

Короткое доказательство теоремы Халина и некоторые следствия из неё

Т. С. Казанцева, А. А. Арутюнов

В школе обычно рассматривают конечные графы и связанные с ними задачи. Однако и в приложениях, и в «большой математике» куда чаще встречаются графы бесконечные. В данной работе именно о таких графах, а также об идеях, связанных с так называемой грубой геометрией (см., например, [1]), и пойдёт речь.

Прежде всего мы рассмотрим теорему Халина, которая, коротко выражаясь, говорит, что в любом бесконечном графе, «не похожем» на прямую, обязательно найдётся гексагональная решётка. Таким образом, получается, что может быть одно из двух: либо граф «тонкий», т. е. похож на прямую, либо в нём имеется структура из (возможно, нескольких) гексагональных решёток. Оригинальное доказательство Р. Халина (см. [2]) достаточно сложное. Мы предложим простое, доступное старшекласснику, доказательство, основанное на работе Р. Дистеля [3]. Затем мы рассмотрим несколько новых задач, связанных с понятием конца графа, при решении которых будем пользоваться теоремой Халина, а также некоторыми смежными идеями и понятиями.

Мы надеемся, что эти идеи и задачи окажутся интересны школьникам старших классов, студентам и их преподавателям. О некоторых других вариантах использования грубой геометрии, доступных этой аудитории (см., например, [4]).

Авторы выражают признательность анонимному рецензенту за внимание и содержательные рекомендации, а также редакции сборника за помощь и поддержку.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Под графом мы, как обычно, понимаем систему, состоящую из множества вершин и рёбер, соединяющих пары вершин. Будем считать, что степени всех вершин (т. е. количества выходящих из них рёбер) конечны, а также (впрочем, это не существенное в данной работе ограничение), что между парой вершин есть не более одного ребра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Простой путь* — последовательность неповторяющихся вершин графа, в которой каждая следующая вершина соединена с предыдущей ребром.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Лучом* в графе будем называть бесконечный в одну сторону простой путь. Если выкинуть из луча простой путь, являющийся его началом, получим *подлуч*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Здесь и далее для двух наборов путей $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ под $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$ считаем, что $\mathcal{P}'$ состоит из связных подмножеств конечных или бесконечных путей из $\mathcal{P}$. Например, $\mathcal{P}$ состоит из лучей, а $\mathcal{P}'$ из их подлучей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Два луча считаются *эквивалентными*, если существует третий луч, пересекающийся с каждым из них по бесконечному числу вершин.

Несложно убедиться, что в последнем определении действительно введено отношение эквивалентности. Мы должны проверить симметричность, рефлексивность и транзитивность введенного отношения.

- *Рефлексивность.* Луч эквивалентен сам себе, поскольку он пересекает сам себя по бесконечному числу точек.
- *Симметричность.* Если луч a эквивалентен лучу b , то третий луч, который пересекается с каждым из них в бесконечном множестве вершин, осуществит и обратную эквивалентность луча b лучу a .
- *Транзитивность.* Пусть даны лучи h^1, h^2, h^3 и известно, что пары лучей h^1, h^2 и h^2, h^3 эквивалентны. Пусть лучи a, b пересекают по бесконечному числу точек пары h^1, h^2 и h^2, h^3 соответственно. Покажем, что h^1 эквивалентен h^3 . Занумеруем вершины лучей h^1, h^2, h^3 естественным образом. Построим следующий луч. Пройдём по лучу h_1 от начала до пересечения с a , затем по лучу a (в направлении возрастания номеров вершин) до пересечения с h_2 , аналогично по лучу h_2 до пересечения с b , по лучу b до пересечения с h_3 в некоторой точке P . Далее повторяем процедуру начиная с точки P и луча h_3 , пока не вернёмся на луч h_1 в некоторой

точке Q . Затем повторяем всё описанное начиная с точки Q , и т. д. Ясно, что будет построен луч (самопересечения отсутствуют) и он пересекает h_1 и h_3 по бесконечному числу точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Концом* в графе будем называть класс эквивалентности лучей.

Полезно разделить концы на два типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что конец *толстый*, если он содержит бесконечно много непересекающихся эквивалентных лучей, и *тонкий* иначе.

Например, граф, состоящий из одного простого бесконечного пути (назовём его *прямая*) содержит два тонких конца. А граф, вершины которого расположены в целых точках координатной плоскости и рёбра соединяют вершины в соседних узлах (*плоскость*) — один толстый.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Для множеств A и B будем называть $(A \rightsquigarrow B)$ -путём простой путь, соединяющий какую-нибудь пару вершин из множеств A и B соответственно и не содержащий строго внутри никаких вершин из $A \cup B$ (чаще всего в качестве A и B будем рассматривать лучи или наборы лучей).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. *Подразбиением* графа G будем называть граф, полученный из G с помощью операций замены ребра между вершинами v, u на два новых ребра v, t и t, u , где t — новая вершина.

