

---

---

# Филдсовские медали — 2022

---

---

## Заполняя пробелы: о работах Дж. Мейнарда

А. Ю. Окуньков, Б. Р. Френкин

Эти заметки основаны на статье А. Ю. Окунькова [1]. Обработка для «Математического просвещения» проведена Б. Р. Френкиным. Цель заметок — разделить с читателем восхищение результатами филдсовских лауреатов 2022 года, используя максимально доступный, но точный математический язык. В конце указана литература, позволяющая расширить и углубить понимание предмета.



Дж. Мейнард

### §1. Античное решето

Основная теорема арифметики гласит, что любое натуральное число, большее чем 1, раскладывается в произведение простых, причём единственным образом с точностью до порядка множителей. «Это

факт, что простые числа столь фундаментальны (будучи строительными блоками целых чисел), но всё ещё столь таинственны и малопонятны, и это делает их столь привлекательными для меня», — говорит Джеймс Мейнард, герой этих заметок. Каннан Сундарараджан, выступая при награждении Мейнарда филдсовской медалью на Международном математическом конгрессе в 2022 году, соглашается: «Как и многие другие, я был увлечён крайней простотой формулировки задач о простых числах и поразительной трудностью доказательства чего-либо о них. Особенно впечатляли проблема близнецов и проблема Гольдбаха. Замечательно быть свидетелем таких блестящих достижений последних двадцати лет, как теорема Грина — Тао<sup>1)</sup> и результаты об интервалах между простыми».

К Эратосфену (276–195/194 гг. до н. э.) восходит следующий метод перечисления простых. Последовательно вычёркиваем из списка всех целых чисел все кратные двойке (кроме неё самой), затем аналогично кратные тройке и т. д. В итоге список полон дыр, подобно решету. Поэтому методы, выделяющие простые числа из более широкого множества (например, всех целых) путём последовательного удаления лишних элементов, носят название *методов решета*.

Простые, отличающиеся на 2, называются *близнецами*. Это простейшие рифмы в таинственной поэме простых чисел. Бесконечность количества близнецов — старый, но до сих пор открытый вопрос. Однако последние годы увидели потрясающий прогресс в нашем понимании расположения простых. Он был отмечен, в частности, филдсовской медалью, которой награждён в 2022 году Джеймс Мейнард.

В этих заметках мы попытаемся дать очень элементарное введение в этот раздел теории чисел и некоторые результаты Мейнарда и его предшественников. Новичкам в этой области желаем некоторого терпения и надеемся, что оно будет вознаграждено чувством восхищения, которое вызывает такая математика.

## § 2. Последние цифры и остатки

Если число чётно и не равно 2, то оно не может быть простым. Поэтому существует только одно простое число с последней цифрой 2 и не существует простых с последней цифрой 4, 6, 8 или 0. Точно так же существует лишь одно простое число с последней цифрой 5. Оказывается, остальные 4 цифры появляются на конце простых при-

<sup>1)</sup> Множество всех простых чисел содержит арифметические прогрессии произвольной длины (2004 г.). — *Прим. ред.*

мерно одинаково часто. Вообще, если  $b$  — натуральное число, то простые примерно поровну<sup>2)</sup> распределены между теми классами вычетов  $a$  по модулю  $b$ , для которых  $\text{НОД}(a, b) = 1$ , а в остальных классах вычетов содержится не более чем по одному простому.

В целом опыт исследования простых чисел показывает, что они ведут себя так, как если бы были распределены случайно, с точностью до некоторых ограничений, которые накладываются, в том числе, рассмотрением остатков. Поэтому имеет смысл, следуя Г. Крамеру, ввести некоторые вероятностные термины и представления.

### § 3. Плотность простых чисел

Пусть  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  — множество всех натуральных чисел,  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$  — любое его подмножество. Определим его *плотность* в натуральном ряду как

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{A} \cap \{1, \dots, N\}|}{N},$$

если этот предел существует. Также будем называть этот предел *вероятностью* попадания случайного натурального числа в  $\mathcal{A}$ .

Можно показать, что для любого натурального  $N > 1$

$$\prod_{\text{все простые } p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \geq \ln N + \gamma + o(1),$$

где

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \ln N - \sum_1^N \frac{1}{N} \right) = 0,57721 \dots$$

— *константа Эйлера*. Обратная величина является плотностью простых на отрезке  $\{1, \dots, N\}$ . При  $N \rightarrow \infty$  эта плотность стремится к нулю:

$$\prod_{\text{все простые } p} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0.$$

Любопытно, что отсюда можно также получить, что

$$\sum_{\text{простые } p} \frac{1}{p} = +\infty,$$

т. е. плотность простых нулевая, но их достаточно много, чтобы сумма обратных величин расходилась. Впервые это заметил Эйлер.

