

## Магия чисел 8 и 24: о работах М. Вязовской

А. Ю. Окуньков, Б. Р. Френкин

Эти заметки основаны на статье А. Ю. Окунькова [1]. Обработка для «Математического просвещения» произведена Б. Р. Френкиным. Цель заметок — разделить с читателем восхищение результатами филдсовских лауреатов 2022 года, используя максимально доступный, но точный математический язык. В конце указана литература, позволяющая расширить и углубить понимание предмета.



М. Вязовская

### §1. СФЕРЫ ДЕРЖАТСЯ НА РАССТОЯНИИ

Отчётливое различение точек, расстояние между которыми не меньше некоторого порога, играет важную роль в статистике, теории кодирования и во многих других случаях. Будем использовать следующие обозначения:

$$B(x, r) = \{x' : \|x' - x\| \leq r\}, \quad (1)$$

$$S(x, r) = \{x' : \|x' - x\| = r\}. \quad (2)$$

Формула (1) задаёт шар, а формула (2) — сферу с центром  $x$  и радиусом  $r$ . Главный вопрос в обсуждаемой здесь тематике — насколько плотно можно упаковать сферы заданного радиуса в пространстве некоторой размерности  $d$ .

Оказывается, ответ существенно зависит от размерности. Например, в размерностях 8 и 24 существуют очень специальные расположения сфер  $E_8$  и  $\Lambda_{24}$ . Предполагалось, что они наиболее плотны в этих размерностях. Замечательное доказательство этой гипотезы для  $E_8$  получила в работе [53] Марина Вязовская, а для  $\Lambda_{24}$  — в работе [12] Вязовская и её соавторы: Генри Кон, Абхинав Кумар, Стивен Д. Миллер и Данило Радченко. За эти и другие замечательные результаты Марина Вязовская награждена в 2022 году Филдсовской медалью. Эти заметки позволят широкому кругу читателей разделить наше восхищение этими теоремами и их доказательствами.

Задача плотнейшей упаковки кругов на плоскости возникает часто. Возьмём квадрат и подсчитаем долю его площади, занятую кругами; предел этой доли, когда сторона квадрата стремится к бесконечности, называется *плотностью упаковки*.

Давно доказано (хотя это оказалось непросто), что на плоскости самой плотной является шестиугольная упаковка, которая носит название  $A_2$ . Её плотность равна  $\pi/(2\sqrt{3}) = 0,906\dots$

Локальный вариант проблемы упаковки, известный как *проблема контактного числа*, состоит в отыскании наибольшего количества  $\tau(d)$  сфер фиксированного радиуса  $r$  в пространстве  $\mathbb{R}^d$ , которые могут касаться данной сферы того же радиуса.

Проблема отыскания  $\tau(3)$  имеет долгую историю, начало которой легенда относит к записям, сделанным Дэвидом Грегори во время бесед с Ньютоном о небесных телах в 1694 г., см. [6]. Видимо, они обсуждали, какую долю небосвода может занимать образ того или иного небесного тела. Нетрудно показать, что контактное число для  $\mathbb{R}^3$  не больше 14 и не меньше 12. Может ли оно быть равно 13? Согласно легенде, Грегори считал, что да, а Ньютон — что нет. Лишь много позже было доказано, что  $\tau(3) = 12$ .

## § 2. ПЛОТНЕЙШИЕ УПАКОВКИ В $\mathbb{R}^3$ И ВЫСШИХ РАЗМЕРНОСТЯХ

Пусть решётка  $\mathbb{Z}^3$  состоит из всех точек с целочисленными координатами в  $\mathbb{R}^3$ . Рассмотрим в ней подрешётку  $D_3$ , состоящую из всех точек с чётной суммой координат. Как доказал Т. Хейлз, наиплотнейшая

упаковка сфер равного радиуса в  $\mathbb{R}^3$  получается, если центры сфер образуют решётку  $D_3$ . Доказательство получено с помощью компьютера, подробнее см. [26, 28, 29, 37]. Предполагается, но не доказано, что аналогичные решётки  $D_4$  и  $D_5$  дают наиплотнейшие упаковки равных сфер соответственно в  $\mathbb{R}^4$  и  $\mathbb{R}^5$ .

