По мотивам задачника

Задача о сумме цифр числа и его квадрата

И. В. Митрофанов, Н. Сафаэи

В «Математическом просвещении» [1, с. 163], опубликована

Задача 11.6. Обозначим через $s(n)$ сумму цифр числа n. Ограничена ли последовательность $s(n)/s(n^2)$? (*Э. Туркевич*)

Ответ в задаче — нет. Один из способов доказать это — явно подобрать соответствующую последовательность, например:

$$a_k = 1 + 10^k - 10^{2k-1} + 10^{3k} + 10^{4k}.$$

При $k \geqslant 2$ ненулевые цифры в десятичной записи a_k — это $k+1$ девяток и 3 единицы, поэтому $s(a_k) = 9k + 12$.

Далее,

$$a_k^2 = 1 + 2 \cdot 10^k + 8 \cdot 10^{2k-1} + 18 \cdot 10^{3k-1} + 10^{4k-2} + \\ + 4 \cdot 10^{4k} + 18 \cdot 10^{5k-1} + 8 \cdot 10^{6k-1} + 2 \cdot 10^{7k} + 10^{8k}.$$

Поэтому $s(a_k^2) = 45$, а следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{s(a_k)}{s(a_k^2)} = \infty$.

Задача этим решена, но мы покажем, как можно обобщить эту конструкцию, и докажем более сильный результат:

Теорема 1. *Пусть $d_1 > d_2$ — натуральные числа. Тогда множество значений выражения $s(n^{d_1})/s(n^{d_2})$ всюду плотно на луче* $(0; \infty)$.

Доказательство, которое мы излагаем, в основных моментах повторяет доказательство из статьи [2].

Число n мы будем искать в виде $n = T(10^k)$, где $T(x)$ — какой-то многочлен с целыми коэффициентами, а k — очень большое натуральное число.

Пусть $T(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен с положительным старшим коэффициентом. Моном $a_k x^k$ этого многочлена назовём *выпадающим*, если $a_k = 0$, а следующий по старшинству ненулевой моном имеет отрицательный коэффициент (если у T нет нулевых коэффициентов, то выпадающих мономов нет). Обозначим через $C(T)$ суммарное число отрицательных коэффициентов и выпадающих мономов в многочлене T.

Лемма 1. *Пусть P и Q — два многочлена, у каждого из которых все коэффициенты целые, старшие коэффициенты положительны, причём $C(Q) > 0$. Тогда*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{s(P(10^k))}{s(Q(10^k))} = \frac{C(P)}{C(Q)}.$$

Доказательство. Пусть модули всех коэффициентов обоих многочленов не превосходят 10^s. Далее предполагаем, что $k > s$.

Пусть $0 \leqslant i \leqslant n$, смотрим на $k-s$ разрядов числа $P(10^k)$ с номерами от $ik+s$ до $(i+1)k-1$. Если $a_i > 0$ (или $a_i = 0$, но этот моном не выпадающий), то эти разряды заняты нулями, в противном случае — девятками. Поэтому

$$s(P(10^k)) = 9kC(P) + \varepsilon_{P,k}, \quad \text{где } |\varepsilon_{P,k}| \leqslant 9sn.$$

Аналогично получим формулу

$$s(Q(10^k)) = 9kC(Q) + \varepsilon_{Q,k}, \quad \text{где } |\varepsilon_{Q,k}| \leqslant 9sn.$$

Поделим одно равенство на второе и возьмём предел. □

Замечание. Несложно заметить, что при достаточно больших k число $\varepsilon_{P,k}$ не зависит от k.

Теперь предположим, что у многочлена $T(x)$ все коэффициенты целые, а старший — положителен. Тогда, согласно лемме 1,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{s((T(10^k)^{d_1})}{s((T(10^k)^{d_2})} = \frac{C(T^{d_1})}{C(T^{d_2})}.$$

Поэтому нам осталось научиться для любых $r > 0$ и $\varepsilon > 0$ подбирать такой многочлен с целыми коэффициентами T, что

$$\left|\frac{C(T^{d_1})}{C(T^{d_2})} - r\right| < \varepsilon.$$

Заметим, что условие целочисленности коэффициентов можно ослабить. Если коэффициенты T рациональные, то можно умножить T

на наименьшее общее кратное знаменателей коэффициентов, все коэффициенты станут целыми, а величина $C(T^{d_1})/C(T^{d_2})$ не изменится. Дальше мы будем предполагать, что все рассматриваемые многочлены — с рациональными коэффициентами.