<sup>2)</sup> На самом деле это положение устанавливается не сразу, а по мере продвижения к большим простым. Насколько быстро — один из важнейших технических вопросов в данном разделе теории чисел.

## § 4. ТЕОРЕМА О КОЛИЧЕСТВЕ ПРОСТЫХ

С какой скоростью плотность простых стремится к нулю при росте  $N$ ? Теорема о количестве простых, которую доказали Адамар и Валле-Пуссен в 1896 г., утверждает, что плотность простых вблизи большого натурального  $N$  близка к  $1/\ln N$ .

Точная формулировка использует функцию  $\pi(x)$  — количество простых, не превосходящих  $x$ . А именно,

$$\pi(x) \sim \text{Li}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_2^x \frac{dy}{\ln y} \sim \frac{x}{\ln x},$$

где  $f_1(x) \sim f_2(x)$  означает, что  $f_1(x)/f_2(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow \infty$ . При этом  $\text{Li}(x) - \pi(x)$  меняет знак бесконечно много раз, а логарифмический интеграл  $\text{Li}(x)$  даёт гораздо лучшее приближение к  $\pi(x)$ , чем  $x/\ln x$ , хотя все три функции растут одинаково быстро.

Адамар и Валле-Пуссен использовали некоторые свойства дзета-функции Римана  $\zeta(s)$  при комплексных  $s$ . Дзета-функция определяется при  $\text{Re } s > 1$  как

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

и аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, кроме точки  $s = 1$ . Знаменитая гипотеза Римана, от которой зависят очень многие теоремы о простых числах, состоит в том, что все нули дзета-функции либо имеют действительную часть  $1/2$ , либо являются т. н. тривиальными нулями  $-2, -4, -6, \dots$  Джон Мейнард говорит об этом: «Гипотеза Римана предполагает, что в простых числах скрыта глубокая структура. Для этого нужна веская причина — но мы пока не знаем, что это за причина».

## § 5. ПЕРВОЕ ПОЯВЛЕНИЕ РЕШЕТА

Пусть  $\mathcal{A}$  — произвольное множество,  $\mathcal{A}_p$  — его подмножества, индексированные элементами некоторого множества  $\mathcal{P}$ . Мы хотим «отсеять» их из  $\mathcal{A}$  и найти мощность множества  $\mathcal{A} \setminus \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \mathcal{A}_p$ .

Принцип включения-исключения гласит, что для нашей цели нужно подсчитать элементы в  $\mathcal{A}$ , вычесть мощности всех множеств  $\mathcal{A}_p$ , прибавить мощности их попарных пересечений, вычесть мощности пересечений по три и т. д. В частности, если события, состоящие

в принадлежности к различным  $\mathcal{A}_p$ , независимы, то

$$\frac{|\mathcal{A} \setminus \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \mathcal{A}_p|}{|\mathcal{A}|} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{|\mathcal{A}_p|}{|\mathcal{A}|}\right). \quad (1)$$

В нашем случае  $\mathcal{A}$  всегда будет означать некоторое множество целых чисел или остатков от деления, а  $\mathcal{A}_d$  — множество тех из них, которые делятся на число  $d$ . Если  $\mathcal{P}$  состоит из простых чисел  $p_1, \dots, p_r$ , то

$$\mathcal{A}_{p_1} \cap \mathcal{A}_{p_2} \cap \dots \cap \mathcal{A}_{p_r} = \mathcal{A}_{p_1 p_2 \dots p_r}.$$

В методах решета главная трудность состоит в том, что в формулах вида (1) независимость лишь приближительна. Например, выберем большое  $x$  и рассмотрим множества

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{\text{целые } n, \sqrt{x} < n \leq x\}, \\ \mathcal{P} &= \{\text{простые } p, p \leq x\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Исключив из  $\mathcal{A}$  элементы, кратные числам из  $\mathcal{P}$ , получим в точности простые из промежутка  $(\sqrt{x}, x]$ . Следовательно,

$$\left| \mathcal{A} \setminus \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \mathcal{A}_p \right| = \pi(x) - \pi(\sqrt{x}) \sim \frac{x}{\ln x}$$

по теореме о количестве простых. Посмотрим, можно ли, наоборот, получить эту теорему с помощью решета (2).