Что происходит в произвольной размерности? Оказывается, важную роль играют решётки  $A_d$  и  $D_d$ , а также решётки специального вида  $E_6, E_7, E_8$ . Решётка  $A_d$  состоит из всех точек  $(d + 1)$ -мерного пространства, координаты которых целые и в сумме дают 0. Решётка  $D_d$  состоит из всех точек  $d$ -мерного пространства, координаты которых целые и имеют чётную сумму.

Известно, что в размерностях 1, 2, 3 наиплотнейшая упаковка получается соответственно из решёток  $A_1, A_2, A_3$ . Предполагается, что в размерностях 6 и 7 нужно взять соответственно решётки  $E_6$  и  $E_7$ . Результат Вязовской состоит в том, что в размерности 8 наиплотнейшую упаковку даёт решётка

$$E_8 = D_8 \cup (D_8 + \gamma), \quad \text{где } \gamma = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right).$$

(Во всех случаях максимум рассматривается на множестве всех упаковок, а не только порождённых решётками.)

При дальнейшем росте размерности  $n$  максимальная плотность найденных упаковок снижается, но затем снова растёт и даёт локальный максимум в размерности 24. Как доказали Вязовская и её соавторы [12], максимум при  $n = 24$  даёт решётка Лича  $\Lambda_{24}$ , глубоко связанная с исключительными, или *спорадическими*, конечными простыми группами, включая т. н. *монстр*. А так как монстр — самая большая из исключительных групп, характер изменения плотности должен после  $n = 24$  поменяться. Подробнее см. [7, 16], а также таблицы в [10, 42].

Отметим, что в размерности 9 наиплотнейшую из известных упаковок, вопреки нашей «трёхмерной» геометрической интуиции, даёт «жидкий алмаз» — упаковка, в которой центры сфер радиуса  $1/\sqrt{2}$  образуют решётку

$$D_9 \cap (D_9 + \gamma_{i,t}), \quad \text{где } \gamma_{i,t} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) + te_i, \quad i = 1, \dots, 9,$$

$t \in \mathbb{R}$  — произвольное число, у вектора  $e_i$  координата с номером  $i$  равна 1, а остальные равны 0. Векторы  $\gamma_{i,t}$  наиболее удалены от точек решётки и называются «глубокими дырами». Используя произвольность  $t$  и  $i$ , можно сдвигать часть сфер, не затрагивая другие сферы, — действительно «жидкая» упаковка!

Звёзды сошлись на  $E_8$ 

Обсуждение плотной и симметричной решётки  $E_8$  можно начать с разных сторон, поскольку она появляется в разных разделах математики.

**Корни.** Решётка  $D_d$  обладает тем свойством, что скалярный квадрат каждого её вектора — чётное целое число. Такие решётки называются *чётными*. Нетрудно видеть, что и  $E_8$  — чётная решётка.

Векторы чётной решётки, имеющие *норму* (квадрат длины) 2, являются её *корнями* (общее определение корней решётки см., например, [https://ru.wikipedia.org/wiki/Система\\_корней](https://ru.wikipedia.org/wiki/Система_корней)). В частности, в решётке  $E_8$  корнями являются вектор  $\gamma$ , а также векторы

$$\alpha = \pm e_i \pm e_j \in D_d, \quad i \neq j$$

и

$$\alpha = \left( \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \dots, \pm \frac{1}{2} \right) \text{ с чётной суммой координат.}$$

Других корней  $E_8$  не имеет, и количество её корней равно  $\tau(8) = 240$ . Эти корни дают решение задачи о контактном числе при  $d = 8$ , и это решение единственно, в отличие от случая  $d = 3$ , рассмотренного в п. 1.3.

