

Спуск в графах: задача про телефонные звонки

К. Р. Салихов, А. О. Аллеманд, А. Я. Канель-Белов

Публикуемая статья основана на записях молодого математика Константина Салихова, погибшего в 2010 г. в горах. Подробнее о нём см. ниже в статьях А. Б. Скопенкова и А. И. Буфетова.

В Вечерней математической школе при Московском математическом обществе циркулировала следующая задача (её активно пропагандировал А. К. Ковальджи).

Задача 1. Пусть n друзей знают n новостей: каждый свою новость. За один телефонный звонок человек рассказывает своему абоненту все новости, которые он знает, и узнаёт все новости, которые до этого знал абонент. Пусть $T(n)$ — наименьшее количество звонков, которое в сумме должны сделать n друзей, чтобы каждый из них узнал все n новостей. Найти $T(n)$.

Про эту задачу есть статья <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X72900015>. Там приведено несколько разных решений. Библиография собрана на <https://www.math.uni-bielefeld.de/~sillke/PUZZLES/gossips.pdf>.

Третий из авторов настоящей статьи решил эту задачу и посвятил ей занятие в одном из летних математических лагерей. В дальнейшем первый автор переработал и оформил её в виде листочка для занятий, а второй превратил в статью, которая и следует ниже. Эта тема при-
мыкает к теме «Спуск в графах» (см. *Канель-Белов А. Я., Трепалин А. С., Яценко И. В.* Олимпиадный ковчег. М.: МЦНМО, 2016), являясь её естественным продолжением.

Задача предлагалась под номером 9а в 13-м выпуске 3-й серии сборника «Математическое просвещение» (М.: МЦНМО, 2009, с. 180, предложил А. В. Анджанс).

Решение задачи содержится в статье А. В. Шаповалова «Задача о сплетниках» («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 19, М.: МЦНМО, 2015, с. 249–253). Мы приведём другое решение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Стратегия* — такая последовательность звонков, после которой все знают все новости.

ЗАДАЧА 2. Докажите, что $T(1) = 0$, $T(2) = 1$, $T(3) = 3$, $T(4) = 4$.

ЗАДАЧА 3. Докажите, что (а) $T(n + 1) \leq T(n) + 2$; (б) $T(n + 1) \geq T(n) + 1$; (с) $T(n) \leq 2n - 4$.

ЗАДАЧА 4. Докажите пункты 3(а), 3(б) в задаче про телеграммы (в задаче 1 вместо телефонных звонков рассматриваются телеграммы, в этом случае новости передаются только в один конец). Покажите, что в этом случае $T(n) = 2n - 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Всезнайка* — такой человек, который знает все новости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Поучение* — телефонный разговор, в котором участвуют два человека A и B , причём A знал все новости, которые знал B , ещё до этого разговора.

ЗАДАЧА 5. Пусть имеются n человек и некоторая стратегия, при которой условие задачи выполняется за k звонков. Тогда, если по этой стратегии каким-то звонком Всезнайка кого-то поучает, то для $n - 1$ человек существует такая стратегия, что условие задачи выполняется за $k - 2$ звонка.

РЕШЕНИЕ. Обозначим Всезнайку B , а его «ученика» A . Так как появился Всезнайка, то A уже до поучения разговаривал с кем-то и передал ему свою «личную» новость, которая потом — возможно, через «посредников» — дошла до B . Обозначим самого первого человека, с которым говорил A , через C (C может совпадать и с B , но при этом разговоре B ещё не был Всезнайкой).

Без ограничения общности можно считать, что все звонки происходят в разное время. Тогда переадресуем все телефонные разговоры A , которые произошли до поучения, человеку C в том порядке, в котором они следовали для A (т. е. если в некоторый момент A разговаривал с D , то пусть в этот момент C разговаривает с D). При этом все люди, кроме A и C , ничего не потеряют, а может быть, от каждого разговора с C они будут получать даже больше новостей (и C соответственно тоже), чем от соответствующего разговора с A . Это следует из того, что перед каждым разговором C знает все новости, которые перед соответствующим разговором знал бы A (а может, и ещё несколько).