При фиксированных  $p_1, \dots, p_r$  равенство (1) выполняется в пределе при  $x \rightarrow \infty$ . Однако при конечных  $x$  имеются остаточные члены, которые делают последующее рассуждение *ошибочным*. Некорректный переход мы пометим знаком ???.

При отсутствии остаточных членов мы бы получили следующее:

$$\frac{\pi(x) - \pi(\sqrt{x})}{x - \sqrt{x}} \sim \frac{\pi(x)}{x} \stackrel{???}{\sim} \prod_{\text{простые } p \leq \sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Точный результат принадлежит Ф. Мертенсу:

$$\prod_{\text{простые } p \leq \sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{2e^{-\gamma}}{\ln x},$$

где  $\gamma \approx 0,57721 \dots$  — константа Эйлера. Поскольку  $2e^{-\gamma} \approx 1,123$ , предыдущее выражение довольно близко к правильному и содержит правильную логарифмическую зависимость от  $x$ , но трудно сказать ещё что-либо в его защиту.

Этот пример предназначен показать трудность построения хорошего решета, но не удержать читателя от дальнейшего чтения! См также ссылки в конце статьи, в частности [8].

## § 6. КОНФИГУРАЦИИ ПРОСТЫХ

До сих пор мы рассматривали одноточечные корреляции в множестве простых чисел. Но если мы считаем простые числа «случайными» настолько, насколько позволяют ограничения, наложенные вычетами и плотностью, то придётся рассматривать и многоточечные корреляции — между парами простых, тройками и т. д.

Начнём с конкретного примера. Какова вероятность, что  $n$  и  $n + 1$  просты? Разумеется, нуль, так как одно из этих чисел чётно и только  $n = 2$  подойдёт. А какова вероятность, что просты  $n$  и  $n + 2$ ? Это так называемые *числа-близнецы*, и они отлично подходят как тест для вероятностной интуиции, основанной на соображениях плотности и вычетов. Следует ожидать, что плотность близнецов около  $N$  будет примерно  $(\ln N)^{-2}$ . Но нужно учесть вычеты. Если бы  $n$  и  $n + 2$  были действительно независимы, то вероятность для каждого из них быть взаимно простым с  $p$  составляла бы  $(1 - 1/p)^2$ , а в действительности она равна  $1/2$  при  $p = 2$  и  $(1 - 2/p)$  при  $p > 2$ . Отсюда возникла гипотеза 1923 г. Харди — Литтлвуда:

$$\pi_2(x) = |\{p \leq x : p + 2 \text{ простое}\}| \stackrel{?}{\sim} C_2 \int_2^x \frac{dy}{(\ln y)^2}, \quad x \rightarrow \infty,$$

где

$$C_2 = 2 \prod_{\text{простые } p > 2} \frac{1 - \frac{2}{p}}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2} = 1,32 \dots$$

Точно так же вероятность, что  $n$  и  $n + 2m$  взаимно просты с  $p$ , равна  $(1 - 1/p)$ , если  $2m$  делится на  $p$ , и  $(1 - 2/p)$  в противном случае. Отсюда возникает аналог гипотезы Харди — Литтлвуда для произвольного  $m$ :

$$|\{p \leq x : p + 2m \text{ простое}\}| \stackrel{?}{\sim} C_{2m} \int_2^x \frac{dy}{(\ln y)^2}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где

$$\frac{C_{2m}}{C_2} = \prod_{\substack{p|m, \\ p \neq 2 \text{ простые}}} \frac{p-1}{p-2} \geq 1.$$

Эта гипотеза блестяще подтверждается при проверке на компьютере. Из неё следует, что расстояния между простыми чаще всего близки к произведениям последовательных нечётных простых, а степени двойки в этой роли наименее вероятны.

Мы говорили о расстояниях между простыми, не обязательно соседними. Но по мере удаления от нуля простые встречаются всё реже, так что вероятность найти простое внутри промежутка данной длины уменьшается.