Под гексагональной решёткой будем понимать набор вертикальных лучей и «чередующихся перегородок» между ними (рис. 1).

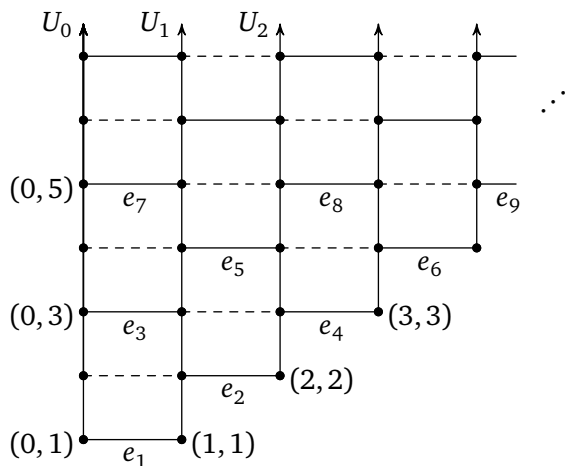


Рис. 1. Гексагональная решётка H

Оказывается, наличие у графа толстого конца равносильно тому, что он содержит в себе нечто «похожее» на плоскость. Прояснить и формализовать это наблюдение помогает следующее утверждение, предложенное впервые Р. Халиным в [2]. При доказательстве мы будем в основном опираться на работу [3].

ТЕОРЕМА 1 (Халин). *Любой граф, имеющий толстый конец, содержит подграф, изоморфный некоторому подразбиению графа гексагональной решётки.*

Сразу заметим, что в обратную сторону это утверждение очевидно: если уж в графе нашлась гексагональная решётка, то конец у него заведомо толстый. Так что для доказательства нам достаточно предъявить в графе с толстым концом гексагональное подразделение.

При доказательстве нам потребуется следующее утверждение, известное как лемма Кёнига (см. оригинальную работу [6] и подробное изложение в [5, теорема 22, с. 52]).

ЛЕММА 1 (Кёниг). *Каждое бесконечное дерево содержит вершину бесконечной степени или бесконечный простой путь.*

Для полноты изложения приведём доказательство.

Доказательство. Если есть вершина бесконечной степени, то утверждение очевидно. Так что будем считать, что у всех вершин конечная степень. Подвесим граф за какую-нибудь вершину v_0 . Тогда для какой-то из вершин первого уровня число её потомков бесконечно. Назовём её v_1 и добавим в путь.

Продолжим этот процесс: пусть уже выбрано k вершин, тогда по нашему алгоритму у v_{k-1} бесконечное число потомков, но вершин на k -м уровне, достижимых из неё — конечное число. Значит, у одной из них бесконечное число потомков. Назовём её v_k и добавим в путь.

Таким образом получаем искомый бесконечный простой путь. $\square$

Перейдём к доказательству теоремы.

Доказательство. Пусть G — граф с толстым концом ω . Наша основная цель — индуктивно найти в нём набор «вертикальных» лучей, играющих роль $U_0, U_1, \dots$, и «горизонтальных» путей $e_1, e_2, \dots$ между ними, как на рис. 1.

Вначале определим набор $\mathcal{R}_0$ как бесконечное множество непесекающихся эквивалентных лучей из толстого конца ω . Начнём с индуктивного построения последовательности лучей $Q_0, Q_1, \dots$, где для каждого номера i найдём номер $p(i)$ с соответствующим набо-

ром $Q_i \sim Q_{p(i)}$ путей. В дальнейшем из множества лучей Q_i выделим набор «вертикальных» лучей для решётки, а $Q_i \sim Q_{p(i)}$ пути послужат «горизонтальными перемычками».

1. Предположение индукции

На n -м шаге построения нашей последовательности будем добиваться выполнения следующих пяти условий.

- (a) $Q_n \in \omega$ и Q_n не пересекается с $Q_0 \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_{n-1}$.
- (b) $p(n) < n$ для любого $n \geq 1$.
- (c) Для любого $1 \leq i \leq n$ множество $\mathcal{P}_n(Q_i)$ состоит из непересекающихся $Q_i \sim Q_{p(i)}$ путей и удовлетворяет следующим двум условиям.
 - i. Для любых $i \neq j$, где $i, j \leq n$, пути между наборами не пересекаются, т. е. $\mathcal{P}_n(Q_i) \cap \mathcal{P}_n(Q_j) = \emptyset$.
 - ii. Для любых $i \neq j$ и $i, j \leq n$, где $j \neq p(i)$, пути между двумя лучами из последовательности не содержат внутри себя точек других лучей. Иначе говоря, $\mathcal{P}_n(Q_i) \cap Q_j = \emptyset$.
- (d) Бесконечное множество $\mathcal{R}_{n+1} \leq \mathcal{R}_n$ из «неиспользованных» лучей не пересекается с множествами $Q_0 \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_n$ и $\bigcup_n \mathcal{P}_n(Q_i)$ для $1 \leq i \leq n$.
- (e) $\mathcal{P}_n(Q_i) \subseteq \mathcal{P}_{n-1}(Q_i)$ для любого $1 \leq i \leq n$. В процессе доказательства функция $p: i \mapsto p(i)$ будет оставаться неизменной после определения, но набор $\mathcal{P}_n(Q_i)$ из $Q_i \sim Q_{p(i)}$ путей будет меняться с ростом n .