Прежде чем двигаться дальше, вспомним задачу с московской олимпиады.

57-я Московская математическая олимпиада, 10 класс, задача 6 (1994 г.). Существует ли такой многочлен $P(x)$, что у него есть отрицательный коэффициент, а все коэффициенты любой его степени $P^n(x)$, $n > 1$, — положительные?

Решение. Да, есть. Любое натуральное $n > 1$ можно представить в виде суммы двоек и троек, поэтому достаточно подобрать $P(x)$, для которого положительны коэффициенты его квадрата и куба. Легко видеть, что у P отрицательный коэффициент не может стоять первым или последним. Ещё немного подумав, понимаем, что отрицательный коэффициент не может быть вторым или предпоследним, поэтому всего коэффициентов должно быть хотя бы 5. Попробуем теперь подобрать такой многочлен 4-й степени. Легко проверить, что все коэффициенты многочленов $(x^4 + x^3 + x + 1)^2$ и $(x^4 + x^3 + x + 1)^3$ положительны, поэтому при достаточно маленьком λ нам подойдёт многочлен $P(x) = x^4 + x^3 - \lambda x^2 + x + 1$.

Замечание. Возьмём многочлен T, являющийся примером к этой задаче. Можно считать, что его коэффициенты целые. Тогда для любого $d > 1$, очевидно, выполняется равенство $C(T^d)/C(T) = 0$. Поэтому для любого d

$$\lim_{k\to\infty} \frac{s(T(10^k)^d))}{s(T(10^k))} = 0.$$

Случай $d = 2$ решает задачу 11.6 (подставляем $n = T(10^k)$). Первым показал, что величина $s(n^2)/s(n)$ может быть сколь угодно мала, К. Б. Столярский в 1978 году [4]. Он же выдвинул гипотезу, что $s(n^d)/s(n)$ может быть сколь угодно мало для любого $d > 1$, и проблема эта стояла открытой более тридцати лет [3]. Как вы уже поняли, комбинация леммы 1 и задачи 6 с московской олимпиады эту проблему успешно решает. Проблема ставилась для двоичной записи, а не десятичной, но наши рассуждения легко модифицировать для любой системы счисления (проверьте!).

Обобщим конструкцию из этого решения. Пусть a и b — натуральные числа, $\lambda \in \mathbb{R}$. Обозначим через $T_{a,b,\lambda}(x)$ многочлен степени $2a+b-1$, у которого a старших и a младших коэффициентов равны 1, а остальные b коэффициентов равны λ (например, многочлен $T_{2,1,-1/200}$ — это пример в задаче 6 с московской олимпиады).

Лемма 2. *Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\lim_{\lambda \to 0-} C((T_{a,b,\lambda}(x))^d) = \begin{cases} 0, & \text{если } d \geqslant \dfrac{a+b}{a-1}, \\ d(a+b-d(a-1)), & \text{если } d < \dfrac{a+b}{a-1}. \end{cases}$$

Доказательство. Будем говорить, что многочлен $T_{a,b,\lambda}(x)$ имеет a *младших* мономов со степенями от 1 до x^{a-1}, b *средних* от λx^a до λx^{a+b-1} и a *старших* мономов от x^{a+b} до x^{2a+b-1}.