Та же эвристика применима к любому конечному множеству скачков между простыми

$$J = \{j_1 < j_2 < \dots < j_\ell\} \subset \mathbb{N}. \quad (5)$$

Положим  $n + J = \{n + j_1 < \dots < n + j_\ell\}$ , и пусть запись  $n + J \subset \mathcal{P}$  означает, что все  $n + j_i$  простые. По аналогии с (4) естественно ожидать, что

$$|\{n \leq x =: n + J \subset \mathcal{P}\}| \stackrel{?}{\sim} C_J \int_2^x \frac{dy}{(\ln y)^{|J|}}, \quad x \rightarrow \infty,$$

где

$$C_J = \prod_p \frac{1 - \frac{|J \pmod{p}|}{p}}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{|J|}}, \quad (6)$$

а  $|J \pmod{p}|$  обозначает количество в  $J$  различных классов вычетов по модулю  $p$ . При фиксированном  $J$  это количество для достаточно больших  $p$  равно  $|J|$ , поэтому вклад больших  $p$  в (6) имеет порядок  $1 + O(1/p^2)$  и произведение (6) сходится. Таким образом, наборы простых чисел предпочитают те  $J$ , которые содержат меньшую долю вычетов по модулю какого-либо простого  $p$ .

## § 7. ЗАПОЛНЯЯ ПРОМЕЖУТКИ МЕЖДУ ПРОСТЫМИ

Будем называть набор  $J$  из (5) *допустимым*, если  $C_J \neq 0$ . Гипотеза Диксона (1904 г.) состоит в том, что любой допустимый набор появляется в качестве набора промежутков между простыми числами бесконечно много раз. В частности, это означало бы, что множество чисел-близнецов бесконечно (*гипотеза о простых числах-близнецах*). В последние годы достигнут впечатляющий прогресс в доказательстве этих гипотез. Он побуждает сказать, что обе гипотезы «почти» доказаны — на наших глазах люди достигают звёзд.

Джеймс Мейнард придерживается несколько иного мнения: «Не смотря на весь нынешний прогресс, похоже, что мы не нашли какую-то важную идею для доказательства гипотезы о простых близнецах. Но, возможно, это лишь одна большая идея».

Разумеется, реальная математика, используемая в этих доказательствах, соотносится с тем, что рассказано выше (в § 5), как современный самолёт с бумажным. Но по нашему рассказу можно представить, какая творческая сила и какое мастерство требуются, чтобы с помощью методов решета достичь прорывных результатов, о которых пойдёт речь ниже.

Из теоремы о простых числах следует, что для любой константы  $c > 1$  существует бесконечно много пар простых  $p_1, p_2$ , для которых

$$p_1 < p_2 < p_1 + c \ln p_1.$$

Не так легко доказать то же самое для  $c < 1$ . В итоге это сделали Голдстон, Пинц и Йилдирим, показав, что бесконечно много таких пар существует при любом  $c > 0$ . Новые важные идеи, выдвинутые ими, дали старт попыткам заменить  $c \ln p_1$  на какую-либо константу  $B$ . Это соревнование весьма драматически выиграл в апреле 2013 года Итан Чжан.

В современной математике даже гораздо более скромные результаты требуют новых путей сквозь дебри возможных подходов, методов и логических конструкций, а потому необходимы моменты чрезвычайной концентрации и ясности ума. Итан Чжан должен был, кроме того, преодолеть множество поворотов в своей трудной неакадемической карьере, но он не сдался, и большой успех пришёл к нему в возрасте 55 лет. Поэтому его результат особенно впечатляет и вдохновляет. Итан Чжан получил множество наград от научного сообщества, такие как премия Островского за 2013 г., премия Коула за 2014 г. и премия Рольфа Шока за 2014 г. В том же 2014 г. премию Коула по теории чисел получили также Голдстон, Пинц и Йилдирим за важную работу, отмеченную выше.

Вернёмся к главному герою этих заметок — филдсовскому лауреату 2022 года. В том же богатом событиями 2013 году Джеймс Мейнард понял, что может сделать метод решета гораздо эффективнее и превзойти результат Чжана в двух важнейших отношениях: получить более сильный результат более простым методом. Часто говорят, что великие умы мыслят похоже. Терри Тао пришёл к тем же результатам одновременно и независимо от Джеймса Мейнарда. «Я был слегка ошарашен новостью, но, к счастью, Тао отнёсся великодушно и с пони-

манием. Одновременные открытия случаются чаще, чем можно себе представить!» — говорит Джеймс Мейнард.