ЗАМЕЧАНИЕ. Неформально говоря, $\mathcal{P}_n(Q_i)$ рассматривается как лучший на данный момент кандидат на систему путей между лучами Q_i и $Q_{p(i)}$. Но, когда добавляется Q_m , где $m > n$, нам, может быть, придётся менять $\mathcal{P}_n(Q_i)$, выкидывая из него лишнее. (Возможно, в пределе мы выкинем всё, так что итоговые «перемычки» придётся выбирать именно из $\mathcal{P}_n(Q_i)$, а не из их пересечения по всем n).

Будем вести индукцию по $n \in \mathbb{N}$.

2. База индукции

Если $n = 0$, то в качестве луча Q_0 выберем любой из множества $\mathcal{R}_0$ и положим $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0 \setminus \{Q_0\}$. Очевидно, что сейчас все условия (1a)–(1e) выполнены.

3. Шаг индукции

(a) **Выбор нового пути, не пересекающего старые.**

Если, $n \geq 1$, то рассмотрим любой луч $R_n^0 \in \mathcal{R}_n$. Из свойства (1d) следует, что R_n^0 не пересекается с объединением всех уже выбранных

лучей и перегородок между ними

$$H_n := Q_0 \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_{n-1} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{P}_{n-1}(Q_i).$$

Так как и $R_n^0 \in \omega$, и $Q_0 \in \omega$, существуют бесконечные наборы непесекающихся $R_n^0 \sim H_n$ путей.

Есть два варианта.

• Среди этих путей найдётся такой набор $\mathcal{P}$, что построенные пути не пересекаются ни с какими из старых, т. е.

$$\mathcal{P} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{P}_{n-1}(Q_i) \right) = \emptyset.$$

На каждом пути из $\mathcal{P}$ отметим первую точку, лежащую на каком-то из Q_i . Тогда найдётся i , для которого будет отмечено бесконечно много путей. Оставим в $\mathcal{P}$ только части путей между R_n^0 и Q_i . Тогда набор $\mathcal{P}$ таков, что $\mathcal{P} \cap Q_i \neq \emptyset$ только для одного i . Положим $p(n) = i$ и $\mathcal{P}_n(Q_j) = \mathcal{P}_{n-1}(Q_j)$ для всех $j < n$.

• В противоположном случае, если невозможно выбрать $\mathcal{P}$ так, чтобы он не пересекался со старыми путями, то выбираем семейство $\mathcal{P}$ так, что все его вершины, общие с H_n , лежат в $\mathcal{P}_{n-1}(Q_i)$ для единственного i . Такой выбор возможен, ведь пути из $\mathcal{P}_{n-1}(Q_i)$ не пересекаются для различных i по свойству (1с), и потому на каждом пути из $\mathcal{P}$ можно отметить первую точку, лежащую в каком-то $\mathcal{P}_{n-1}(Q_i)$. Тогда каждый путь из $\mathcal{P}$ можно продлить до Q_i или до $Q_{p(i)}$ так, чтобы новые пути были несамопересекающимися, так как на каждом из них мы выбирали первую точку в $\mathcal{P}_{n-1}(Q_i)$. Тогда для какого-то i отмечено бесконечное число путей.

(b) Проблема: могло не остаться неиспользованных путей.

i) Теперь выделим бесконечные подмножества $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$ и $\mathcal{P}_n(Q_i) \leq \mathcal{P}_{n-1}(Q_i)$ так, чтобы они не пересекались. Продлим бесконечное подмножество путей из $\mathcal{P}'$ (далее для удобства будем называть это подмножество $\mathcal{P}$) до Q_i или $Q_{p(i)}$, как было описано выше, отрезками путей из $\mathcal{P}_{n-1}(Q_i) \setminus \mathcal{P}_n(Q_i)$ и положим $p(n) = i$ или $p(n) = p(i)$ соответственно. При этом $\mathcal{P}_n(Q_j) = \mathcal{P}_{n-1}(Q_j)$ для всех $j \leq n, j \neq i$.

