предлагаем читателю привести простое доказательство, используя число Милнора по модулю $\gcd(k, l, m)$, определяемое аналогично п. 1.10 и принимающее значения в множестве остатков по модулю $\gcd(k, l, m)$ (мы полагаем $\gcd(0, 0, 0) = 0$, так что $|\mathbb{Z}_{\gcd(0,0,0)}| = |\mathbb{Z}| = \infty$). Это доказательство иллюстрируется задачами 1.7.3 и 1.10.9. Биекция между множеством из теоремы Милнора 1.7.4 и $\mathbb{Z}_{\gcd(k,l,m)}$ задаётся числом Милнора по модулю $\gcd(k, l, m)$.

1.8. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ЧИСЛО ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Основные результаты этого пункта — леммы о чётности 1.8.2 и о тривиальности 1.8.4. Они обобщают [Sk18, лемма о чётности 1.3.2] и лемму 1.2.5 и соответственно [Sk18, лемма о тривиальности 1.3.3] и лемму 1.3.3. Приложения этого пункта приведены в п. 1.9 (который нужен для п. 1.10, который нужен для доказательств результатов п. 1.7). Изучение этого пункта можно начать с решения задачи 1.8.5, которая ярко иллюстрирует нетривиальность материала.

В этом пункте α — набор отрезков, а β — набор треугольников.

Наборы α и β называются находящимися в общем положении, если для любого отрезка MN из α и любого треугольника Δ из β выполнено $\{M, N\} \cap \Delta = MN \cap \partial\Delta = \emptyset$. Для таких наборов определим **алгебраическое число пересечений по модулю 2**

$$\alpha \cap_2 \beta := \sum_{MN, \Delta} |MN \cap \Delta|_2 \in \mathbb{Z}_2,$$

где суммирование ведётся по всем отрезкам MN из a , а также треугольникам Δ из β . Это чётность количества пар MN, Δ , образованных пересекающимися отрезком MN из множества a и треугольником Δ из множества β .

Вершинами набора отрезков (треугольников) называются концы его отрезков (вершины его треугольников). *Телом* $|\gamma|$ набора γ отрезков (треугольников) называется объединение его отрезков (треугольников).

Замечание 1.8.1. (а) Алгебраическое число пересечений нужно для работы с непересекающимися ломаными, вершины которых ни в каком смысле не находятся в общем положении. Кроме того, чем больше размерность евклидова пространства и пересекающихся объектов, тем более громоздкими становятся условия общего положения, необходимые для работы с *геометрическими* пересечениями, см. (ii) в (d).

(b) Если никакие четыре вершины отрезков из a и треугольников из β не лежат в одной плоскости, то a и β находятся в общем положении.

(c) Для любого треугольника Δ выполнено $a \cap_2 \Delta = ||a| \cap \Delta|_2$, если никакие четыре вершины отрезков из a не лежат в одной плоскости (но не без этого условия).

(d) Набор точек находится в *общем положении*, если

(i) никакие 4 из них не лежат в одной плоскости и

(ii) для любых пары x , тройки y и тройки y' среди них, для которых $x \cap y = x \cap y' = \emptyset$ и $y \neq y'$, прямая, проходящая через x , плоскость, проходящая через y , и плоскость, проходящая через y' , не имеют общих точек. (Плоскость, проходящая через y , определена, так как если точки множества y лежат на одной прямой, то, добавив к ним точку из x , получим противоречие с условием (i).)

(e) Имеем $a \cap_2 \beta = ||a| \cap |\beta||_2$, если все вершины отрезков из a и треугольников из β находятся в общем положении (но не без этого условия, см. замечание 1.2.8.c).

Назовём *1-циклом* конечный набор отрезков (не вырожденных в точку), такой что каждая точка плоскости является концом чётного числа отрезков набора. Примером 1-цикла является набор всех рёбер замкнутой ломаной. Назовём *2-циклом* конечный набор треугольников (не вырожденных в точку или в отрезок), такой что любой отрезок на плоскости является стороной чётного числа треугольников набора. Примером 2-цикла является множество граней тетраэдра (или другой «триангулированной поверхности»). Ср. [DMN+].

ЛЕММА 1.8.2 (о чётности). Если 1-цикл α и 2-цикл β находятся в общем положении, то $\alpha \cap_2 \beta = 0$.

Аналогично [Sk18, другое доказательство леммы о чётности 1.3.2.b в п. 1.7], использующему сингулярный конус, лемма следует из своего частного случая, в котором 2-цикл является множеством всех граней тетраэдра (можно дополнительно предполагать, что 1-цикл является треугольником). Этот случай аналогичен лемме 1.2.5.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8.3. (а) Если вершины замкнутой ломаной и 2-цикла находятся в общем положении (см. замечание 1.8.1.d), то ломаная пересекает тело 2-цикла в чётном числе точек.

(б) Если условие (ii) из замечания 1.8.1.d требовать только для попарно непересекающихся x, y, y' , то полученный аналог утверждения (а) будет неверен (аналогично замечанию 1.2.8.c).

(с) Леммы о чётности [Sk18, 1.3.2] и 1.8.2, а также их обобщения на p -циклы и q -циклы в \mathbb{R}^{p+q} известны в фольклоре. Например, [Sk03, лемма о чётности 3] сформулирована в качестве простого результата — без явного определения общего положения, а также в терминах тел (как в (а), в замечании 1.8.1.e и в [Sk18, лемма о чётности 1.3.2.b]). Однако дать правильную формулировку леммы о чётности, либо явно определив общее положение (как в замечании 1.8.1.d), либо использовав алгебраические пересечения (как в лемме о чётности 1.8.2), не так просто, как может показаться. Например, случай $p = q = 1$ (для 1-циклов на плоскости) неверно сформулирован в [Pr04, задача 1.2], а случай $p = 1, q = 2$ (для 1-цикла и 2-цикла в трёхмерном пространстве) неверно сформулирован в лемме 4.6 в архивной версии 6 статьи [Sk14] (соответствующие утверждения в других версиях верны).

Целочисленным (или ориентированным) **1-циклом** называется набор (не обязательно различных) ориентированных отрезков (не вырожденных в точку), такой что для каждой точки количество входящих отрезков равно количеству исходящих.

Целочисленным (или ориентированным) **2-циклом** называется набор (не обязательно различных) ориентированных треугольников (не вырожденных в отрезок или точку), такой что для каждого ориентированного отрезка количество входящих треугольников равно количеству исходящих (рис. 1.3.1). Ориентированный треугольник ABC входит в ориентированный отрезок BA и выходит из ориентированного отрезка AB .

ЛЕММА 1.8.4 (о тривиальности). *Если целочисленные 1-цикл и 2-цикл находятся в общем положении, то сумма знаков точек пересечения по всем парам пересекающихся отрезков 1-цикла и треугольников 2-цикла равна нулю.*

Задача 1.8.5. (Этот яркий частный случай лемм о чётности 1.8.2 и о тривиальности 1.8.4 предлагался 01.04.2015 на ФОПФ МФТИ в курсе «Современные топологические методы в физике».)

В пространстве имеется 17 точек: 7 красных и 10 жёлтых. Никакие четыре из них не лежат в одной плоскости.

(а) Может ли количество пар пересекающихся красного отрезка (т. е. отрезка, соединяющего красные точки) и жёлтого треугольника (т. е. треугольника, натянутого на жёлтые точки) быть равным 7?

Указание. Если красных точек 3, а жёлтых — 4, то количество таких пар чётно, см. лемму 1.2.5.

Примечание. Рассматриваемое количество равно количеству точек пересечения красных отрезков и жёлтых треугольников только в предположении, что никакой красный отрезок не пересекает никакой отрезок пересечения жёлтых треугольников.

(б) После решения пункта (а) Илья Муромец подошёл к точкам поближе. Он увидел, что по красным отрезкам течёт ток. Чу! Сколько в красную точку миллиампер входит, столько из неё и выходит.

А по ориентированным жёлтым треугольникам свистит свист. То есть на каждом ориентированном жёлтом треугольнике стоит соловьёметр, измеряющий свист в Соловьях ($1C = 1A^2$). Чу! Сколько в ориентированный жёлтый отрезок микросоловьёв входит, столько из него и выходит.