Теперь рассмотрим разговоры, которые вёл A уже после своего поучения Всезнайкой B . В этих разговорах он будет выступать в роли поучающего Всезнайки, т. е. будет только передавать информацию. Но тогда нам всё равно, какой Всезнайка будет поучать людей, и без ограничения общности можно считать, что это B . Поэтому переадресуем все разговоры, которые вёл A после своего поучения, Всезнайке B . Таким образом, мы откорректировали стратегию звонков, не увеличивая числа k , причём человек A своим первым разговором отдаёт свою «личную» новость, а вторым (и последним) получает все остальные новости от своих друзей. Тогда, если мы из своей стратегии удалим эти два телефонных разговора, то получится стратегия выполнения условия задачи для $(n - 1)$ оставшегося человека за $k - 2$ звонка.

Задача 6. Решите следующее обобщение задачи 5: пусть человек A (не обязательно Всезнайка) в каком-то разговоре поучает человека B . Пусть при этой стратегии производится k звонков. Покажите, что тогда для $n - 1$ человека существует стратегия, при которой производится $k - 2$ звонка.

Задача 7. Докажите, что (а) $T(2n + 1) = T(2n) + 2$; (б) $T(n) \geq \frac{3n}{2}$.

Задача 8. (а) Докажите, что $T(n) \geq 3n/2$, не пользуясь задачей 7(а). (Подсказка: после $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ звонков существует человек, новость которого никто не знает.)

(б) При выполнении стратегии постепенно все люди узнают все новости.

Рассмотрим разговор, после которого не остаётся человека, новость которого (включая его самого) знали не более $k - 1$ человек. Покажите, что $T(n) \geq 2n - n/k$.

(с) Покажите, что $T(n) \leq 2n - 2$.

Задача 9. Докажите, что $T(n) \geq 2n - \log n - 10^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Граф стратегии* — такой граф, каждой вершине которого соответствует человек, а две вершины A и B соединены ребром тогда и только тогда, когда люди A и B в процессе выполнения стратегии разговаривали друг с другом по телефону (если A и B разговаривали несколько раз, то для каждого разговора проводим своё ребро).

Без ограничения общности можно считать, что все звонки происходят в разное время. Все рёбра графа стратегии занумеруем в таком порядке, в каком в процессе выполнения стратегии происходили соответствующие телефонные разговоры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть дан чело век A . Назовём *красными* те телефонные разговоры и соответствующие им рёбра графа стратегии, в которых участвовал хотя бы один человек, знавший новость A ещё до этого разговора.

Назовём *синими* все остальные разговоры и соответствующие им рёбра графа стратегии (т. е. такие, в которых участвовали абоненты, не знавшие новость A).

ЗАДАЧА 10. (а) Пусть m — номер некоторого ребра графа стратегии, A и B — люди, между которыми происходил соответствующий разговор. Через C и D обозначим людей, между которыми происходил разговор $m + 1$. Покажите, что если A и B отличны от C и D , то разговоры m и $m + 1$ можно поменять местами (т. е. разговор между A и B обозначить как $m + 1$, а между C и D — как m), и при этом стратегия будет выполняться.

(б) Дан человек A и некоторая стратегия. Докажите, что тогда можно так перестроить всю стратегию, не меняя количество звонков, что сначала (по времени) будут следовать все синие звонки (причём в том же порядке, в котором они следовали в старой стратегии), а затем все красные (в том же порядке, что и в старой стратегии).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если дана стратегия для n человек за k звонков, то *индукционным спуском* назовём построение стратегии для $n - 1$ человек за $k - 2$ звонка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовём *синим* граф, образованный множеством вершин графа стратегии и множеством синих рёбер графа стратегии.

Назовём *красным* граф, образованный множеством вершин графа стратегии и множеством красных рёбер графа стратегии.

СОГЛАШЕНИЕ. Во всех дальнейших задачах будем считать, что стратегия оптимальна, т. е. она выполняется за $T(n)$ звонков.

ЗАДАЧА 11. (а) Дан человек A и некоторая стратегия. Докажите, что в соответствующем графе стратегии не меньше чем $n - 1$ красное ребро.

(б) В графе стратегии существует вершина степени не выше 4.

(с) Если в графе стратегии существует вершина степени 1, то можно осуществить индукционный спуск.