В каждом из случаев мы выбрали множества $\mathcal{P}_n(Q_j)$ для всех $j \neq i$ так, чтобы выполнялось условие (1е), определили номер $p(n)$ как требуется в условии (1b) и нашли набор $\mathcal{P}$ из непесекающихся $R_n^0 \sim Q_{p(n)}$ путей, которые также не пересекают лучи Q_i и сопоставленные им наборы путей $\mathcal{P}_n(Q_i)$ для всех $i \neq p(n)$, т. е. верны условия (1а)

и (1c). Всё, что нам мешает выбрать R_n^0 в качестве Q_n , — это условие (1d): если $\mathcal{P}$ пересекается со всеми, кроме, может быть, конечного числа лучей из множества $\mathcal{R}_n$ бесконечное число раз, то мы не можем выбрать семейство $\mathcal{R}_{n+1} \leq \mathcal{R}_n$, для которого $\mathcal{R}_{n+1} \cap \mathcal{P} = \emptyset$.

ii) Покажем, что для любого луча R из определённого выше множества лучей $\mathcal{R}_n$ и набора $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$ таких, что $\mathcal{P}'$ — бесконечный набор $R \sim Q_{p(n)}$ путей, существует луч R' из $\mathcal{R}_n$, не совпадающий с R и имеющий бесконечно много общих точек с $\mathcal{P}'$.

Действительно, пусть нашлись луч R и набор $\mathcal{P}'$, удовлетворяющие описанным условиям. Тогда выберем R в качестве Q_n , а $\mathcal{P}'$ в качестве $\mathcal{P}_n(Q_n)$ и от каждого $R^* \in \mathcal{R}_n$, не равного R , оставим его подлуч, не имеющий общих точек с R .

При этом множество I лучей, подходящих в качестве R' , бесконечно. В противном случае можно применить предыдущее рассуждение к множеству $\mathcal{R}_n \setminus I$ и получить ещё один луч из I , что приводит к противоречию.

iii) Занумеруем пути из $\mathcal{P}$ номерами вершин из луча R_n^0 , в которых эти пути начинаются. Тогда на любом подмножестве $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$ есть индуцированный порядок.

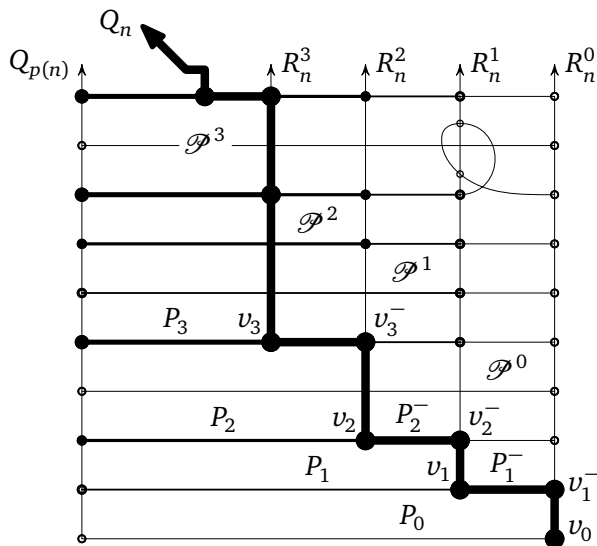
Пусть $\mathcal{P}'$ является набором $R \sim Q_{p(n)}$ путей для некоторого луча R . Назовём введённый порядок *совместимым* с R , если он совпадает с порядком, который задаётся лучом R на этом наборе путей.

(c) Соберём луч из конечных частей неиспользованных лучей.

Докажем, что можно выбрать две последовательности $R_n^0, R_n^1, \dots$ и $\mathcal{P}^0 \geq \mathcal{P}^1 \geq \dots$ такие, что все R_n^i являются подлучами различных лучей из $\mathcal{R}_n$, а каждое $\mathcal{P}^i$ является набором $R_n^i \sim Q_{p(n)}$ путей, порядок на которых совместим с R_n^i .

Пусть луч R_n^0 уже есть. Положим $\mathcal{P}^0 = \mathcal{P}$, v_0 — первая вершина в R_n^0 . Пусть уже найдены первые $k-1$ элементов каждой последовательности. Тогда применим аналогичные с п. (3b, ii) рассуждения к лучу R_n^{k-1} и набору путей $\mathcal{P}^{k-1}$: найдётся луч R_n^* , не пересекающий ни один из уже выбранных и не пересекающий конечный набор путей $P_0, P_1, \dots, P_{k-2}$. Пусть $P_{k-1} \in \mathcal{P}^{k-1}$ — какой-нибудь путь, v_{k-1}^- — его стартовая вершина на луче R_n^{k-1} , а вершина v_k — самое верхнее его пересечение с R_n^* . Возьмём в качестве R_n^k подлуч R_n^* , стартующий с вершины v_k . Очевидно, можно выбрать теперь бесконечное множество путей $\mathcal{P}^k \leq \mathcal{P}^{k-1}$ с совместимым с R_n^k порядком.