Для каждой пары пересекающихся красного отрезка и жёлтого треугольника имеется гривнометр. По закону Владимира-Красное-Солнышко показание гривнометра равно произведению показаний соответствующих амперметра и соловьёметра, если направление красного тока и ориентация жёлтого треугольника согласованы по правилу левой руки (буравчика), и минус этому произведению, если не согласованы. (Таким образом, $1 \text{ Грн} = 1C \times 1A = 1A^3$.)

За понимание условия пункта (б) князь одарил Илью величиной потока тока через свист, т. е. суммой показаний гривнометров. Могли ли так располагаться точки, течь ток по красным отрезкам и свистеть свист по жёлтым треугольникам, что Илья получил 42 наногривны?

Указание. Если красных точек 3, а жёлтых — 4, то поток тока через свист равен нулю ввиду леммы 1.3.3.

1.9. КОЭФФИЦИЕНТ ЗАЦЕПЛЕНИЯ И ЗЕЙФЕРТОВЫ ЦЕПИ

Здесь мы приводим более общие определения коэффициента зацепления (утверждения 1.9.3 и 1.9.5), которые используются в п. 1.10, а также интересны сами по себе.

Зейфертовой цепью (или кограницей) узла a называется конечный набор S треугольников (не вырожденных в отрезок или точку), такой что

- каждое ребро узла a является стороной ровно одного треугольника из S ;
- каждый отрезок, не являющийся ребром из a , является стороной чётного (возможно, нулевого) количества треугольников из S .

Примерами зейфертовых цепей являются набор треугольников сингулярного конуса $O * a$ для некоторой точки O (замечание 1.2.8.b), а также триангуляция поверхности Зейферта [Pr95, § 3]. Более общие зейфертовы цепи, чем сингулярные конусы, нам нужны, например, для определения числа Милнора, т. е. для нижеприведённой леммы 1.9.4.

Для множества β треугольников положим

$$\partial\beta := \sum_{\Delta \in \beta} \partial\Delta,$$

где суммирование ведётся по модулю 2.

Задача 1.9.1. (а) Если S является зейфертовой цепью узла a , то ∂S является 1-циклом, тело которого совпадает с a .

(б) Для одной из компонент зацепления Уайтхеда нарисуйте зейфертову цепь, не пересекающую оставшуюся компоненту.

(с) Для одного из колец Борромео нарисуйте зейфертову цепь, не пересекающую объединение двух других колец.

Лемма 1.9.2. Для любых непересекающихся узлов a и b существует зейфертова цепь S узла a , находящаяся в общем положении с b (определение приведено в начале п. 1.8).

Предложение 1.9.3. Следующие условия эквивалентны для зацепления (a, b) :

- (i) зацепление не зацеплено по модулю 2;
- (ii) для некоторой (или, что эквивалентно, для любой) зейфертовой цепи S узла a , находящейся в общем положении с b , выполнено $b \cap_2 S = 0$;
- (iii) существует зейфертова цепь узла a , тело которой не пересекает b ;

(iv) для некоторой (или, что эквивалентно, для любой) зейфертовой цепи S узла a , для которой контур любого треугольника из S не пересекает b , количество треугольников из S , зацепленных по модулю 2 с b , чётно;

(v) для некоторых (или, что эквивалентно, для любых) зейфертовых цепей S узла a и T узла b , таких что контур любого треугольника из S не пересекает контура ни одного треугольника из T , количество зацепленных по модулю 2 пар (Δ, Γ) треугольников Δ из S и Γ из T чётно.

Набросок доказательства. Эквивалентность (i) \Leftrightarrow (ii) и эквивалентность «для некоторого» и «для любого» в (ii) следуют из леммы о чётности 1.8.2.

Очевидно, что (iii) \Rightarrow (ii). Обратная импликация доказывается сдвигом S в общее положение так, чтобы $||S| \cap b|$ было чётным, а также добавлением ручек к $|S|$.

Эквивалентность (ii) \Leftrightarrow (iv) ((ii) \Leftrightarrow (v)) получается из первого равенства (из обоих равенств)

$$b \cap_2 S = \sum_{\Delta \in S} b \cap_2 \Delta = \sum_{\Delta \in S, \Gamma \in T} \partial \Gamma \cap_2 \Delta.$$

Эти равенства следуют из аддитивности алгебраического пересечения, второе из них — с учётом утверждения 1.9.1.a. \square

Лемма 1.9.4. Если (a, b, c) — зацепление, в котором a не зацеплено по модулю 2 ни с b , ни с c , то существует зейфертова цепь узла a , тело которой не пересекает $b \cup c$.

Эта лемма доказывается при помощи утверждения 1.9.3.

Аналогично вышесказанному определяется целочисленная зейфертова цепь S ориентированного узла a , её тело, а также алгебраическое число пересечений $S \cdot b \in \mathbb{Z}$. Следующие результаты доказываются аналогично их аналогам по модулю 2 (утверждению 1.9.3 и лемме 1.9.4).

Предложение 1.9.5. Пусть (a, b) — ориентированное зацепление.

(а) Для любой зейфертовой цепи S узла a в общем положении с b выполнено $\text{lk}(a, b) = S \cdot b$.

(б) Целочисленная зейфертова цепь узла a , тело которой не пересекает b , существует тогда и только тогда, когда $\text{lk}(a, b) = 0$.

Лемма 1.9.6. Если (a, b, c) — ориентированное зацепление, для которого $\text{lk}(a, b) = \text{lk}(a, c) = 0$, то существует целочисленная зейфертова цепь узла a , тело которой не пересекает $b \cup c$.

ЗАДАЧА 1.9.7. (а) Аналогично вышесказанному определите *зейфертову цепь* S_a по модулю 3 ориентированного узла a , её *тело*, а также *алгебраическое число пересечений* $S_a \cdot b \in \mathbb{Z}_3$ по модулю 3.

(b), (c), (d) Сформулируйте и докажите аналоги по модулю 3 утверждений 1.9.5.ab и леммы 1.9.6.

1.10. Тройной коэффициент зацепления

В этом разделе через (a_1, a_2, a_3) обозначается трёхкомпонентное зацепление, компоненты которого попарно не зацеплены по модулю 2.

По лемме 1.9.4 существуют *зейфертовы цепи* S_1, S_2, S_3 узлов a_1, a_2, a_3 , такие что $|S_i| \cap a_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Более того, можно выбрать *зейфертовы цепи в тройном общем положении*, т. е. такие, что для любых треугольников $\Delta_k \in S_k, k=1,2,3$, пересечение $\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3$ либо пусто, либо является внутренней точкой в каждом из треугольников $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Зацепление (a_1, a_2, a_3) называется **зацепленным по модулю 2**, если количество троек $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$, имеющих общую точку, нечётно.

Ясно, что это свойство не зависит от перестановки трёх компонент.

ЛЕММА 1.10.1. (а) *Кольца Борромео зацеплены по модулю 2 (используйте любую из конструкций п. 1.7 на ваш выбор; используйте (b) без доказательства).*

(b) *Зацепленность по модулю 2 корректно определена, т. е. не зависит от зейфертовых цепей S_1, S_2, S_3 общего положения.*

(c) *Зацепленность по модулю 2 «аддитивна» относительно связной суммы трёхкомпонентных зацеплений.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10.2. *Изотопные (даже кусочно-линейно сингулярно гомотопные) трёхкомпонентные зацепления одновременно зацеплены по модулю 2 или не зацеплены по модулю 2.*

Два набора S_1 и S_2 треугольников находятся в *общем положении*, если контуры треугольников из разных наборов не пересекаются и никакой треугольник одного из них не содержит вершины никакого треугольника из другого. Определим

$$S_1 \cap S_2 := \{\Delta_1 \cap \Delta_2 : \Delta_1 \in S_1, \Delta_2 \in S_2\}.$$

ЗАДАЧА 1.10.3. (а) Пересечение двух 2-циклов в общем положении является 1-циклом.

(b) Пусть S_1 и S_2 — множества треугольников в общем положении, для которых

$$|S_1| \cap |\partial S_2| = |S_2| \cap |\partial S_1| = \emptyset.$$

Тогда $S_1 \cap S_2$ является 1-циклом.

(с) В п. (b) пересечение $|S_1| \cap |S_2|$ не обязательно является телом 1-цикла.