**Отражения.** Ортогональные симметрии решётки всегда образуют конечную группу. Каждый корень  $\alpha \in \Lambda$  в чётной решётке  $\Lambda$  порождает её симметрию, а именно *отражение*  $r_\alpha$  относительно гиперплоскости, ортогональной ему. Оно задано формулой

$$r_\alpha(v) = v - (v, \alpha)\alpha.$$

Для решётки  $A_d \subset \mathbb{R}^{d+1}$  отражение  $r_\alpha$  обменивает две координаты. Конечные группы, порождённые отражениями, полностью расклассифицированы и подробно изучены ввиду их важности во многих разделах математики. Из этой классификации следует, что все чётные решётки, порождённые корнями, являются ортогональными суммами решёток вида  $A_d, D_d, E_6, E_7, E_8$ .

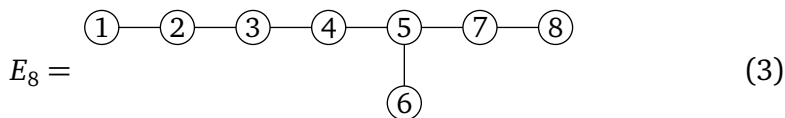
**Классификация ADE.** В чётной решётке  $\Lambda$ , порождённой корнями, всегда можно выбрать базис корней так, что

$$(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \text{ или } -1, \quad i \neq j.$$

В случае  $E_8$  можно взять

$$\alpha_i = e_i - e_{i+1}, \quad i = 1, \dots, 6, \quad \alpha_7 = e_6 + e_7, \quad \alpha_8 = -\gamma.$$

Для большинства пар  $i, j$  получаем  $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ . При этом  $(\alpha_i, \alpha_j) = -1$  в точности для тех пар, которые соединены ребром в графе



Графы такого вида называются диаграммами Коксетера — Дынкина. Удалив из диаграммы (3) вершины 1, 2, 3, 8, 7, 6, 5 в таком порядке, мы получим диаграмму соответственно для  $E_7, E_6, D_5, D_4, D_3 = A_3, A_2, A_1$ . Для соответствующих размерностей известно или предполагается, что эти решётки дают наиплотнейшие упаковки.

**Дискриминант.** Дискриминант чётной решётки  $\Delta_\Lambda$  — то же самое, что определитель её матрицы Грама  $B_\Lambda = ((\alpha_i, \alpha_j))$ . Плотность соответствующей упаковки сфер равна

$$\frac{\text{Vol } B(0, 1/\sqrt{2})}{\sqrt{\Delta_\Lambda}}.$$

Дискриминант равен целому числу, поэтому плотность не может быть меньше единицы. В частности,  $\Delta_{E_8} = 1$ . Решётки с дискриминантом 1 называются *унимодулярными*. Чётные унимодулярные решётки существуют лишь в размерностях, кратных 8, и  $E_8$  — единственная такая решётка в размерности 8.

В размерности 24 существуют 24 чётных унимодулярных решётки, и среди них выделяется замечательная решётка Лича, у которой нет корней! Таким образом, можно упаковать сферы радиусом 1, а не  $1/\sqrt{2}$ , с центрами в решётке Лича. Подробнее см. [16, 19, 51].

**Связь с кодами.** До сих пор мы рассматривали векторы с целочисленными действительными координатами. Обратимся на короткое время к случаю, когда координаты могут быть равны лишь 0 или 1.

Рассмотрим пространство размерности  $d$  над полем  $\mathbb{Z}_2$ . Расстояние Хэмминга между его векторами  $x_1, \dots, x_d$  и  $x'_1, \dots, x'_d$  определяется как

$$\|x - x'\|_{\text{Hamming}} = \sum |x_i - x'_i|. \quad (4)$$

Пусть  $x$  — двоичное сообщение, переданное по каналам связи, а  $x'$  — то, что получено на другом конце. Тогда (4) равно количеству ошибок, случившихся при передаче.