Каждый путь P_k из найденных выше разбивается на два пути: от R_n^k до v_{k+1} и от v_{k+1} до $Q_{p(n)}$. Обозначим их P_k^- и P_k^+ соответственно. Пусть,

Рис. 2. Построение Q_n (из статьи [3])

далее, R_{n+1}^k — подлуч в R_n^k , не пересекающий путь P_i ни для какого i . Тогда положим (рис. 2):

- $Q_n := v_0 R_n^0 v_1^- P_1^- v_1 R_n^1 v_2^- P_2^- v_2 R_n^2 \dots$;
- $\mathcal{P}_n(Q_n) := \{P_0^+, P_1^+, P_2^+, P_3^+ \dots\}$;
- $\mathcal{R}_{n+1} := \{R_{n+1}^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Осталось проверить, что условия (1a)–(1e) выполнены после шага индукции. Условия (1b) и (1e) мы уже проверяли. Условия (1a) и (1c) верны, ведь Q_n состоит из отрезков лучей из $\mathcal{R}_n$, которые, в свою очередь, не пересекаются с $Q_0 \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_{n-1}$, причём $\mathcal{P}_n(Q_n) \leq \mathcal{P}$, а для $\mathcal{P}$ утверждение было верно. Условие (1e) справедливо, поскольку никакие подлучи R_{n+1}^i не пересекаются как с выбранными ранее лучами или путями, так и с лучом Q_n и путями $\mathcal{P}_n(Q_n)$ по построению.

6. Построение решётки

Для завершения доказательства воспользуемся леммой Кёнига (лемма 1).

Построим граф, состоящий из вершин v_i , $i = \{0, 1, 2, \dots\}$, где v_i соединена с $v_{p(i)}$, и применим к нему лемму 1. Получим последовательность $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$, где или $p(n_{i+1}) = n_i$ или $p(n_i) = n_0$ для любого $i \geq 1$. Рассмотрим оба случая.

(а) Если выполнено первое условие, т. е. $p(n_{i+1}) = n_i$ для всех i , то выкинем все не входящие в нашу последовательность номера. Останутся $Q_0, Q_1, Q_2, \dots$ всё ещё удовлетворяющие условиям (1a)–(1e), при-

чём все наборы $\mathcal{P}_n(Q_{i+1})$ состоят из $Q_{i+1} \sim Q_i$ путей. Наша цель — выбрать подлучи Q'_i из Q_i , соответствующие $U_0, U_1, U_2, \dots$, и пути $S_1, S_2, S_3, \dots$ между ними, соответствующие $e_1, e_2, e_3, \dots$, чтобы прийти к картинке, аналогичной рис. 1. Будем подбирать нужные элементы индуктивно (таким образом, на каждом шаге построения выбрано лишь конечное число «вертикалей» и «перегородок»).

Пусть $Q'_0 = Q_0$ и S_0 — любой путь из $\mathcal{P}_n(Q_0)$. Пусть k и n — минимальные такие, что S_k и Q'_n ещё не определены. Мы опишем, как выбрать S_k и, если требуется для определения S_k , то и Q'_n . Пусть i — такой номер, что e_k соединяет U_{i-1} и U_i в H . Если $i = n$, положим Q'_n равным такому подлучу Q_n , что он не пересекает $S_1, S_2, \dots, S_{k-1}$, в противном случае Q'_n уже был определён ранее. Теперь можем выбрать $S_k \in \mathcal{P}_n(Q_i)$ «достаточно высоко», чтобы отразить положение e_k в H . Благодаря условиям (1a)–(1e) мы знаем, что S_k не пересекает ни один из ранее выбранных путей Q'_i или S_i .

(b) Осталось рассмотреть второй случай, когда $p(n_i) = n_0$ для любого $i \geq 1$. Переименуем Q_{n_0} в Q , а все остальные Q_{n_i} в Q_i для $i \geq 1$. Тогда наши наборы $\mathcal{P}_n(Q_i)$ состоят из непересекающихся $Q_i \sim Q$ путей. Мы будем выбирать Q'_n и S_k индуктивно, как раньше, за исключением того, что теперь S_k состоит из трёх частей: отрезок из $\mathcal{P}_n(Q_{i-1})$, отрезок из Q и, наконец, отрезок из $\mathcal{P}_n(Q_i)$. Но тогда S_k всё ещё может быть определён на каждом шаге, ведь из Q всегда выкинут лишь конечный отрезок, а значит, есть бесконечный подлуч со всеми старыми условиями.

Тем самым доказательство теоремы завершено. $\square$

§ 2. Число концов и функции роста графов

Мы уже отмечали, что структура концов — это грубый инвариант графа, т. е. его свойство, которое не меняется при локальных изменениях. Другое важное грубое свойство — функция роста. Она имеет глубокие приложения, например в теории групп. В частности, хорошо известен пример Григорчука групп промежуточного роста (см. [7, 8]). Понятие степени роста активно используется и в грубой геометрии (см. [1]), а также при изучении аменабельных и гиперболических групп (см. [1, 9]). В частности функция роста является ключевой при определении фёльнеровости. В тоже время для графов это понятие выглядит достаточно просто и наглядно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Шар радиуса r с центром в вершине v (обозначение $\text{Ball}(v, r)$) — множество всех таких вершин, что минимальная длина пути по рёбрам от них до v не превосходит r .