Чтобы объяснить результат Мейнарда и Тао о малых промежутках между простыми, важно несколько переменить угол зрения. В § 6 нас интересовала ситуация, когда просты все числа

$$n + J = (n + j_1, n + j_2, \dots, n + j_\ell). \quad (7)$$

Но можно зафиксировать  $m < \ell$  и спросить, найдётся ли хотя бы  $m$  простых среди чисел (7) при бесконечно многих значениях  $n$ . Так мы по крайней мере узнаем, например, найдётся ли бесконечно много пар простых с разностью не больше  $j_\ell - j_1$ .

Приведём частный случай поразительного главного результата работы [21]. Каннан Сундарараджан в своей речи при награждении Мейнарда сравнил этот результат с «солнцем среди звёзд».

**ТЕОРЕМА.** *Для любого  $m$  и для всех достаточно длинных допустимых наборов  $J$  просты не менее чем  $m$  чисел из (7) при бесконечно многих  $n$ .*

На самом деле для любого данного  $m$  можно указать явно нужную длину таких  $J$ . Например, при  $m + 2$  достаточно взять  $|J| = 50$ . При  $m = 3$  можно взять  $|J| = 35410$ , и допустимым будет любой набор из  $\ell \geq 35410$  простых, превосходящих  $\ell$ . В общем случае наилучшая оценка на  $|J|$  сегодня составляет  $ce^{3,815m}$ , см. [2].

В работе [21] доказано больше: найдётся не менее  $m$  простых в любом допустимом наборе попарно различных чисел вида  $a_1 n + j_1, \dots, a_\ell n + j_\ell$ . Отсюда вытекает много интересных фактов о конфигурациях простых чисел. Например, существуют сколь угодно большие множества простых, где любая пара различается лишь в двух десятичных разрядах! Действительно, положим

$$a_i = \ell! \cdot 10^{\ell+2}, \quad j_i = 10^{i+1} + 1,$$

тогда в числах  $a_i n + j_i$  все разряды при  $i = 1, \dots, \ell$  совпадают за тем исключением, что от второго до  $(\ell + 1)$ -го справа разряда пробегает единица.

Из этих заметок читатель может видеть, что современная математика не только обладает мощными методами и результатами, но при этом понятна и красива — нужно лишь найти правильную идею и правильный подход. Это нелегко, но пусть эти заметки убедят молодых читателей в плодотворность занятий математикой и в её красоту.

## § 8. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ЧТЕНИЕ

Несколько популярных обзоров данной тематики опубликовано в *Quanta Magazine*, см. [12, 14–16, 20].

Ведущими специалистами в этой области опубликованы обзоры [6, 9, 18, 27], в том числе самим Мейнардом — обзоры [22–24].

Учебный характер имеют публикации [4, 10, 17, 28, 29] или более продвинутые [5, 13]. Есть даже детектив в картинках [11]!

Информацию «из первых рук» читатель найдёт в статьях [7, 21, 25, 26, 32].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Okounkov A.* Rhymes in primes. <https://arxiv.org/abs/2207.03867>.
- [2] *Baker R. C., Irving A. J.* Bounded intervals containing many primes // *Math. Z.* 2017. Bd. 286, № 3–4. S. 821–841.
- [3] *Bombieri E.* On the large sieve // *Mathematika.* 1965. Vol. 12. P. 201–225.
- [4] *Davenport H.* Multiplicative number theory / 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 2000. (Graduate Texts in Mathematics; Vol. 74). Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery.
- [5] *Friedlander J., Iwaniec H.* Opera de cribro // American Providence, RI: AMS, 2010. (Mathematical Society Colloquium Publications; Vol. 57).
- [6] *Goldston D. A., Pintz J., Yıldırım C. Y.* Small gaps between primes // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians — Seoul 2014.* Vol. II. Seoul: Kyung Moon Sa, 2014. P. 419–441.
- [7] *Goldston D. A., Pintz J., Yıldırım C. Y.* Primes in tuples. I // *Ann. of Math.* (2). 2009. Vol. 170, № 2. P. 819–862.
- [8] *Granville A.* Unexpected irregularities in the distribution of prime numbers // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994).* Basel: Birkhäuser, 1995. P. 388–399.
- [9] *Granville A.* Primes in intervals of bounded length // *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.).* 2015. Vol. 52, № 2. P. 171–222.
- [10] *Granville A.* Number theory revealed: a masterclass. Providence, RI: AMS, 2019.
- [11] *Granville A., Granville J.* Prime suspects. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2019. The anatomy of integers and permutations; Illustrated by Robert J. Lewis.
- [12] *Hartnett K.* New Proof Settles How to Approximate Numbers Like Pi // *Quanta Magazine* (August 14, 2019). <https://www.quantamagazine.org/new-proof-settles-how-to-approximate-numbers-like-pi-20190814/>.

