Дополнение и комментарии к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и естественность задачи. Оно так важно в том числе и по этой причине. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы).

При публикации дополнения к задачнику нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут обнаружиться как с классикой, так и с сюжетами, которые находятся в процессе исследования и ещё не получили изящной формулировки.

В выпуске 4 (с. 216, см. решение: выпуск 5, с. 228–229) опубликована

Задача 4.8. Решите функциональное уравнение для непрерывных вещественных функций вещественного переменного:

$$F(x+y)=A(x)+B(x)C(y).$$

(*А. Я. Канель-Белов, Б. Р. Френкин*)

В выпуске 28 (с. 239) опубликована родственная

Задача 4.8$'$. Решите функциональное уравнение для непрерывных вещественных функций вещественного переменного:

$$\Phi(a+b+c)=\phi(a)\phi(b)\phi(c).$$

(*Дж. Максвелл*)

В этой связи предлагаем подумать над *функциональным неравенством* (выпуск 29, с. 261):

Задача 4.8$''$. (a) Пусть функция f вещественного переменного удовлетворяет функциональному неравенству $|f(x+y)-f(x)-f(y)|<1$. Докажите, что существует решение g *уравнения Коши* $g(x+y)=g(x)+g(y)$ такое, что $|f(x)-g(x)|<1$. (*U. Vishne*)

По аналогии возникает задача

(б) Решите функциональное неравенство:

$$|F(x+y)-(A(x)+B(x)C(y))|<1. \qquad (\textit{А. Я. Канель-Белов})$$

Функциональные уравнения — распространённая олимпиадная тема, особенно на Международной математической олимпиаде (см. также: 18-я Летняя конференция международного математического Турнира городов, 2006. Задача 3. «Функциональные уравнения» `https://www.turgor.ru/lktg/2006/3/index.htm`). Удивительно, что тема *функциональных неравенств* на олимпиадах практически не представлена.

В продолжение сюжета:

Задача 4.8$'''$. (а) *Существует ли на вещественной оси непрерывно дифференцируемая функция* $f(x)>0$ *такая, что* $f'(x)>f(f(x))$?

(б) *Докажите, что следующая система функциональных неравенств не имеет решения*:

$$f(x)>0, \quad f(x+y)>f(x)+y\cdot f(f(x)).$$

(в) *Существует ли непрерывная неубывающая функция* f *на отрезке* $[0,1]$ *такая, что* $f(x/3)=f(x)/2$ *и* $f(x)+f(1-x)=1$ *при всех* x?

(г) *Найдите все непрерывно дифференцируемые функции* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *удовлетворяющие уравнению*

$$f(x+y)-f(x-y)=2yf'(x). \qquad (\textit{Л. Радзивиловский})$$

В выпуске 6 (с. 134, см. решение: выпуск 9, с. 227–229 и выпуск 17, с. 198–199) опубликована

Задача 6.11. Рассматриваются слова от букв русского алфавита. Слова вида sut и $suut$ имеют одинаковый смысл (здесь s, u, t — произвольные слова, возможно, пустые). Докажите, что количество различных смыслов конечно. (*Фольклор*)

В продолжение темы:

Задача 6.11$'$. (а) *Рассматриваются слова от букв русского алфавита. Слова вида* sut *и* su^3t *имеют одинаковый смысл* (*здесь* s, u, t — *произвольные слова, возможно, пустые*). *Докажите, что количество различных смыслов конечно.*

(б) *Аналогичный вопрос, если одинаковый смысл имеют слова* sut *и* su^4t.

(*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 7 (с. 187, см. решение: выпуск 8, с. 259–260) опубликована

Задача 7.2. Допустим, что любую конечную карту на плоскости можно правильно раскрасить в 4 цвета. Докажите, что тогда произвольную карту на плоскости также можно правильно раскрасить в 4 цвета. (Страны можно считать многоугольниками. Раскраска называется *правильной*, если любые две страны с общим участком границы раскрашены в разные цвета.) (*А. Я. Белов*)

В продолжение темы:

Задача 7.2′. *В любом бесконечном множестве вещественных чисел можно найти бесконечное подмножество идущих в порядке возрастания или идущих в порядке убывания.* (*Л. Радзивиловский*)

В выпуске 9 (с. 223–224, см. решение: выпуск 12, с. 237–238) опубликована

Задача 9.6. Рассмотрим всевозможные однокруговые турниры n шахматистов. Для каждого турнира найдём количества $s_1 \leqslant \dots \leqslant s_n$ очков, набранных игроками, и возьмём в n-мерном пространстве точку с координатами $(s_1, \dots, s_n)$. Доказать, что выпуклая оболочка этих точек является $(n-1)$-мерным многогранником, комбинаторно эквивалентным соответствующему кубу, а его вершины соответствуют турнирам, в которых в любой паре участников набравший больше очков выигрывает в личной встрече.

(*А. А. Заславский, А. В. Спивак*)

В продолжение турнирного сюжета:

Задача 9.6′. *Для каких n футбольный турнир в один круг мог окончиться результатом, когда у каждой команды столько же выигрышей, сколько ничьих*? (*Фольклор*)

В выпуске 9 (с. 224, см. решение: выпуск 10, с. 265–272) опубликована

Задача 9.10. При каких α, β, γ существует непрерывная функция, определённая на отрезке длины γ, интеграл от которой по любому отрезку длины α положителен, а по любому отрезку длины β — отрицателен? (*П. Самовол*)

В продолжение сюжета:

Задача 9.10′. *При каких m, n существует таблица $m \times n$, заполненная числами такая, что сумма в каждом подквадрате $k \times k$ положительна, а сумма в каждом подквадрате $l \times l$ отрицательна*?