(д) Пусть в графе стратегии существует вершина степени 3. Докажите, что либо можно осуществить индукционный спуск, либо в синем графе не более 3 компонент связности.

РЕШЕНИЕ. Пункт (d). Обозначим вершину степени 3 через A . Обозначим через A_1 , A_2 и A_3 людей, с которыми последовательно разговаривал A . Прделаем с нашей стратегией ту процедуру, о которой говорится в задаче 10b, и в дальнейшем будем считать, что сначала (по возрастанию номеров) идут все синие рёбра, а затем все красные. Допустим, что существует компонента связности синего графа, в которую не входят точки A_1 , A_2 и A_3 . Обозначим через C одну из вершин этой компоненты. Человек A мог узнать новость C только от A_1 , A_2 или A_3 . Но так как C находится с этими вершинами в разных компонентах в синем графе, до проведения красных рёбер ни A_1 , ни A_2 , ни A_3 не знали новость C . Так как новость C дошла до A , существует путь из красных рёбер, соединяющий вершину A и одну из вершин компоненты связности синего графа, содержащей вершину C . Без ограничения общности можно считать, что это C . Можно также считать, что если двигаться по красным рёбрам от вершины C к A , то номера красных рёбер будут возрастать (иначе новость C не дойдёт до A).

Теперь построим путь, начинающийся из вершины C , следующим образом. Выберем человека B , от которого C впервые узнал новость A , и сдвинемся по соответствующему красному ребру (это ребро имеет наименьший номер из всех красных рёбер, выходящих из C). Для этой вершины B опять выберем другого человека, от которого B впервые узнал новость A , и так далее. Двигаясь таким образом, мы в конце концов придём к A , причём если двигаться по этому пути от A к C , то номера красных рёбер всё время будут возрастать. Заметим, что номер красного ребра, по которому к C пришла новость A , не больше, чем номер красного ребра, по которому от C ушла его новость к A . Если эти номера равны, то они ведут в одну вершину. Тогда обозначим эту вершину через C_1 . Для этой вершины номер красного ребра, по которому шла новость A к C , меньше номера красного ребра, по которому от C шла новость к A .

Таким образом, мы получили путь из красных рёбер, начинающийся и заканчивающийся в A , причём если двигаться по этому пути, номера красных рёбер всё время возрастают. Рассмотрим ребро, с которого начинается этот путь. Это либо ребро AA_1 , либо AA_2 (ребро AA_3 здесь не может быть, так как номер последнего ребра этого пути больше номера первого, а AA_3 — это красное ребро с наибольшим номером, которое выходит из A). Аналогично последнее ребро — это либо AA_2 , либо AA_3 . Таким образом, нам надо разобрать 3 варианта.

(а) Первое ребро AA_1 , последнее AA_2 . Если обозначить вершины нашего пути через $A_1, B_2, \dots, B_m, A_2$, двигаясь по возрастанию номе-

ров красных рёбер, то человек A_1 знал после разговора AA_1 не меньше, чем A ; человек B_2 после разговора B_2A_1 — не меньше, чем A_1 , и так далее. Значит, A_2 знал перед разговором с A не меньше, чем A (во время разговоров $A_1B_2, B_2B_3, \dots, B_mA_2$ человек A ни с кем не разговаривал). Итак, мы имеем поучение человека A человеком A_2 , а значит — индукционный спуск.

(b) Первое ребро AA_2 , последнее AA_3 . Аналогично случаю 1.

(c) Докажите самостоятельно. (В данном случае у нас нет поучений. Подумайте, как преобразовать стратегию, чтобы они появились.)

Задача 12. (a) Если в графе стратегии существует вершина степени 3, то либо можно осуществить индукционный спуск, либо $T(n) \geq 2n - 5$.

(b) Пусть в графе стратегии существует вершина степени 2. Докажите, что либо можно осуществить индукционный спуск, либо $T(n) \geq 2n - 4$.

Константин Рафаилович Салихов

Аллан Олегович Аллеманд, мехмат МГУ

allan.suleykin@math.msu.ru

Алексей Яковлевич Канель-Белов, МФТИ, университет Бар-Илана

kanelster@gmail.com