Пусть в этом пространстве упакованы непересекающиеся шары радиуса  $r$ . Координаты центров таких шаров образуют бинарные слова длины  $d$ , а минимальное расстояние Хэмминга между ними больше  $2r$ . Совокупность таких слов образует код для передачи сообщений, который исправляет  $r$  ошибок. (Действительно, любая точка пространства принадлежит не более чем одному из данных шаров и, значит, отличается по  $r$  или меньше координатам от не более чем одного кодового слова. Если известно, что передаваемое слово искажено не более чем в  $r$  позициях, то полученное слово позволяет однозначно его восстановить.)

Если упаковка шаров была порождена решёткой, то тем самым по решётке строится код. С другой стороны, пусть дан двоичный код  $\mathcal{C}$ , и пусть  $\widehat{\mathcal{C}}$  — совокупность всех точек с целочисленными действительными координатами, которые превращаются в слова этого кода после замены каждой координаты с чётным значением на 0, а с нечётным на 1. Если наименьшее расстояние Хэмминга между словами из  $\mathcal{C}$  больше  $\delta$ , то наименьшее евклидово расстояние между точками из  $\widehat{\mathcal{C}}$  больше  $\sqrt{\delta}$ . Значит, возможна упаковка шаров с центрами в  $\widehat{\mathcal{C}}$  и радиусом, равным  $\sqrt{\delta}/2$ . Интересующие нас решётки получаются из кодов с помощью рассуждений такого же рода:  $E_8$  из (8, 4)-кода Хэмминга, а решётка Лича из кода Голея.

### ВЫСШИЕ РАЗМЕРНОСТИ

Упаковка сфер в пространстве  $\mathbb{R}^d$  называется *насыщенной*, если к ней нельзя добавить ещё одну сферу того же радиуса. Попробуйте показать, что плотность насыщенной упаковки не меньше, чем  $2^{-d}$  (это одна из любимых задач Марины Вязовской для начинающих).

Чтобы доказать это, заметим, что в насыщенной упаковке шары удвоенного радиуса с теми же центрами должны покрыть всё пространство. Искомая нижняя граница получается из равенства

$$\text{Vol } B(0, r) = 2^{-d} \text{Vol } B(0, 2r).$$

На самом деле эта граница замечательна. Можно показать, что при любом  $r$  объём  $B(0, r)$  растёт суперэкспоненциально по  $d$ . Поэтому упаковка, достигающая плотности  $2^{-d}$ , должна содержать при  $d \rightarrow \infty$  суперэкспоненциально много шаров в любом кубе с центром в нуле. Все известные усиления оценки  $2^{-d}$  по существу лишь линейны по  $d$ .

Что касается верхних оценок плотности, мировой рекорд удерживает оценка 1978 г., найденная Кабатянкским и Левенштейном [31] и равная  $2^{-0,5990\dots d}$ . Правда, Кон и Чжао [14] сумели уменьшить её на постоянный множитель.

### § 3. ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ПЛОТНОСТИ УПАКОВОК

Будем говорить, что чётная функция  $f(t)$  положительно определена, если

$$B_f(x) = \sum_{i,j=1}^n f(t_i - t_j) x_i x_j \geq 0 \quad (5)$$

при любом выборе  $t_1, \dots, t_n$  (иными словами, квадратичная форма  $B_f(x)$  положительно полуопределена).

Следуя Кону и Элкису [11], покажем, как можно использовать положительно определённые функции для получения верхних оценок плотности упаковок. Аналогичные рассуждения, с заменой сдвигов на вращения, применялись для оценки контактных чисел; см. [2, 38–41, 43]. Вначале оценки такого рода появились в теории кодирования [17].

Будем рассматривать упаковки сфер радиуса  $r$  в пространстве  $\mathbb{R}^d$ , периодичные по каждой координате с периодом  $L$ . Любую упаковку можно привести к такому виду, удалив сферы, пересекающие границу фундаментальной области  $[0; L]^d$  или её сдвигов по координатам на величины, кратные  $L$ . При этом плотность уменьшится не более чем в  $L$  раз, поэтому верхняя оценка на плотность периодических упаковок с произвольно большим периодом  $L$  порождает верхнюю оценку на плотность любых упаковок сфер.