(Подсказка: аналогично замечанию 1.8.3.b.)

(d) (загадка) Пусть $f, g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ являются кусочно-линейными отображениями в общем положении (определите, что это!). Тогда $f^{-1}(g(S^2))$ является телом 1-цикла в S^2 (определите, что это!).

(По п. (a), $f(S^2) \cap g(S^2)$ является телом 1-цикла в \mathbb{R}^3 . Обобщение см. [Al22].)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10.4. *Зацепление (a_1, a_2, a_3) зацеплено по модулю 2 тогда и только тогда, когда узел a_3 зацеплен по модулю 2 с 1-циклом $S_1 \cap S_2$ для некоторых (или, что эквивалентно, для любых) зейфертовых цепей S_1 и S_2 в общем положении, для которых*

$$|S_1| \cap (a_2 \cup a_3) = |S_2| \cap (a_1 \cup a_3) = \emptyset.$$

(Такие зейфертовы цепи существуют по лемме 1.9.4. Пересечение $S_1 \cap S_2$ является 1-циклом по утверждению 1.10.3.b. Зацепленность по модулю 2 для 1-циклов с непересекающимися телами определяется аналогично п. 1.2.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10.5. (a) *Даны два множества M, N точек на окружности, в каждом из которых чётное число точек. Разобьём точки множества M на пары. Возьмём некоторые дуги окружности так, что каждая дуга соединяет точки некоторой пары. Множества M и N называются зацепленными по модулю 2 на окружности, если количество дуг, содержащих нечётное число точек из N , нечётно, т. е. сумма $\sum_a |a \cap N|_2$ по всем дугам a нечётна. Свойство зацепленности по модулю 2 не зависит от выбора разбиения и дуг.*

(b) Пусть $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^3$ — непересекающиеся «вложенные многогранные 2-диски» (например, сингулярные конусы, ограниченные узлами a_1, a_2) в общем положении с a_3 , такие что $a_i = \partial D_i$ для каждого $i = 1, 2$. Тогда для каждого $j = 1, 2$ пересечение $D_j \cap a_3$ состоит из чётного количества точек вне D_{3-j} . Зацепление (a_1, a_2, a_3) зацеплено по модулю 2 тогда и только тогда, когда $D_1 \cap a_3$ и $D_2 \cap a_3$ зацеплены по модулю 2 в a_3 .

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА п. (b). Возьмём зейфертовы цепи S_1, S_2 в общем положении, для которых $|S_1| \cap (a_2 \cup a_3) = |S_2| \cap (a_1 \cup a_3) = \emptyset$. Поскольку a_1, a_2 ограничивают D_1, D_2 , то можно выбрать S_1, S_2 , для которых $S_i \cap D_{3-i} = \emptyset$. Обозначим через C_1 внутренность по модулю 2 (определение аналогично [Sk18, п. 2.2]) 2-цикла $D_1 \cup S_1$. Тогда возьмём $C_1 \cap a_3$ в качестве объединения дуг из (a). Применим лемму о чётности 1.8.2 к a_3 и $D_2 \cup S_2$. Получим, что множества $D_1 \cap a_3$

и $D_2 \cap a_3$ зацеплены по модулю 2 в a_3 тогда и только тогда, когда $|C_1 \cap a_3 \cap D_2|_2 = |a_3 \cap C_1 \cap S_2|_2$ нечётно. Поскольку $C_1 \cap D_2 = \emptyset$, ввиду общности положения имеем

$$\partial(C_1 \cap S_2) = (\partial C_1 \cap S_2) \cup (C_1 \cap \partial S_2) = \partial C_1 \cap S_2 = S_1 \cap S_2.$$

Теперь п. (b) следует из утверждения 1.10.4. Ср. [Ко91, утверждение 3.10]. \square

В оставшейся части раздела (a_1, a_2, a_3) является ориентированным зацеплением с нулевыми попарными коэффициентами зацепления. По лемме 1.9.6 существуют целочисленные зейфертовы цепи S_1, S_2, S_3 узлов a_1, a_2, a_3 , такие что $|S_i| \cap a_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$. Более того, можно взять целочисленные зейфертовы цепи в *тройном общем положении* (оно определяется так же, как для зейфертовых цепей по модулю 2). **Тройным коэффициентом зацепления** $\mu(a_1, a_2, a_3)$ называется сумма знаков тройных точек пересечения:

$$\mu(a_1, a_2, a_3) := \sum_{\substack{\Delta_k \in S_k, k=1,2,3, \\ \Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3 \neq \emptyset}} \text{sgn}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) \in \mathbb{Z},$$

где **знаком** $\text{sgn}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ является знак базиса в \mathbb{R}^3 , образованного тремя векторами нормалей к Δ_k , согласованных с ориентациями на Δ_k по правилу левой руки (левого винта). Это число было введено в 1954–68 гг. Милнором, Хефлигером, Стиром, Масси и, возможно, другими.

ЛЕММА 1.10.6. (a) *Тройной коэффициент зацепления как-то ориентированных колец Борромео равен ± 1 (докажите в предположении п. (b)).*

(b) *Тройной коэффициент зацепления корректно определён, т. е. не зависит от выбора зейфертовых цепей S_1, S_2, S_3 в общем положении.*

(c) *Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ существует трёхкомпонентное зацепление с тройным коэффициентом зацепления n .*

(d) *Тройной коэффициент зацепления аддитивен относительно связной суммы трёхкомпонентных зацеплений.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10.7 (о симметрии). (a) *При перестановке компонент тройной коэффициент зацепления умножается на знак перестановки.*

(b) *При изменении ориентации одной из компонент тройной коэффициент зацепления меняет знак.*

(c) *При зеркальной симметрии тройной коэффициент зацепления меняет знак.*

Предложение 1.10.8. *Изотопные (даже кусочно-линейно сингулярно-гомотопные) трёхкомпонентные зацепления имеют равные тройные коэффициенты зацепления.*

Оставшиеся задачи этого пункта могут быть непросты для начинающего.

Задача 1.10.9. (а) Зацепление (a_1, a_2, a_3) сингулярно гомотопно тривиальному зацеплению, если $\mu(a_1, a_2, a_3) = 0$.

(б) Два ориентированных зацепления a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 с нулевыми попарными коэффициентами зацепления сингулярно гомотопны, если $\mu(a_1, a_2, a_3) = \mu(b_1, b_2, b_3)$.

(Используйте, что «конкордантность влечёт сингулярную гомотопность для зацеплений».)

Задача 1.10.10 (о высшем коэффициенте зацепления). (Вы можете начать изучение этого материала с его аналога по модулю 2.) Пусть (a, b) является ориентированным двухкомпонентным зацеплением, для которого $\text{lk}(a, b) = 0$. По утверждению 1.9.5.b, существуют целочисленные зейфертовы цепи S_a узла a и S_b узла b , для которых $|S_a| \cap b = \emptyset = a \cap |S_b|$. Можем считать, что S_a и S_b находятся в общем положении. Тогда аналогично задаче 1.10.3.b пересечение $S_a \cap S_b$ является целочисленным 1-циклом. Каждый ориентированный отрезок MN целочисленного 1-цикла $S_a \cap S_b$ содержится в треугольнике Δ_{MN} из S_a . Перенесём MN на маленький вектор, касательный к Δ_{MN} и образующий вместе с MN положительный базис в Δ_{MN} . Эти маленькие векторы можно выбрать так, чтобы после всех переносов получился целочисленный 1-цикл s' . Определим число Сато — Левина как $\text{lk}(S_a \cap S_b, s')$.

(а) Число Сато — Левина корректно определено, т. е. не зависит от целочисленных зейфертовых цепей S_a и S_b общего положения, а также от достаточно малого сдвига $S_a \cap S_b$ вдоль S_a .

(б) Найдите числа Сато — Левина зацепления на рис. 1.2.2.w, а также последних двух зацеплений на рис. 1.2.1 (возьмите ориентацию на ваш выбор).

(с) Для каждого чётного n существует зацепление с числом Сато — Левина, равным n .

(d) Как при перестановке компонент меняется число Сато — Левина?

(е) Как при изменении ориентации одной из компонент меняется число Сато — Левина?

(f) Как при зеркальной симметрии меняется число Сато — Левина?