Число элементов в множестве будем обозначать через $|\cdot|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Назовём *функцией роста* графа γ в вершине x_0 отображение $f_{x_0} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, определяемое для $x_0 \in \gamma$ формулой

$$f(n) := |\text{Ball}(x_0, n)|.$$

Несложно проверить, что в связном графе γ для любых двух точек x_0, x_1 выполнено свойство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{x_0}(n)}{f_{x_1}(n)} = C$$

для некоторой константы C . Таким образом, все функции роста данного графа *эквивалентны*. Соответствующий класс функций будем называть *типом роста*. Так, у любого графа, грубо эквивалентного прямой, тип роста обязательно линейен. У графа, грубо эквивалентного плоскости, — квадратичен, и так далее.

Выявим связь между линейностью функции роста графа G и наличием у него толстых концов.

ТЕОРЕМА 2. Если функция роста графа G линейна, то все его концы тонкие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть утверждение неверно и граф имеет толстый конец при линейной скорости роста. В таком случае по теореме Халина можно выделить подграф, изоморфный гексагональной решётке. Поскольку функция роста графа линейна, существует такое $C > 0$, что $f(n) < Cn$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Выкинем из нашего подграфа все горизонтальные пути (которые соединяют разные вертикали решётки), кроме одного для каждой пары вертикальных лучей. Выберем стартовую вершину v и занумеруем вертикали: U_0 содержит v , $U_{-1}, U_{-2}, \dots$ идут влево и $U_1, U_2, \dots$ — вправо. За некоторое конечное число k шагов можно добраться до как минимум $2C + 1$ различных вертикалей. Тогда $f(k) \geq 2C + 1$ и

$$f(k+t) \geq (2C+1) + t(2C+1) = (t+1)(2C+1) > 2Ct.$$

Положим $t = 2k$, тогда

$$f(k+t) = f(3k) > 4Ck \quad \Rightarrow \quad f(k+t) > C(k+t) = 3Ck.$$

Получили противоречие. □

Обратное вообще говоря не имеет места. Приведём несколько примеров.

ПРИМЕР 1. Граф с бесконечным числом тонких концов, без толстого конца и имеющий экспоненциальный рост.

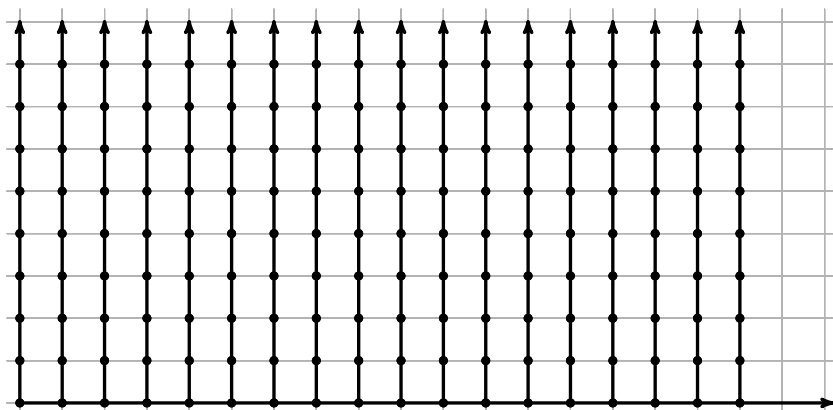


Рис. 3. Граф без толстых концов с нелинейной функцией роста

Рассмотрим граф, состоящий из точек вида (k, n) на координатной сетке (рис. 3), где $k, n \geq 0$, $k, n \in \mathbb{Z}$, и проведём все вертикальные отрезки и горизонтальные между соседними точками с абсциссой 0. Тогда у графа нет ни одного толстого конца, ведь никакие два непересекающихся луча не эквивалентны. Но если назначить вершиной отсчёта точку $(0, 0)$, то $f(n-1) = n(n+1)/2$.

ПРИМЕР 2. Граф с единственным тонким концом, обладающий экспоненциальным ростом.

Более того, даже если тонкий конец один и степени вершин ограничены каким-нибудь числом M , то граф может иметь нелинейную функцию роста. Приведём пример такого графа.

Назовём бинарным деревом порядка k бинарное дерево с k уровнями. Рассмотрим простой луч с занумерованными вершинами. К каждой вершине с номером i присоединим бинарное дерево порядка i (рис. 4).

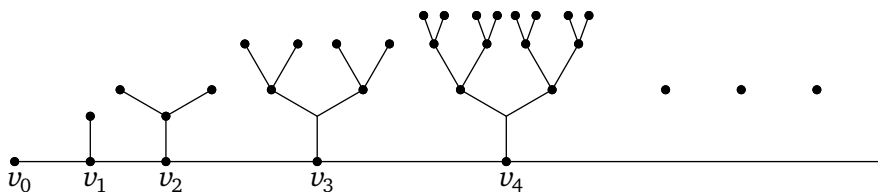


Рис. 4. Граф из бинарных деревьев

Легко видеть, что

$$|\text{Ball}(v_0, 2k)| \geq k+1 + (1-1) + (2-1) + \dots + (2^{k-1}-1) + (2^k-1) = 2^{k+1}-1,$$

т. е. граф растёт экспоненциально, причём степень каждой вершины не превосходит 3.