Пусть мы раскрыли все скобки в $(T_{a,b,\lambda}(x))^d$. Это многочлен от переменных x и λ, сгруппируем слагаемые по степеням x. Получится

$$TP_0 + P_1 x + \ldots + P_{d(2a+b-1)} x^{d(2a+b-1)},$$

здесь каждый коэффициент P_k — это какой-то многочлен от λ с целыми неотрицательными коэффициентами. Если взять λ очень маленьким и отрицательным, то знак $P(\lambda)$ зависит только от чётности минимальной ненулевой степени λ. Несложно понять, что эта минимальная ненулевая степень может равняться только 0 или 1. Действительно, пусть в $(T_{a,b,\lambda}(x))^d$ после раскрытия всех скобок встретилось выражение $\lambda^t x^k$, где $t \geqslant 2$. Это результат перемножения нескольких мономов, из которых хотя бы два средних. Мы можем взять два других монома с той же суммарной степенью по x, среди которых не более одного среднего. Значит, в коэффициенте P_k есть моном со степенью по λ меньше, чем t.

Ввиду сказанного, чтобы найти $\lim_{\lambda \to 0-} C((T_{a,b,\lambda}(x))^d)$, надо из $d(2a + b - 1) + 1$, т. е. числа различных степеней x, вычесть число тех степеней, которые можно получить, перемножая друг с другом лишь старшие и младшие мономы и не трогая средние. Такие степени делятся на $d+1$ групп (возможно, эти группы пересекаются). В группу i, $0 \leqslant i \leqslant d$, войдут степени, которые можно получить, перемножая i старших мономов и $d-i$ младших.

Нетрудно понять, что в группе i будет $d(a-1)+1$ степеней, от $x^{i(a+b)}$ до $x^{(d-i)(a-1)+i(2a+b-1)} = x^{i(a+b)+d(a-1)}$. Если $d(a-1) \leqslant a+b$, то группы между собой не пересекаются и в их объединении $(d+1)(d(a-1)+1)$ степеней. Если $d(a-1) > a+b$, то группы с соседними номерами пересекаются, и их объединение — это все $d(2a+b-1)$ степеней. $\square$

Лемма 3. *Пусть* $d_1 > d_2$, $0 < r < 1$, $\varepsilon > 0$. *Тогда можно найти* $T(x)$, *у которого нулевой и старший коэффициенты положительны и*

$$\left|\frac{C((T(x))^{d_1})}{C((T(x))^{d_2})} - r\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. По лемме 2, при достаточно близких к нулю отрицательных λ значение выражения $C((T_{a,b,\lambda}(x))^{d_1})/C((T_{a,b,\lambda}(x))^{d_2})$ равно

$$\frac{d_1(a+b-d_1(a-1))}{d_2(a+b-d_2(a-1))}.$$

Если умножим числа a и b на одно и то же большое число, в пределе получим

$$\frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{b-(d_1-1)a}{b-(d_2-1)b}.$$

Обозначим это выражение $f(a,b)$. Если разрешить числам a и b быть любыми положительными, то $f(a,b)$ принимает все значения от 0 до d_1/d_2. Тогда при рациональных положительных a и b значение этого выражения всюду плотно на $[0; d_1/d_2]$, а так как $f(a,b) = f(na,nb)$, то и при всевозможных натуральных a и b значения $f(a,b)$ плотны на $[0; d_1/d_2]$. □

Мы близки к победе, осталось разобраться с числами, превосходящими 1.

Лемма 4. *Пусть* $d_1 > d_2$. *Для любого* $A > 0$ *существует такой многочлен с положительными коэффициентами* $P(x)$, *что число ненулевых коэффициентов у* $(P(x))^{d_1}$ *хотя бы в* A *раз больше, чем у* $(P(x))^{d_2}$.

Доказательство. Можно взять P, у которого степени ненулевых мономов растут очень быстро. Конкретнее: пусть $d > d_1$, возьмём

$$P(x) = 1 + x^d + x^{d^2} + \ldots + x^{d^n}.$$

Легко видеть, что у $(P(x))^{d_1}$ будет столько ненулевых коэффициентов, сколько есть способов разложить d_1 одинаковых камней по $n+1$ разным коробкам, а это число равно $C_{n+d_1}^{d_1}$. Аналогично, у $(P(x))^{d_2}$ будет $C_{n+d_2}^{d_2}$ ненулевых коэффициентов, а так как $d_1 > d_2$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+d_1}^{d_1}}{C_{n+d_2}^{d_2}} = \infty$$

(в числителе и знаменателе многочлены от n, у многочлена в числителе степень больше). □

Теперь соединим конструкции из леммы 2 и леммы 4.