(g) Изотопные зацепления имеют одинаковые числа Сато — Левина (это неверно для сингулярно гомотопных зацеплений).

(h) Верно ли, что число Сато — Левина зацепления $(a_1, a_2 \# a_3)$ равно $\pm 2\mu(a_1, a_2, a_3)$?

§ 2. ЗАЦЕПЛЕННОСТЬ В ЧЕТЫРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. КАК РАБОТАТЬ С ЧЕТЫРЁХМЕРНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ?

Задача 2.1.1. Сколько точек может быть в пересечении прямой и плоскости в трёхмерном пространстве?

Задача 2.1.2. Сколько решений может быть у системы линейных уравнений: (a) 2×2 ; (b) 2×3 (2 уравнения, 3 переменных); (c) 3×2 ?

Определим

- *прямую* как множество действительных чисел;
- *плоскость* \mathbb{R}^2 как множество всех упорядоченных пар (x, y) действительных чисел;
- (*трёхмерное*) *пространство* \mathbb{R}^3 как множество всех упорядоченных троек (x, y, z) действительных чисел;
- *четырёхмерное пространство* \mathbb{R}^4 как множество всех упорядоченных четвёрок (x, y, z, t) действительных чисел.

Определение d -мерного пространства \mathbb{R}^d для $d > 4$ даётся аналогично.

Напутствие. В планиметрии и стереометрии обычно только простейшие свойства выводятся из аналитических определений (или же принимаются за аксиомы). Более сложные свойства могут быть выведены из простейших «синтетически» (т. е. как в школьной геометрии, без использования аналитических определений). Часто бывает удобно свести двумерную задачу к одномерной (т. е. к задаче на прямой), а трёхмерную задачу — к двумерной. Аналогично удачный подход к четырёхмерным задачам — это аналогия с трёхмерными задачами или сведение к ним.

Для точек $A = (x_1, y_1, z_1, t_1), B = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}$ обозначим

$$\lambda A := (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1, \lambda t_1) \quad \text{и} \quad A + B := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2).$$

Задача 2.1.3. Разбивает ли двумерная плоскость четырёхмерное пространство на куски? То есть для любых ли двух точек, не лежащих в двумерной плоскости $x = y = 0$ четырёхмерного пространства

(x, y, z, t) , существует ломаная, соединяющая эти точки и не пересекающая плоскость?

Для точек $A, B \in \mathbb{R}^4$ отрезком AB называется множество

$$\{\lambda A + (1 - \lambda)B : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Ломаной $A_1 A_2 \dots A_n$ называется объединение отрезков $A_i A_{i+1}$ по всем $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Указание. Для точек $A = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ и B , не лежащих на плоскости $x = y = 0$, определим точки

$$A_x = A + (1, 0, 0, 0) = (x_0 + 1, y_0, z_0, t_0)$$

и

$$A_y = A + (0, 1, 0, 0) = (x_0, y_0 + 1, z_0, t_0).$$

Докажите, что хотя бы одна из ломаных AB , $AA_x B$ и $AA_y B$ не пересекает плоскость $x = y = 0$.

Задача 2.1.4. Чем является пересечение двумерной сферы

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

со следующими множествами:

- (а) прямая $x = y = 0$, содержащая центр сферы;
- (б) плоскость $x = 0$, содержащая центр сферы;
- (с) пересечение неотрицательного октанта в \mathbb{R}^3 и объединения двумерных координатных плоскостей, т. е. множество

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ и } xyz = 0\}.$$

Задача 2.1.5. Чем является пересечение трёхмерной сферы

$$S^3 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$$

со следующими множествами:

- (а) прямая $x = y = z = 0$, содержащая центр сферы;
- (б) плоскость $x = y = 0$, содержащая центр сферы;
- (с) (трёхмерная) гиперплоскость $x = 0$, содержащая центр сферы;
- (д) пересечение неотрицательной «одной шестнадцатой» \mathbb{R}^4 и объединения двумерных координатных плоскостей, т. е. множество

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, t \geq 0 \\ \text{и хотя бы два из четырёх чисел } x, y, z, t \text{ равны нулю}\}.$$

Подмножество $L \subset \mathbb{R}^4$ называется **прямой**, если L не является точкой и найдутся точки $A, B \in \mathbb{R}^4$, для которых $L = \{A + Bt : t \in \mathbb{R}\}$.

Подмножество $L \subset \mathbb{R}^4$ называется (двумерной) **плоскостью**, если L не является ни точкой, ни прямой, и найдутся точки $A, B, C \in \mathbb{R}^4$, для которых $L = \{A + Bt + Cu : t, u \in \mathbb{R}\}$.

Задача 2.1.6. Напишите аналогичное определение (трёхмерной) **гиперплоскости** в \mathbb{R}^4 .

В решениях следующих задач вы можете использовать без доказательств результаты задачи 2.1.7, а также все строго сформулированные вами верные факты о решениях систем линейных уравнений.

Задача 2.1.7. (а) Подмножество $L \subset \mathbb{R}^4$ является гиперплоскостью тогда и только тогда, когда $L \neq \emptyset$, $L \neq \mathbb{R}^4$ и существуют $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, для которых $L = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : ax + by + cz + dt = e\}$.

(б) Подмножество $L \subset \mathbb{R}^4$ является плоскостью тогда и только тогда, когда $L \neq \emptyset$, $L \neq \mathbb{R}^4$, L не является гиперплоскостью и существуют $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, a_2, b_2, c_2, d_2, e_2 \in \mathbb{R}$, для которых

$$L = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = e_1, a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = e_2\}.$$

(с) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для прямой в \mathbb{R}^4 .

Задача 2.1.8. Чем может быть пересечение в \mathbb{R}^4 :

- (а) прямой и гиперплоскости?
- (б) прямой и плоскости?
- (с) плоскости и гиперплоскости?
- (д) двух гиперплоскостей?
- (е) двух плоскостей?

Указание к п. (а). Ответ. Пустое множество, точка, прямая.

Примеры. Прямая $x = y = z = 0$ пересекается с гиперплоскостью $x = 1$ по пустому множеству. Прямая $x = y = z = 0$ пересекается с гиперплоскостью $t = 0$ по точке. Прямая $x = y = z = 0$ пересекается с гиперплоскостью $x = 0$ по прямой.

Доказательство того, что другие пересечения невозможны. Достаточно доказать, что если пересечение в \mathbb{R}^4 прямой l и гиперплоскости содержит хотя бы две точки, то пересечение совпадает с прямой l . Это верно, так как для любых двух точек существует единственная прямая, содержащая обе эти точки. Последний факт легко выводится из определения прямой. (Во многих других изложениях этот факт принимается за аксиому.)

Задача 2.1.9. Для различных точек $X, Y \in \mathbb{R}^4$ определим прямую $X Y$ как $\{X + (Y - X)t = (1 - t)X + tY : t \in \mathbb{R}\}$. Для точек $X, Y, Z \in \mathbb{R}^4$,

не лежащих на одной прямой, определим плоскость XYZ как

$$\{X + (Y - X)t + (Z - X)u = (1 - t - u)X + tY + uZ : t, u \in \mathbb{R}\}.$$

Никакие пять из восьми точек 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 в \mathbb{R}^4 не лежат на одной гиперплоскости. Чем может быть пересечение:

- (b) прямой 12 и плоскости 567?
- (d) гиперплоскостей 1234 и 5678?
- (e) плоскостей 123 и 567?

Ответы.

2.1.1. 0, если прямая и плоскость параллельны; 1, если прямая пересекает плоскость; ∞ , если прямая лежит в плоскости.

2.1.4. (a) Пара точек $(0, 0, 1)$ и $(0, 0, -1)$.

(b) Окружность $\begin{cases} x = 0, \\ y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$

(c) Объединение четвертей трёх окружностей:

$$\begin{cases} x = 0, & y \geq 0, & z \geq 0, \\ y^2 + z^2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, & x \geq 0, & z \geq 0, \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0, & x \geq 0, & y \geq 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

2.1.5. (a) Пара точек $(0, 0, 0, 1)$ и $(0, 0, 0, -1)$.