- [13] *Iwaniec H., Kowalski E.* Analytic number theory. Providence, RI: AMS, 2004. (American Mathematical Society Colloquium Publications; Vol. 53).
- [14] *Klarreich E.* Unheralded Mathematician Bridges the Prime Gap // *Quanta Magazine* (May 19, 2013). [www.quantamagazine.org/yitang-zhang-proves-landmark-theorem-in-distribution-of-prime-numbers-20130519](http://www.quantamagazine.org/yitang-zhang-proves-landmark-theorem-in-distribution-of-prime-numbers-20130519).
- [15] *Klarreich E.* Together and Alone, Closing the Prime Gap // *Quanta Magazine* (November 19, 2013). [www.quantamagazine.org/mathematicians-team-up-on-twin-primes-conjecture-20131119/](http://www.quantamagazine.org/mathematicians-team-up-on-twin-primes-conjecture-20131119/).
- [16] *Klarreich E.* Prime Gap Grows After Decades-Long Lull // *Quanta Magazine* (December 10, 2014). [www.quantamagazine.org/mathematicians-prove-conjecture-on-big-prime-number-gaps-20141210/](http://www.quantamagazine.org/mathematicians-prove-conjecture-on-big-prime-number-gaps-20141210/).
- [17] *Koukoulopoulos D.* The distribution of prime numbers. Providence, RI: AMS, 2019. (Graduate Studies in Mathematics; Vol. 203).
- [18] *Kowalski E.* Gaps between prime numbers and primes in arithmetic progressions after Y. Zhang and J. Maynard // *Astérisque*. 2015. № 367–368. Exp. No. 1084, ix, 327–366.
- [19] *Ledoux M.* The concentration of measure phenomenon. Providence, RI: AMS, 2001. (Mathematical Surveys and Monographs; Vol. 89).
- [20] *Lin Th.* After Prime Proof, an Unlikely Star Rises // *Quanta Magazine* (April 2, 2015). <https://www.quantamagazine.org/yitang-zhang-and-the-mystery-of-numbers-20150402>.
- [21] *Maynard J.* Small gaps between primes // *Ann. of Math. (2)*. 2015. Vol. 181, № 1. P. 383–413.
- [22] *Maynard J.* Digits of primes // *European Congress of Mathematics*. Zürich: Eur. Math. Soc., 2018. P. 641–661.
- [23] *Maynard J.* Gaps between primes // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians — Rio de Janeiro 2018*. Vol. II. Invited lectures. Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2018. P. 345–361.
- [24] *Maynard J.* The twin prime conjecture // *Jpn. J. Math.* 2019. Vol. 14, № 2. P. 175–206.
- [25] *Polymath D. H. J.* New equidistribution estimates of Zhang type // *Algebra Number Theory*. 2014. Vol. 8, № 9. P. 2067–2199.
- [26] *Polymath D. H. J.* Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes // *Res. Math. Sci.* 2014. Vol. 1. Art. 12, 83.
- [27] *Soundararajan K.* Small gaps between prime numbers: the work of Goldston — Pintz — Yıldırım // *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*. 2007. Vol. 44, № 1. P. 1–18.
- [28] *Tenenbaum G., Mendès M.* The prime numbers and their distribution. Providence, RI: AMS, 2000. (Student Mathematical Library; Vol. 6). Translated from the 1997 French original by Philip G. Spain.

- [29] *Tenenbaum G.* Introduction to analytic and probabilistic number theory / 3rd ed. Providence, RI: AMS, 2015. (Graduate Studies in Mathematics; Vol. 163). Translated from the 2008 French edition by Patrick D. F. Ion.
- [30] *Виноградов А. И.* О плотностной гипотезе для  $L$ -рядов Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29, вып. 4. С. 903–934.
- [31] *Zhang Y.* Small gaps between primes and primes in arithmetic progressions to large moduli // Proceedings of the International Congress of Mathematicians — Seoul 2014. Vol. II. Seoul: Kyung MoonSa, 2014. P. 557–567.
- [32] *Zhang Y.* Bounded gaps between primes // Ann. of Math. (2). 2014. Vol. 179, № 3. P. 1121–1174.

---

Андрей Юрьевич Окуньков, Колумбийский университет (США)

okounkov@math.columbia.edu

Борис Рафаилович Френкин, МЦНМО

frenkin@mccme.ru