Лемма 5. *Пусть у многочлена $T(x)$ нулевой и старший коэффициенты положительны, у многочлена $P(x)$ все коэффициенты неотрицательны и среди них ровно a положительных. Тогда при достаточно больших k выполнено соотношение $C(T(x)\cdot P(x^k)) = aC(T)$.*

Доказательство. Достаточно взять k больше, чем степень T, тогда последовательность знаков коэффициентов произведения $T(x)\cdot P(x^k)$ будет выглядеть как повторённая a раз последовательность знаков коэффициентов T, разделённая нулями. □

Теперь мы готовы доказать теорему 1. Исходя из всего вышесказанного, нам достаточно научиться для произвольного $A > 0$ доказывать, что для различных многочленов Q множество значений $C(Q^{d_1})/C(Q^{d_2})$ плотно на $[0; A]$. Пользуясь Леммой 4, возьмём такой многочлен с неотрицательными коэффициентами P, что у P^{d_1} число положительных коэффициентов равно r_1, у P^{d_2} число положительных коэффициентов равно r_2 и $r_1/r_2 > A$. Пусть у многочлена T свободный член и старший коэффициенты положительны, тогда при достаточно большом k выполнены равенства

$$\frac{C((T(x)P(x^k))^{d_1})}{C((T(x)P(x^k))^{d_2})} = \frac{C(T(x)^{d_1}P(x^k)^{d_1})}{C((T(x)P(x^k))^{d_2})} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{C(T^{d_1})}{C(T^{d_2})}.$$

Поэтому если брать $Q(x)$ вида $Q(x) = T_{a,b,\lambda}(x)P(x^k)$, то величины $C(Q^{d_1})/C(Q^{d_2})$ будут плотны на $[0; r_1/r_2]$.

Теорема 1 доказана. □

Замечание. В статье [2] доказано более общее утверждение:

Теорема 2. *Пусть P и Q — многочлены разной степени с целыми коэффициентами, тогда множество значений выражения $s(P(n))/s(Q(n))$ всюду плотно в $\mathbb{R}_+$.*

Коротко опишем, как получить этот результат. Если все коэффициенты у P и Q положительные, то конструкция получается уже знакомым нам образом из многочленов вида $T_{a,b,\lambda}$, а если есть отрицательные коэффициенты, то сначала надо сделать замену $x = y + n$, чтобы от этих отрицательных коэффициентов избавиться.

Замечание. А что происходит, если степени P и Q не обязательно разные? Недавно на одну математическую олимпиаду была предложена такая непростая

Задача (шортлист олимпиады Romanian Master of Mathematics, 2023 г., № 2). Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с неотрицательными целыми коэффициентами, такие что $S(P(n)) = S(Q(n))$ для всех неотрицательных целых чисел n. Докажите, что существует целое число t, такое что $P(x) - 10^t Q(x)$ является постоянным многочленом.

Предлагаем подумать над ней самостоятельно.

Список литературы

[1] Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 11. М.: МЦНМО, 1994.

[2] *Madritsch M., Stoll T.* On Simultaneous Digital Expansions of Polynomial Values // Acta Math. Hungar. 2014. Vol. 143, № 1. P. 192–200.

[3] *Hare K. G., Laishram S., Stoll T.* Stolarsky's conjecture and the sum of digits of polynomial values // Proc. Amer. Math. Soc. 2014. Vol. 139, № 1. P. 39–49.

[4] *Stolarsky K. B.* The binary digits of a power // Proc. Amer. Math. Soc. 1978. Vol. 71, № 1. P. 1–5.

Иван Викторович Митрофанов, Саарский университет
phortim@yandex.ru

Навид Сафаэи, Институт математики и информатики Болгарской академии наук
navid@math.bas.bg; navid11safaei@yahoo.com