(b) Окружность $\begin{cases} x = y = 0, \\ z^2 + t^2 = 1. \end{cases}$ (c) Сфера $\begin{cases} x = 0, \\ y^2 + z^2 + t^2 = 1. \end{cases}$

(d) Граф K_4 , образованный объединением четвертей шести окружностей, одна из которых — $\begin{cases} x = y = 0, & z \geq 0, & t \geq 0, \\ z^2 + t^2 = 1. \end{cases}$

2.1.8. (b) Пустое множество, точка (если прямая пересекает плоскость), прямая (если прямая содержится в плоскости).

(c) Пустое множество, прямая (если плоскость пересекает гиперплоскость), плоскость (если плоскость содержится в гиперплоскости).

(d) Пустое множество, плоскость (если гиперплоскости пересекаются), гиперплоскость (если гиперплоскости совпадают).

(e) Пустое множество, точка или прямая (если плоскости пересекаются), плоскость (если плоскости совпадают).

2.1.9. (b) Пустое множество. (d) Плоскость или пустое множество. (e) Точка или пустое множество.

2.2. Зацепленность симплексов

Если никакие пять из шести вершин двух треугольников в \mathbb{R}^4 не лежат в одной (трёхмерной) гиперплоскости, то контур первого не пересекает второй (это следует из ответа к задаче 2.1.9.a).

Определения конуса и сингулярного конуса приведены в замечании 1.2.8.

ЛЕММА 2.2.1. *Если контуры двух треугольников в \mathbb{R}^4 не пересекаются, то конус с некоторой вершиной над одним из контуров не пересекает другой контур.*

Это означает, что треугольники в \mathbb{R}^4 «не зацеплены».

Треугольник и тетраэдр в \mathbb{R}^4 , никакие пять из семи вершин которых не лежат в одной гиперплоскости, называются *зацепленными*, если треугольник пересекает поверхность тетраэдра ровно в одной точке.

ПРИМЕР 2.2.2. Существуют зацепленные треугольник и тетраэдр в \mathbb{R}^4 , никакие пять из семи вершин которых не лежат в одной гиперплоскости.

Подсказка. Используйте понижение размерности или [Sk16h, Example 2.1].

Задача 2.2.3 (ср. утверждение 1.1.1). Обозначим через Δ и τ выпуклые оболочки треугольника и тетраэдра в \mathbb{R}^4 . Если $\partial\Delta \cap \partial\tau = \emptyset$, то следующие условия равносильны:

(1) $\Delta \cap \partial\tau \neq \emptyset \neq \partial\Delta \cap \tau$;

(2) пересечение $\Delta \cap \tau$ есть отрезок, один конец которого лежит на контуре треугольника, а другой — на поверхности тетраэдра;

(3) пересечение $\partial\Delta \cap \tau$ есть одна точка, и два отрезка контура $\partial\Delta$, выходящие из этой точки, находятся по разные стороны от гиперплоскости тетраэдра τ ;

(3') пересечение $\Delta \cap \partial\tau$ есть одна точка, и маленькую трёхмерную сферу с центром в этой точке Δ и $\partial\tau$ пересекают по замкнутому ломаным, *зацепленным* в этой сфере;

(4) плоскость треугольника пересекает τ по отрезку, один конец которого лежит в Δ , а другой — нет;

(4') гиперплоскость тетраэдра пересекает Δ по отрезку, один конец которого лежит в τ , а другой — нет;

(5) прямая пересечения плоскости треугольника и гиперплоскости тетраэдра пересекает каждый из них по паре точек, и эти пары чередуются на прямой.

Задача 2.2.4. Возьмём любые семь точек в четырёхмерном пространстве, никакие пять из которых не лежат в одной гиперплоскости, а также треугольник T , вершинами которого являются три из них.

(а) Пусть никакие два треугольника, образованные точками из семи данных, отличные от T и не имеющие общих вершин, не пере-

секаются (ср. [Sk, пример 6.2.1.f]). Тогда T зацеплен с тетраэдром, образованным оставшимися четырьмя из семи точек.

(b), (c), (d) Попробуйте догадаться до утверждений, аналогичных п. (a) и задаче 1.1.5!

Подсказка. Утверждения (a), (b), (c), (d) следуют из количественной линейной теоремы ван Кампена — Флореса [Sk14, теорема 1.5']. Ср. [Sk18, утверждения 1.7.1 и 1.7.2].

Зацеплением симплексов (возможно, имеющих разные размерности) в \mathbb{R}^d называется набор невырожденных симплексов в \mathbb{R}^d , границы которых попарно не пересекаются. *Тривиальность* зацепления симплексов определяется аналогично случаю треугольников в пространстве (п. 1.4).

Пусть $(\Delta, Z * \delta)$ — зацепление двух симплексов, а Z' — точка вне гиперплоскости симплекса δ , для которой $\partial\Delta$ не пересекает ни одного из отрезков, соединяющих некоторую точку отрезка ZZ' с некоторой точкой границы $\partial\delta$. Тогда *элементарной комбинаторной изотопией* назовём замену $Z * \delta$ на $Z' * \delta$. *Элементарной комбинаторной изотопией* назовём также аналогичное преобразование первого симплекса при неизменном втором. Два зацепления симплексов назовём *комбинаторно изотопными*, если их можно соединить последовательностью зацеплений симплексов, в которой соседние получаются друг из друга элементарной комбинаторной изотопией.

По лемме 2.2.1 любое зацепление двух треугольников в \mathbb{R}^4 комбинаторно изотопно тривиальному. То же справедливо для зацепления любого количества треугольников.

Задача 2.2.5. (a) Комбинаторно изотопные зацепления треугольника и тетраэдра в \mathbb{R}^4 одновременно зацеплены или не зацеплены.

(b) Если треугольник и тетраэдр в \mathbb{R}^4 не зацеплены, то образованное ими зацепление комбинаторно изотопно тривиальному зацеплению.

Утверждение (a) означает, что существуют два зацепления треугольника и тетраэдра в \mathbb{R}^4 , не являющиеся комбинаторно изотопными: тривиальное и пара из зацепленных треугольника и тетраэдра.

Гипотеза 2.2.6 (ср. утверждение 1.5.1.c). *Любые две пары зацепленных треугольника и тетраэдра в \mathbb{R}^4 комбинаторно изотопны.*

Гипотеза 2.2.6 означает, что существуют два зацепления треугольника и тетраэдра в \mathbb{R}^4 (тривиальное и зацепление из примера 2.2.2), для которых любое такое зацепление комбинаторно изотопно одному из них. Ввиду утверждения 2.2.5.a эти два зацепления не являются

комбинаторно изотопными. Гипотеза 2.2.6 также означает, что треугольник и тетраэдр в \mathbb{R}^4 зацеплены тогда и только тогда, когда они зацеплены по модулю 2 (см. следующий пункт).

По-видимому, доказательство гипотез 2.2.6 и 2.2.8 несложно вытекает из свойства 2.2.3.(2) и его многомерного аналога.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.7. (а) Если $d \geq k + l$ и поверхности k -мерного и l -мерного симплексов в \mathbb{R}^d не пересекаются, то конус с некоторой вершиной над одной из поверхностей не пересекает другую поверхность.

(б) При любых k, l существует зацепление k -мерного и l -мерного симплексов в \mathbb{R}^{k+l-1} , не являющееся комбинаторно изотопным тривиальному.

(с) Если $k, l < d < k + l - 1$, то любое зацепление k -мерного и l -мерного симплексов в \mathbb{R}^d комбинаторно изотопно тривиальному.

Утверждение (а) означает, что любое зацепление k -мерного и l -мерного симплексов в \mathbb{R}^d комбинаторно изотопно тривиальному.

ГИПОТЕЗА 2.2.8. При любых k, l существуют два зацепления k -мерного и l -мерного симплексов в \mathbb{R}^{k+l-1} , для которых любое зацепление таких симплексов комбинаторно изотопно одному из них.

2.3. ЗАЦЕПЛЕННОСТЬ ЛОМАНЫХ И ДВУМЕРНЫХ «МНОГОГРАННИКОВ»

ЛЕММА 2.3.1 (ср. лемму 2.2.1). (а) Для любых двух замкнутых непересекающихся ломаных в \mathbb{R}^4 некоторый сингулярный конус над одной из них не пересекает другую.

(б) Для любой замкнутой несамопересекающейся ломаной в \mathbb{R}^4 некоторый сингулярный конус над ней является конусом.

