Задачник

(составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

Обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

На базе решения трудной задачи неоднократно появлялась научная статья (в том числе у школьника), а также доклад на конференции (школьной или взрослой). Так что призываем присылать решения опубликованных задач. Составители задачника помогут с публикациями и докладами на конференциях.

1. На плоскости даны три луча с общим началом и три точки, не лежащие на одной прямой и не лежащие на объединении этих лучей. Постройте треугольник так, чтобы его вершины лежали на этих лучах, а каждая сторона (или её продолжение) проходила через одну из заданных точек. (*Фольклор*)

2. В ряд записано n неотрицательных чисел с суммой S. За одну операцию разрешается выбрать два соседних числа, стереть их, а на их месте написать удвоенный максимум этих чисел. Докажите, что операции можно проводить так, чтобы через $n-1$ шагов осталось число, не превосходящее $4S$. (*С. Слободник*)

3. Все стороны и диагонали четырёхугольника не превосходят 1. Каково максимально возможное значение его периметра?

   (*Фольклор*)

4. При каком максимальном n может быть так, что 12 камней попарно разных масс можно n различными способами разделить на две кучи, равные по количеству камней и по суммарной массе?

   (*Л. Радзивиловский*)

5. Существует ли последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ такая, что $a_n \leqslant n^{10}$ и при этом ни один член последовательности не равен сумме нескольких других (различных)? (*С. В. Конягин*)

6. Пусть $f(z_0, \ldots, z_n)$ — функция $(n+1)$ комплексной переменной, аналитическая в окрестности нуля. Пусть при этом $f(0) = 0$ и $f(z_0, 0, \ldots, 0) \not\equiv 0$. Докажите, что для некоторого натурального k функция имеет в некоторой окрестности нуля следующий вид:

   $$f(z_0, \ldots, z_n) = \\ = W(z_0, \ldots, z_n)\left(z_0^k + f_1(z_1, \ldots, z_n)z_0^{k-1} + \ldots + f_k(z_1, \ldots, z_n)\right),$$

   где f_i, W — аналитические в окрестности нуля функции, причём $W(0, \ldots, 0) \neq 0$.

   Комплексная функция нескольких переменных $g(z_1 \ldots, z_n)$ называется *аналитической в окрестности нуля*, если в некоторой окрестности нуля она определена и может быть представлена в виде сходящегося степенного ряда:

   $$g(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0}^{\infty} c_{k_1, k_2, \ldots, k_n} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n},$$

   где коэффициенты $c_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ — комплексные числа.

   (*Подготовительная теорема Вейерштрасса*)

7. Докажите, что для любого набора положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ выполнено неравенство

   $$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > n \cdot \frac{1}{4}.$$

   Можно ли при этом число $1/4$ заменить на большее?

   (*По мотивам Всесоюзной олимпиады школьников*, 1969 *год*)

8. Докажите, что либо вершины графа можно правильно покрасить в четыре цвета, либо в графе найдутся два простых цикла, имеющие ровно две общие вершины. (*М. Пименов*)

9. *Бесквадратное* (т. е. не делящееся на квадрат простого) натуральное число n называется *почти простым*, если оно для любого натурального x делит величину
$$x^{d_1}+x^{d_2}+\ldots+x^{d_k}-kx,$$
где $1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n$ — все натуральные делители числа n. Пусть r есть *простое число Ферма* (т. е. простое число вида $2^{2^m}+1$), и пусть простой делитель p почти простого r удовлетворяет сравнению $p\equiv 1 \pmod r$. Докажите, что тогда $d_i\equiv 1 \pmod r$ при всех i, $1\leqslant i\leqslant k$. (*Tigran Hakobyan, IMC* 2024)

10. а) При каких m и n существует m комплексных попарно антикоммутирующих ортогональных матриц размера $n\times n$?
б) При каких m и n существует m ортогональных комплексных матриц $n\times n$, линейно независимых над $\mathscr{C}$ и попарно коммутирующих?
(Матрица A *ортогональна*, если $AA^T=1$. Матрицы A и B *антикоммутируют*, если $AB=-BA$.) (*А. Я. Канель-Белов*)

11. Коника K касается сторон треугольника. Докажите, что коника с тем же центром, проходящая через середины сторон треугольника, касается K в двух точках. (*А. А. Заславский, Ф. К. Нилов*)

12. (а) Пусть $F_{\{a,b\}}$ — свободная группа на двух образующих a и b. Пусть W — бесконечное вправо слово, состоящее из букв a и b, не периодичное ни с какого места. Пусть n — натуральное число, а S_n — множество всех элементов из $F_{\{a,b\}}$, которые записываются как подслова длины n слова W. Докажите, что множество S_n порождает в $F_{\{a,b\}}$ подгруппу индекса n.
(*И. В. Митрофанов, IMC* 2024)
(б) Приведите пример такой не периодичной ни с какого места последовательности W, что для любого n множество S_n образует базис свободной подгруппы, то есть между элементами из S_n нет соотношений, кроме тривиальных. (*V. Berthe, C. Felice, F. Dolce, D. Perrin, Ch. Reutenauer, G. Rindone*)

13. а) В таблице 100×100 расставлены нули и единицы. За один такт во всех прямоугольниках, в вершинах которых стоят 3 единицы и один ноль, этот ноль меняется на единицу (стороны прямоугольников параллельны сторонам таблицы). После какого числа тактов числа в таблице гарантированно перестанут меняться?
(*А. А. Разборов*)

б) Аналогичный вопрос, если за такт замена происходит только в одном месте. (*А. Я. Канель-Белов*)

14. а) Может ли ряд Фурье 2π-периодической непрерывной функции расходиться во всюду плотном множестве точек?

    б) Функция f называется *суммируемой* по отрезку $[a, b]$, если интеграл Лебега её модуля $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$ конечен.

    Может ли ряд Фурье 2π-периодической суммируемой по периоду функции расходиться во всех точках? (*А. Н. Колмогоров*)

15. *Множество Кантора* K состоит из тех чисел отрезка $[0; 1]$, у которых в троичной записи есть представление, не содержащее единиц. Пусть X — метрическое пространство, K_1 и K_2 — образы множества Кантора при вложениях (то есть инъективных непрерывных отображениях $K \to X$).

    Докажите, что существует гомеоморфизм $f: X \to X$, переводящий K_1 в K_2, если

    (а) $X = \mathbb{R}$;

    (б) $X = \mathbb{R}^2$.

    (в) Верно ли аналогичное утверждение для трёхмерного пространства? (*А. Я. Канель-Белов*)