(*Л. Радзивиловский, А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 13 (с. 180, поправка: выпуск 24, с. 177, см. решение: выпуск 29, с. 275–279) опубликована

Задача 13.8. Непрерывная функция f такова, что

$$\int_0^1 x^k f(x)\,dx = 1 \quad \text{для любого}\ \ k \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Докажите, что $\int_0^1 (f(x)^2)\,dx \geqslant n^2$. (*SEEMOUS* 2008, *Mircea Dan Rus*)

В продолжение темы:

Задача 13.8′. *Рассмотрим всевозможные выпуклые функции $f(x)$ такие, что $f(0)=0$, $f(1)=1^2$, $f(2)=2^2$, $f(3)=3^2$, $f(4)=4^2$, $f(5)=5^2$. Каков минимум интеграла*

$$\int_0^5 f(x)\,dx\,?$$ (*Л. Радзиviловский*)

В выпуске 26 (с. 267, см. решение: выпуск 32, с. 193) опубликована

Задача 26.8. Пусть 2019 точек случайно, независимо и равномерно распределены на единичном диске $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, и пусть C есть их выпуклая оболочка. Какая вероятность больше: что C — треугольник или что C — четырёхугольник? (*Ф. В. Петров*)

В развитие сюжета:

Задача 26.8″. *Даны $n > d$ случайных точек $x_1, \ldots, x_d$, равномерно распределённых в d-мерном шаре B. Пусть $f(p)$ — вероятность того, что точка $p \in B$ попадёт в выпуклую оболочку множества $\{x_i\}_{i=1}^d$. Пусть расстояние от точки $p \in B$ от центра B меньше расстояния от точки $q \in B$ до центра B. Докажите, что $f(p) > f(q)$.*

(*Ф. В. Петров*)

В выпуске 27 (с. 234) опубликована

Задача 27.5. (а) Для любых ли длин биссектрис существует треугольник с такими биссектрисами и однозначно ли определяется?

(б) Можно ли построить треугольник по трём биссектрисам циркулем и линейкой? (*Фольклор*)

В этой связи хочется вспомнить классику с разнообразными решениями:

Задача 27.5′. *Докажите, что если две биссектрисы равны, то треугольник равнобедренный.* (*Фольклор*)

В выпуске 29 (с. 257) предложена

Задача 29.8. Многочлены P, Q с целыми коэффициентами степени ровно n не имеют общих корней, $R(x) = P(x)/Q(x)$. Натуральное число q есть *знаменатель* $d(\alpha)$ рационального числа α, если $\alpha = p/q$ и дробь p/q несократима. Положим $d(0) = 1$. Докажите, что существует такая величина $C(R) > 0$, зависящая только от R, что при всех $\alpha \in \mathbb{Q}$ выполняется неравенство $(R(\alpha)) > C(R) \cdot d(\alpha)$. (*С. Ленг, «Алгебра»*)

В продолжение темы, связанной с функциональным алгоритмом Евклида:

Задача 29.8′. (а) *Докажите, что существует* многочлен Чебышёва $T_n(x)$ *такой, что*

$$T_n\left(\frac{x+x^{-1}}{2}\right) = \frac{x^n + x^{-n}}{2}.$$

При этом $T_n(\cos\varpi) = \cos n\varpi$.

Как известно, *n-е число Каталана c_n* равно количеству правильных скобочных структур из n пар скобок: $c_0 = c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 5$, $\ldots$. Докажите рекуррентное соотношение:

$$c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \ldots + c_n c_0.$$

Пусть

$$C(x) := c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

есть *производящая функция* для чисел Каталана. Тогда

$$C(x) - 1 = x \cdot (C(x))^2.$$

(б) *При $n > 1$ в степенных рядах*

$$y \cdot \frac{T_n\left(\frac{1}{2y}\right)}{T_{n-1}\left(\frac{1}{2y}\right)} \quad и \quad 1 - c_0 y^2 - c_1 y^4 - c_2 y^5 - \ldots$$

совпадают младшие коэффициенты до степени y^{2n-4} включительно.
(*А. Е. Артисевич, Б. С. Бычков, А. Б. Шабат*)

В выпуске 33 (с. 184) предложена

Задача 33.7. С величиной $\varepsilon > 0$ свяжем геометрическое место точек $M_\varepsilon = (x, y, z)$, для которых

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, \\ x^2 + y^2 - z^2 \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Пусть объём M_ε равен V_ϵ. Найдите $\lim_{\varepsilon\to 0} V_\varepsilon/\varepsilon$. (*Л. Радзиviловский*)

В этой связи стоит напомнить классический факт:

Задача 33.7$'$. (а) *Докажите, что объём ε-окрестности n-мерного выпуклого многогранника M есть многочлен n-ой степени $P_M(\varepsilon)$.*

Частный случай весьма полезен методически:

(б) *Найдите объём единичной окрестности единичного куба.*

(*Фольклор*)

В выпуске 33 (с. 185) предложена

Задача 33.8. (а) Разбиение многоугольника на треугольники называется *антитриангуляцией*, если никакая пара треугольников разбиения не имеет общей стороны. Для каких k можно антитриангулировать треугольник на k треугольников?

(б) При каких n можно антитриангулировать выпуклый n-угольник?

(*Н. Б. Васильев, П. А. Кожевников*)

В продолжение темы:

Задача 33.8$'$. (а) *Обобщите результаты задачи* 33.8 *для разбиения на k-угольники, для разбиения плоского тора* (плоский тор — *это квадрат со склеенными парами противоположных сторон*), *а также для поверхностей рода $g > 1$.*

(б) *Можно ли разбить куб на тетраэдры без общих граней? А произвольный многогранник? А на тетраэдры без общих рёбер? Подумайте над многомерным обобщением.* (*Н. Б. Васильев*)