(с) Для любых двух замкнутых непересекающихся несамопересекающихся ломаных в \mathbb{R}^4 некоторый сингулярный конус над одной из них не пересекает другую и является конусом.

Подсказка к п. (б). Для каждой пары различных отрезков возьмите аффинное подпространство (т. е. гиперплоскость, плоскость или прямую), натянутое на эту пару. Возьмите точку в \mathbb{R}^4 , лежащую вне объединения таких подпространств.

Одномерные узлы и зацепления в \mathbb{R}^d , а также их тривиальность и изотопность, определяются аналогично случаю $d = 3$ (п. 1.4, ср. определения в [Sk18, п. 1.6], [Is]). Леммы 2.3.1.бс показывают, что

- любой узел в \mathbb{R}^4 изотопен контуру треугольника;
- любое двухкомпонентное зацепление в \mathbb{R}^4 изотопно тривиальному.

Аналоги этих лемм и утверждений справедливы для зацеплений из любого количества компонент, для ориентированных зацеплений, а также в \mathbb{R}^d при любом $d > 3$.

Определения 1-цикла и 2-цикла (по модулю 2 и целочисленных) в \mathbb{R}^4 , а также их тел, аналогичны случаю плоскости и пространства, см. п. 1.8.

Определение зацепленности по модулю 2 для 1-цикла и 2-цикла по модулю 2 в \mathbb{R}^4 с непересекающимися телами аналогично определению из п. 1.2. Ввиду примера 2.2.2 существуют 1-цикл и 2-цикл по модулю 2 в \mathbb{R}^4 , зацепленные по модулю 2.

Задача 2.3.2 (загадка). Придумайте и докажите (или опровергните) аналоги лемм 1.2.2.ab и 1.2.4.ab для 1-цикла и 2-цикла по модулю 2 в \mathbb{R}^4 . (По поводу аналога теоремы 1.2.9.a см. [Sk14, § 2.6] и [St24].)

Для задачи 2.3.2 нужна лемма о чётности 2.3.4.c. Начнём с яркого частного случая.

Задача 2.3.3 (ср. с утверждениями [Sk18, 1.3.4.a] и 1.8.5). В \mathbb{R}^4 имеется 16 точек: 8 красных и 8 жёлтых. Никакие пять из них не лежат в одной гиперплоскости. Тогда количество пар (Δ, Δ') пересекающихся красных (т. е. натянутых на красные точки) треугольников Δ и жёлтых треугольников Δ' чётно.

Два набора треугольников в \mathbb{R}^4 находятся в общем положении, если никакой треугольник одного из них не пересекает контур никакого треугольника из другого.

Лемма 2.3.4 (о чётности; ср. леммы о чётности [Sk18, 1.3.3] и 1.2.5, 1.8.2). (а) Если никакие пять из восьми вершин двух тетраэдров в \mathbb{R}^4 не лежат в одной гиперплоскости, то поверхности этих тетраэдров пересекаются в чётном числе точек.

(б) Если среди вершин двух 2-циклов по модулю 2 в \mathbb{R}^4 никакие пять не лежат в одной гиперплоскости и никакие три треугольника, натянутые на эти вершины, не имеют общей внутренней точки, то тела этих 2-циклов пересекаются в чётном числе точек.

(с) Если два 2-цикла по модулю 2 в \mathbb{R}^4 находятся в общем положении, то количество пар (Δ, Δ') пересекающихся треугольников Δ и Δ' соответственно первого и второго 2-цикла, чётно.

Указание. Доказательство аналогично доказательству леммы о чётности 1.8.2. Для утверждения (а) рассмотрите пересечение выпуклых оболочек тетраэдров.

Пара треугольников в \mathbb{R}^4 называется *трансверсальной*, если базис e_1, e_2 плоскости первого треугольника вместе с базисом f_1, f_2 плоскости второго треугольника образуют базис e_1, e_2, f_1, f_2 пространства \mathbb{R}^4 . Знаком $\text{sgn } X$ точки пересечения X трансверсальной пары ориентированных треугольников в \mathbb{R}^4 называется число $+1$, если положительный базис e_1, e_2 первого треугольника вместе с положительным базисом f_1, f_2 второго треугольника образуют положительный базис e_1, e_2, f_1, f_2 пространства \mathbb{R}^4 , и число -1 в противном случае.

Задача 2.3.5. Знак точки пересечения трансверсальной пары ориентированных треугольников в \mathbb{R}^4 не меняется при перестановке треугольников в паре (ср. утверждение [Sk18, 1.5.9.a]).

Задача 2.3.6. Определение *коэффициента зацепления* для целочисленных 1-цикла и 2-цикла в \mathbb{R}^4 с непересекающимися телами аналогично определению из п. 1.3.

(а) Для любого $n \in \mathbb{Z}$ существуют целочисленные 1-цикл и 2-цикл в \mathbb{R}^4 , коэффициент зацепления которых равен n .

(б) (загадка) Аналогии каких утверждений п. 1.3 верны для целочисленных 1-цикла и 2-цикла в \mathbb{R}^4 ?

Лемма 2.3.7 (о тривиальности). Если два целочисленных 2-цикла в \mathbb{R}^4 находятся в общем положении, то сумма знаков точек пересечения по всем парам (Δ, Δ') пересекающихся треугольников соответственно первого и второго 2-цикла, равна нулю.

Пример 2.3.8 (ср. пример 1.4.5). Рассмотрим зацепление Уайтхеда в \mathbb{R}^3 (рис. 1.2.2.w и предпоследнее зацепление на рис. 1.2.1). Рассмотрим \mathbb{R}^3 как гиперплоскость в \mathbb{R}^4 . Построим объединение двух конусов над его первой компонентой, вершины которых лежат по разные стороны от гиперплоскости. Это объединение и вторая компонента зацепления Уайтхеда образуют зацепленные замкнутую ломаную и «вложенную многогранную двумерную сферу», коэффициент зацепления которых равен нулю (при любой их ориентации).

Пример 2.3.9. Рассмотрим кольца Борромео в \mathbb{R}^3 (пример 1.7.1.a), заданные уравнениями. Рассмотрим \mathbb{R}^3 как гиперплоскость $t = 0$ в \mathbb{R}^4 . Возьмём двумерные эллипсоиды в \mathbb{R}^4 , заданные уравнениями

$$\begin{cases} y = 0, \\ z^2 + 2x^2 + 2t^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + 2y^2 + 1.5t^2 = 1. \end{cases}$$

Эти два эллипсоида вместе с первым кольцом Борромео попарно не пересекаются (ибо на пересечении эллипсоидов имеем $2x^2 + 2t^2 = 1 =$

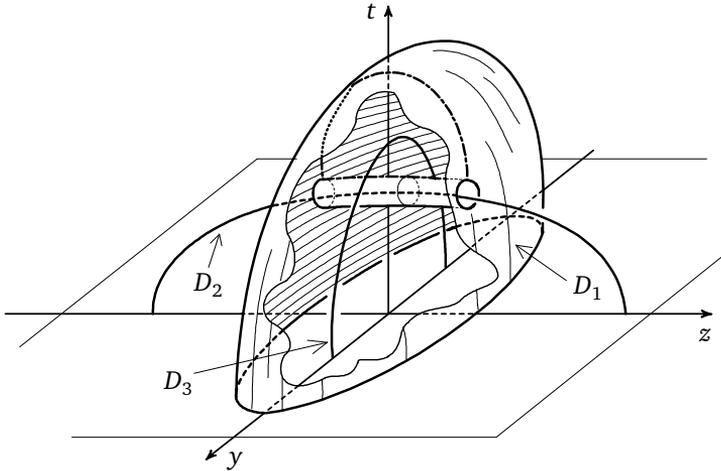


Рис. 2.3.1. Три полуэллипсоида D_1, D_2, D_3 в \mathbb{R}_+^4 , ограниченные кольцами Борромео. Изображено сечение гиперплоскостью $x = 0$. Кольца Борромео пересекают гиперплоскость по двум парам точек (одна на оси y , другая на оси z) и эллипсу (в плоскости yz). Полуэллипсоиды пересекают гиперплоскость по двум полуэллипсам и полуэллипсоиду. Показано, как полуэллипсоид D_1 превратить приклеиванием ручки в тор с вырезанным диском

$= x^2 + 1.5t^2$; рис. 2.3.1). Из них любые два объекта без третьего «не зацеплены» (т. е. один эллипсоид ограничивает трёхмерный «шар», не пересекающий другой эллипсоид, и не пересекает некоторый двумерный «диск», ограниченный первым кольцом Борромео). Все три объекта вместе зацеплены (т. е. изотопны объединению объектов, лежащих в непересекающихся шарах).