Данный пример легко модифицировать, получая любую полиномиальную степень роста.

§ 3. ВЕРШИННО-ТРАНЗИТИВНЫЕ ГРАФЫ

Перейдём к рассмотрению так называемых вершинно-транзитивных графов, для которых можно доказать (при определённых условиях) утверждение, обратное к нашей теореме 2, что и является нашей ближайшей целью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. *Автоморфизм графа* — произвольная подстановка ϕ на множестве вершин графа, сохраняющая отношение смежности; т. е. образы $\phi(u)$ и $\phi(v)$ вершин u и v смежны тогда и только тогда, когда смежны сами вершины u и v .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Вершинно-транзитивный граф* — граф, у которого для любых двух вершин v и u существует автоморфизм, переводящий v в u .

ЗАМЕЧАНИЕ. Для вершинно-транзитивных графов скорость роста не может быть более, чем экспоненциальной, так как

$$|\text{Ball}(v_0, n)| \leq \sum |\text{Ball}(v_i, n-1)| = \deg(v_0) \cdot |\text{Ball}(v_0, n-1)|,$$

где v_i — соседи вершины v_0 .

ЛЕММА 2. *Если число концов связного вершинно-транзитивного графа G конечно, то их не больше, чем 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть их больше, чем два, скажем, k . Тогда найдём такой конечный подграф $G_0 \subset G$, при удалении которого остаётся k бесконечных компонент связности. Обозначим их через $L_1 \dots L_k$.

Выберем точки $v_1 \in L_1$ и $v_0 \in G_0$ такие, что $\rho(v_1, G_0) > d$, где d — диаметр¹⁾ графа G_0 . Такие точки найдутся, поскольку L_1 — связный подграф и все вершины в нём имеют конечную степень, а значит, в L_1 есть сколь угодно далёкие от v_0 точки.

Рассмотрим автоморфизм f , который переводит вершину v_0 в v_1 . Имеем $f(G_0) \subset L_1$. После удаления множества $f(G_0) \cup G_0$ у нас сохраняется $k-1$ бесконечная компонента $L_2, \dots, L_k$ и добавляется «расщепление» компоненты L_1 на ещё $k-1$ бесконечную компоненту — итого не менее чем $2k-2$ конца. Значит, если $k > 2$, то, повторяя процедуру, получим, что число концов бесконечно. $\square$

¹⁾ То есть максимальное расстояние между вершинами (расстояние — наименьшее количество рёбер в пути между вершинами).

Для знакомых с началами теории групп отметим, что из леммы 2 сразу следует теорема Хопфа, гласящая, что в графе Кэли для конечно порождённой группы число концов либо бесконечно, либо не более чем два.

ТЕОРЕМА 3. *Скорость роста вершинно-транзитивного графа с конечным числом тонких концов линейна.*

Доказательство. По лемме 2 вершинно-транзитивный граф с конечным числом концов имеет или один конец, или два.

- Пусть в графе два конца. Тогда рассмотрим какой-нибудь граф H , при выкидывании которого остаются две бесконечные компоненты. Пусть он лежит в некотором $\text{Ball}(v_0, d) = G_0$. Тогда при выкидывании G_0 останутся две бесконечные компоненты L_0 и R_0 и конечный (не обязательно связный) подграф Q_0 .

- Покажем, что $Q_0 \subset \text{Ball}(v_0, 2d)$.

Пусть это неверно, тогда найдётся $w \notin \text{Ball}(v_0, 2d)$, $w \in Q_0$. Рассмотрим автоморфизм, переводящий v_0 в w . Тогда после удаления $\text{Ball}(w, d)$ должны остаться две бесконечные компоненты связности. Заметим, что

$$\text{Ball}(w, d) \cap \text{Ball}(v_0, d) = \emptyset,$$

$$\text{Ball}(w, d) \cap L_0 = \emptyset, \quad \text{Ball}(w, d) \cap R_0 = \emptyset.$$

Но тогда, если удалить $\text{Ball}(w, d) \cup \text{Ball}(v_0, d)$, в графе останутся три бесконечные компоненты, противоречие.

- Выберем вершину $v_1 \in R_0$ на расстоянии $2d$ от v_0 и рассмотрим автоморфизм f , переводящий v_0 в v_1 . Тогда $\text{Ball}(v_1, d) \cap L_0 = \emptyset$, т. е. $\text{Ball}(v_1, d) \setminus Q_0 \subset R_0$. Аналогично определим Q_1, L_1, R_1 . Далее, так же определим

$$v_2 = f(f(v_0)), \quad v_3 = f(f(f(v_0))), \quad \dots$$

и

$$v_{-1} = f^{-1}(v_0), \quad v_{-2} = f^{-1}(f^{-1}(v_0)), \quad \dots$$

Тогда весь наш граф представлен в виде $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \text{Ball}(v_i, 2d)$, причём пересекаются не на границе только шары с центрами в вершинах с индексами, отличающимися на 1. Выполнена оценка

$$|\text{Ball}(v_0, 2kd)| \leq 2|\text{Ball}(v_0, 2d)| \cdot (k+1) \leq C \cdot 2k.$$

Следовательно, скорость роста не более чем линейна. Поскольку мы предполагаем, что граф бесконечный, получаем утверждение теоремы.