В высших размерностях существуют заузленные сферы и зацепления из сфер — в частности, «сферы Борромео», аналогичные примерам 1.7.1.a и 2.3.9. О классификации многомерных узлов и зацеплений см. [Sk, пример 6.13.5], [Sk06, § 3], [Sk16h, Sk16s].

2.4. Коэффициенты зацепления как пересечения в \mathbb{R}^4

Обозначим через $\mathbb{R}_+^4 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : t \geq 0\}$ четырёхмерное полупространство.

Аналогично случаю трёхмерного пространства (п. 1.8) определяются

- общность положения двух наборов треугольников в \mathbb{R}^4 ;
- алгебраическое число пересечений $A \cdot B$ двух наборов A, B треугольников в \mathbb{R}^4 , находящихся в общем положении.

ЛЕММА 2.4.1. Пусть компоненты a, b зацепления в \mathbb{R}^3 ограничивают зейфертовы цепи A, B общего положения в \mathbb{R}_+^4 .

(а) Зацепление зацеплено по модулю 2 тогда и только тогда, когда $|A \cap B|$ чётно.

(б) Если a, A и b, B ориентированы согласованно, то $\text{lk}(a, b) = A \cdot B$.

В частности, если зейфертовы цепи не пересекаются, то ломаные имеют нулевой коэффициент зацепления.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА УТВЕРЖДЕНИЯ (б). Обозначим через $A' \subset \mathbb{R}_+^4$ ориентированный диск (например, конус), ограниченный ломаной a . Обозначим через $B' \subset \mathbb{R}^3$ целочисленную зейфертову цепь ломаной b , находящуюся в общем положении с a . Имеем $A' \cap (B \cup |B'|) = \emptyset$, поэтому

$$(A \cup A') \cap (B \cup |B'|) = (A \cap B) \cup (a \cap |B'|).$$

Обозначим теми же буквами целочисленные цепи, носителями которых являются a, A, A', B . Тогда по лемме о тривиальности 2.3.7

$$\text{lk}(a, b) = a \cdot B' = A \cdot B - (A - A') \cdot (B - B') = A \cdot B. \quad \square$$

ПРИМЕР 2.4.2 (см. рис. 2.3.1). Существуют полуэллипсоиды $D_1, D_2, D_3 \subset \mathbb{R}_+^4$ «общего положения», ограниченные кольцами Борромео («зейфертовы»), для которых $D_1 \cap D_3 = D_2 \cap D_3 = \emptyset$, а $D_1 \cap D_2$ является парой точек.

ПОСТРОЕНИЕ. Возьмём полуэллипсоиды $D_1, D_2, D_3 \subset \mathbb{R}_+^4$, заданные уравнениями

$$\begin{cases} x = 0, \\ y^2 + 2z^2 + t^2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ z^2 + 2x^2 + 2t^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + 2y^2 + 1.5t^2 = 1. \end{cases}$$

соответственно. Эти полуэллипсоиды ограничены кольцами Борромео. На пересечении $D_1 \cap D_3$ имеем $y^2 + t^2 = 2y^2 + 1.5t^2 = 1$, следовательно, $D_1 \cap D_3 = \emptyset$. Аналогично $D_2 \cap D_3 = \emptyset$. Множество $D_1 \cap D_2$ является парой точек

$$\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

(Превратив полуэллипсоид D_1 в проколотый тор приклеиванием ручки, см. рис. 2.3.1, получим попарно непересекающиеся зейфертовы цепи в \mathbb{R}_+^4 , ограниченные кольцами Борромео.) \square

Пусть P и Q являются точками пересечения внутренностей кусочно-линейно вложенных 2-дисков $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^4$ в общем положении. Соединим P и Q дугами $l_1 \subset D_1$ и $l_2 \subset D_2$, не содержащими точек пересечения,

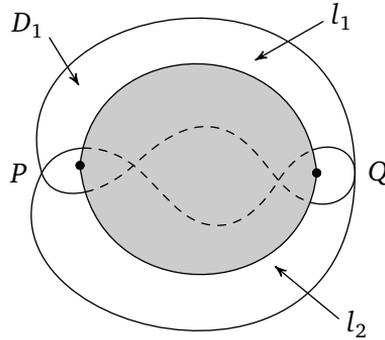


Рис. 2.4.1. Диск Уитни

отличных от D_1 и D_2 (рис. 2.4.1). *Диск Уитни* (чёрный на рис. 2.4.1) — вложенный в \mathbb{R}^4 2-диск общего положения, границей которого является $l_1 \cup l_2$. Такой диск существует по лемме 2.3.1.b.

ПРИМЕР 2.4.3. Для двух точек пересечения $D_1 \cap D_2$ из построения примера 2.4.2 существует диск Уитни, пересекающий D_3 ровно в одной точке.

ПОСТРОЕНИЕ. Используем диски из построения примера 2.4.2. Пара точек $D_1 \cap D_2$ ограничивает в D_1 и в D_2 дуги l_1 и l_2 , заданные уравнениями

$$\begin{cases} x = y = 0, \\ z^2 \leq \frac{1}{3}, \\ 2z^2 + t^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = y = 0, \\ z^2 \leq \frac{1}{3}, \\ z^2 + 2t^2 = 1. \end{cases}$$

Объединение этих дуг ограничивает в \mathbb{R}_+^4 диск (Уитни) D , заданный уравнениями

$$\begin{cases} x = y = 0, \\ z^2 \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1-z^2}{2} \leq t^2 \leq 1 - 2z^2. \end{cases}$$

Легко проверить, что $D \cap D_3 = \{(0, 0, 0, \sqrt{2/3})\}$. □

ЛЕММА 2.4.4. Пусть $D_1, D_2, D_3 \subset \mathbb{R}_+^4$, $i = 1, 2, 3$, являются собственными зейфертовыми дисками общего положения для зацепления $L := (\partial D_1, \partial D_2, \partial D_3)$. (Собственные означает $\text{Int } D_i \cap \mathbb{R}^3 = \emptyset$.)

(а) (Ср. задачу 1.10.5.) Пусть зацепление L попарно не зацеплено по модулю 2. Тогда по лемме 2.4.1.a число $|D_i \cap D_j|$ чётно. Поэтому

можно разбить точки пересечения $D_i \cap D_j$ на пары. Возьмём дизъюнктное объединение W_{ij} дисков Уитни «общего положения», соответствующих этому разбиению. Зацепление зацеплено по модулю 2 тогда и только тогда, когда $|W_{12} \cap D_3| + |W_{23} \cap D_1| + |W_{31} \cap D_2|$ нечётно.

(б) (Ср. [AK21, определение 4.4].) Пусть попарные коэффициенты зацепления компонент нулевые. Выберем ориентации на дисках и соответствующие ориентации на компонентах зацепления. Тогда $D_i \cdot D_j = 0$ по лемме 2.4.1.b. Поэтому можно разбить точки пересечения $D_i \cap D_j$ на пары точек с разными знаками. Возьмём дизъюнктное объединение $W_{ij} = W_{(i,j)}$ дисков Уитни, соответствующих этому разбиению. На каждом диске из W_{ij} выберем ту ориентацию, которая задаёт на граничной окружности диска направление от отрицательной точки пересечения к положительной вдоль D_i , а вдоль D_j наоборот. Тогда

$$\mu(L) = W_{12} \cdot D_3 + W_{23} \cdot D_1 + W_{31} \cdot D_2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4.5 (об орнаментах; [AMS+]). Обозначим через $S = S_1 \sqcup \dots \sqcup S_r$ дизъюнктное объединение r копий сферы S^n , а через $D = D_1 \sqcup \dots \sqcup D_r$ дизъюнктное объединение r копий диска D^{n+1} ; размерности объединений S, D ясны из контекста. Назовём r -компонентным n -орнаментом в S^d кусочно-линейное отображение $f: S \rightarrow S^d$ общего положения (см. определение в [RS72]), такое что $fS_1 \cap \dots \cap fS_r = \emptyset$.

Пусть $r \geq 2$ и f является r -компонентным $(k(r-1) - 1)$ -мерным орнаментом в S^{kr-1} . Продолжим f до кусочно-линейного отображения $g: D \rightarrow B^{kr}$ общего положения (продолжение строится, например, при помощи построения конуса над каждым $f|_{S_i}$ с вершиной во внутренней точке шара B^{kr} , причём берётся своя вершина для каждой компоненты). Определим коэффициент r -зацепления по модулю 2 отображения f как $\text{lk}_2 f := |gD_1 \cap \dots \cap gD_r|_2 \in \mathbb{Z}_2$. Это обобщение коэффициента зацепления (он получается для $r = 2$, см. лемму 2.4.1) и μ -инварианта [FT77] (он получается для $r = 3$ и $k = 1$).

(а) Тогда $\text{lk}_2 f$ корректно определён, т. е. не зависит от выбора продолжения g .

(б) Обозначим $I := [0, 1]$. Конкордантностью орнамента является отображение $F: S \times I \rightarrow S^d \times I$, такое что

$$F(\cdot, t) \subset S^d \times \{t\} \quad \text{для каждого } t \in \{0, 1\}$$

и

$$F(S_1 \times I) \cap F(S_2 \times I) \cap \dots \cap F(S_r \times I) = \emptyset.$$

Тогда $\text{lk}_2 f$ является инвариантом конкордантности орнамента.

(с) Для $r = 3$ и $k = 1$ верно ли, что $\text{lk}_2 f = |fS_1 \cap fS_2 \cap \text{Int}_2 fS_3|_2$?

(d) Аналогично определяется коэффициент r -зацепления $\text{lk } f \in \mathbb{Z}$ как сумма знаков точек в пересечении $gD_1 \cap \dots \cap gD_r$.

Если f ограничивает отображение $g : D \rightarrow B^{kr}$, такое что $gD_1 \cap \dots \cap gD_r = \emptyset$, то $\text{lk } f = 0$.

Обратное верно для каждого $k \geq 2$ [AMS+, теорема 1.13.a].

Для $k = 1$ обратное очевидно при $r = 2$ и неверно ни для какого $r \geq 3$ [AMS+, теорема 1.10].

Коэффициент r -зацепления определяет биекцию между \mathbb{Z} и множеством классов конкордантности r -компонентных $(k(r-1)-1)$ -мерных орнаментов в S^{kr-1} для каждого $r, k \geq 2$ [AMS+, теорема 1.13.a].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

В этом списке звёздочками отмечены книги, обзоры и популярные статьи.

- [AK21] Arone G., Krushkal V. Embedding obstructions in \mathbb{R}^d from the Goodwillie — Weiss calculus and Whitney disks. arXiv:2101.10995.
- [Al22] Alkin E. Hardness of almost embedding simplicial complexes in \mathbb{R}^d , II. arXiv:2206.13486.
- [AMS+] Avvakumov S., Mabillard I., Skopenkov A., Wagner U. Eliminating Higher-Multiplicity Intersections, III. Codimension 2 // Israel J. Math. 2021. Vol. 245. P. 501–534. arxiv:1511.03501.
- [BE82] * Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. М.: Наука, 1982.
- [BL] https://en.wikipedia.org/wiki/Brunnian_link.
- [BL4] Students form a 4-component Brunnian link. <http://www.mccme.ru/circles/oim/foto2014/brunn4.png> (5Mb).
- [CKS+] * New ways of weaving baskets, presented by G. Chelnokov, Yu. Kudryashov, A. Skopenkov and A. Sossinsky. <http://www.turgor.ru/lktg/2004/lines.en/index.htm>.
- [DMN+] * Дженджер С., Мирошников А., Никитенко О., Скопенков А. Циклы в графах и в гиперграфах. https://www.mccme.ru/circles/oim/cyclesg_jour.pdf.
- [FT77] Fenn R., Taylor P. Introducing doodles // Topology of Low-Dimensional Manifolds. Proceedings of the Second Sussex Conference (Chelwood Gate, 1977). Berlin: Springer, 1979. (Lecture Notes in Math.; Vol. 722). P. 37–43.
- [GSS+] * Projections of skew lines, presented by A. Gaifullin, A. Shapovalov, A. Skopenkov and M. Skopenkov. <http://www.turgor.ru/lktg/2001/index.php>.

- [HC19] * *Clemens C. Herbert*. Two-Dimensional Geometries. A Problem-Solving Approach. Providence, RI: AMS, 2019.
- [Is] * <http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Isotopy>.
- [Ko91] *Koschorke U.* Link homotopy with many components // *Topology*. 1991. Vol. 30, № 2. P. 267–281.
- [Ko19] *Kogan E.* Linking of three triangles in 3-space. arXiv:1908.03865.
- [KRR+] * Towards higher-dimensional combinatorial geometry, presented by E. Kogan, V. Retinskiy, E. Riabov and A. Skopenkov. <https://www.mccme.ru/circles/oim/multicomb.pdf>.
- [Mi54] *Milnor J.* Link groups // *Ann. of Math. (2)*. 1954. Vol. 59. P. 177–195.
- [Pr95] * *Прасолов В. В.* Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995.
- [Pr04] * *Прасолов В. В.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004. <http://www.mccme.ru/prasolov>.
- [RN11] * *Ricca R. L., Nipoti B.* Gauss' linking number revisited // *J. Knot Theory Ramifications*. 2011. Vol. 20, № 10. P. 1325–1343. <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/ricca.pdf>.
- [RS72] * *Рурк К. П., Сандерсон Б. Дж.* Введение в кусочно-линейную топологию. М.: Мир, 1974.
- [Sk00] *Skopenkov A.* On the generalized Massey — Rolfsen invariant for link maps // *Fund. Math.* 2000. Vol. 165, № 1. P. 1–15.
- [Sk03] *Skopenkov M.* Embedding products of graphs into Euclidean spaces // *Fund. Math.* 2003. Vol. 179, № 3. P. 191–198. arXiv:0808.1199.
- [Sk06] * *Skopenkov A.* Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces // *Surveys in contemporary mathematics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; Vol. 347). P. 248–342. arXiv:math/0604045.
- [Sk14] * *Скопенков А.* Реализуемость гиперграфов и неотъемлемая зацепленность // *Математическое просвещение*. Сер. 3. Вып. 32. М.: МЦНМО, 2024. С. 125–159. arXiv:1402.0658.
- [Sk16h] * *Skopenkov A.* High codimension links // *Boll. Man. Atl.* (to appear). http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/High_codimension_links.
- [Sk16s] * *Skopenkov A.* Knots, i. e. embeddings of spheres. http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Knots,_i.e._embeddings_of_spheres.
- [Sk18] * *Скопенков А.* Инварианты изображений графов на плоскости, *Математическое просвещение*. Сер. 3. Вып. 31. М.: МЦНМО, 2023. С. 74–127. arXiv:1805.10237.
- [Sk20] * *Скопенков А.* Алгебраическая топология с геометрической точки зрения / 2-е изд. М.: МЦНМО, 2020. Часть книги: <http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>.

- [Sk20u] * Скопенков А. Основы теории узлов и зацеплений для пользователя // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 27. М.: МЦНМО, 2021. С. 128–165. arXiv:2001.01472.
- [Sk] * Скопенков А. Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения. <http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf>.
- [St24] Starkov M. An example of an “unlinked” set of $2k + 3$ points in $2k$ -space. arXiv:2402.09002.
- [Val] * <https://en.wikipedia.org/wiki/Valknut>.
- [Wn] * https://en.wikipedia.org/wiki/Winding_number.
- [Zi13] Zimin A. Alternative proofs of the Conway — Gordon — Sachs Theorems. arXiv:1311.2882.
- [ZSS] * Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии. Сборник / Под ред. А. Заславского, А. Скопенкова и М. Скопенкова. М.: МЦНМО, 2018. <http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf>.
- [Zu] Zung J. A non-general-position Parity Lemma. <http://www.turgor.ru/1ktg/2013/1/parity.pdf>.