- Остаётся заметить, что если у графа единственный конец, то доказательство аналогично. Нужно только учесть, что все индексы вершин v_i будут принимать только натуральные значения. $\square$

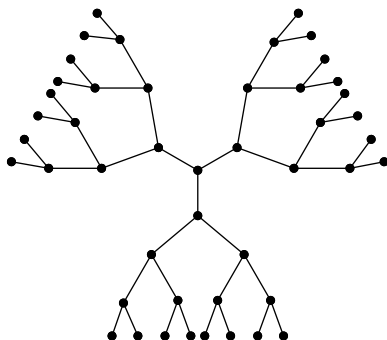


Рис. 5. Транзитивный граф T_3 с экспоненциальной функцией роста

Требование конечности числа концов в теореме 3 существенно. Соответствующим примером является граф T_3 , определяемый следующим образом: три бинарных дерева, склеенных в одной вершине (см. рис. 5 и пример 3).

Следствие 1. *Если у графа Кэли все концы тонкие, то он либо экспоненциального роста, либо линейного.*

Пример 3. Граф T_3 является вершинно-транзитивным, у него нет толстых концов и его скорость роста экспоненциальна.

Доказательство. Покажем, что данный граф вершинно-транзитивен. Рассмотрим вершины $v_1, v_2 \in T_3$. Понятно, как выглядит автоморфизм, переводящий v_1 в v_2 : поставим в соответствие бинарным деревьям, смежным с v_1 , деревья, смежные с v_2 .

Очевидно, что у этого графа нет толстых концов, ведь в нём нет циклов, а, как следствие, и выделить решётку в нём нельзя. Но его функция роста имеет вид

$$|\text{Ball}(v_0, n)| = 1 + 3 + 2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3 + \dots + 2^{n-1} \cdot 3 = 3 \cdot 2^n - 2,$$

поскольку при увеличении радиуса на единицу множество новых вершин удваивается. Значит, скорость роста экспоненциальна. $\square$

На самом деле верно, что у вершинно-транзитивного графа G с бесконечным числом концов скорость роста не менее чем экспоненциальна. Рассмотрим конечный граф G_0 — такой подграф в G , что его удаление приводит к разбиению графа на $k > 2$ бесконечных компонент. Рассмотрим вершину $v_0 \in G_0$. Для неё существует такое число r , что $G_0 \subset \text{Ball}(v_0, r)$. Заметим теперь, что при удалении графа $\text{Ball}(v_0, t(r+1))$ исходный распадается как минимум на $k(k-1)^{t-1}$ бесконечных компонент. Действительно, при любом выборе вершины v

граф после удаления $\text{Ball}(v, r)$ распадается на k бесконечных компонент. Значит, каждый из бесконечных подграфов, полученных на i -м шаге, через r итераций распадётся на как минимум $k - 1$ бесконечную компоненту. Таким образом, $|\text{Ball}(v_0, t(r + 1))| \geq k(k - 1)^{t-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Roe J.* Lectures on coarse geometry. Providence, RI: AMS, (University Lecture Series; Vol. 31). 2003.
- [2] *Halin R.* Ueber unendliche Wege in Graphen // Math. Ann. 1964. Bd. 157. S. 125–137.
- [3] *Diestel R.* A short proof of Halin's grid theorem // Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. 2004. Bd. 74. S. 237–242.
- [4] *Арутюнов А.* Математическая грубость (в хорошем смысле слова), 2023. <https://www.trv-science.ru/2023/01/matematicheskaya-grubost-v-horoshem-smysle-slova/>.
- [5] *Верещагин Н. К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 2. Языки и исчисления / 4-е изд., испр. М.: МЦНМО, 2012.
- [6] *König D.* Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche // Acta Sci. Math. (Szeged). 1927. Bd. 3. S. 121–130.
- [7] *Григорчук Р. И.* Степени роста конечно-порождённых групп и теория инвариантных средних // Известия АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48, № 5. С. 939–985.
- [8] *Grigorchuk R. I., Pak I.* Groups of Intermediate Growth, an Introduction // Enseign. Math. (2). 2008. Vol. 54, № 3–4. P. 251–272.
- [9] *Gromov M.* Groups of polynomial growth and expanding maps ((with an appendix by J. Tits) // Publications mathématiques de l'IHES. 1981. Vol. 53. P. 53–78.

Татьяна Сергеевна Казанцева, МФТИ

tanya.s.kazantseva@gmail.com

Андроник Арамович Арутюнов,

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, МФТИ

andronick.arutyunov@gmail.com