Пусть  $n$  — количество сфер в фундаментальной области периодической упаковки,  $t_1, \dots, t_n \in [0; L]^d$  — их центры. Тогда плотность упаковки равна  $\frac{n}{L^d} \text{Vol}(B(0, r))$ . Чтобы оценить её сверху, используем некоторую положительно определённую функцию  $f(t)$ , имеющую период  $L$  по всем координатам. А именно, положим

$$\omega_k = \frac{2\pi}{L} k,$$

где  $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$  — целочисленный вектор, и рассмотрим функцию вида

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}^c(k) \cos\left(\frac{2\pi}{L}(k, t)\right), \quad \hat{f}^c(k) \geq 0 \quad (6)$$

(индекс  $c$  указывает, что мы используем разложение по косинусам).

Заметим, что  $f(0) > 0$  для любой ненулевой положительно определённой функции. В силу периодичности,  $f$  положительна в любой точке, координаты которой делятся на  $L$ . Их совокупность обозначим  $L\mathbb{Z}^d$ . Пусть  $f$  такова, что

$$d(t, L\mathbb{Z}^d) \geq 2r \quad \Rightarrow \quad f(t) \leq 0, \quad (7)$$

где  $d(t, S)$  означает расстояние от  $t$  до множества  $S$ . Таким образом,  $t$  положительна вблизи точек множества  $L\mathbb{Z}^d$  и отрицательна вдали от них. Покажем, что такая функция даст верхнюю границу для плотности упаковки сфер. Блестящее достижение Вязовской состоит именно в отыскании функции, приводящей к нужной оценке.

Поскольку  $t_1, \dots, t_n$  — центры периодической упаковки сфер, имеем

$$d(t_i - t_j, L\mathbb{Z}^d) \geq 2r, \quad i \neq j,$$

и потому  $f(t_i - t_j) \leq 0$  при  $i \neq j$ . Для значения формы (5) в точке  $x = (1, \dots, 1)$  получаем

$$B_f((1, \dots, 1)) = \sum_{i,j} f(t_i - t_j) \leq \sum_i f(t_i - t_i) = n f(0). \quad (8)$$

Это даёт оценку количества сфер  $n$  снизу.

Чтобы получить оценку с другой стороны, заметим, что в силу (6)

$$B_f = \sum_k \hat{f}^c(k) B_{\cos(\frac{2\pi}{L}(k,t))},$$

причём все слагаемые здесь положительны. Поэтому вся сумма не меньше, чем слагаемое с  $k = 0$ , т. е. форма  $B_1$ :

$$B_f((1, \dots, 1)) \geq \hat{f}(0) B_1((1, \dots, 1)) = \hat{f}(0) n^2 \quad (9)$$

(мы опустили индекс  $c$ ). Сравнивая (9) и (8), получаем искомую верхнюю оценку на  $n$ :

$$n \leq \frac{f(0)}{\hat{f}(0)}. \quad (10)$$

Знаменатель  $\hat{f}(0)$  есть среднее от  $f$  по фундаментальной области:

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{L^d} \int_{[0; L]^d} f(t) dt. \quad (11)$$

Из (10) и (11) вытекает, что

$$\frac{n}{L^d} \leq \frac{f(0)}{\int_{[0; L]^d} f(t) dt}.$$

Здесь  $f(t)$  — периодическая функция с периодом  $L$  по каждой координате, положительно определённая и удовлетворяющая условию (7).

Оказывается, можно использовать одну и ту же функцию  $f(t)$  для любых периодов  $L$ . Пусть  $f(t)$  обладает следующими свойствами:

- (i)  $f(t)$  положительно определена;

- (ii)  $f(t) \leq 0$  при  $\|t\| \geq 2r$ ;
- (iii)  $|f(t)|$  достаточно быстро убывает при  $t \rightarrow \infty$ .

Как и выше, пусть центры сфер в упаковке имеют координаты  $\{t_i + LZ^d\}$ . При условии (iii) ряд

$$\bar{f}(t) = \sum_{v \in LZ^d} f(t + v)$$

сходится, причём его сумма периодична по  $t$  и положительно определена. Очевидно,

$$\int_{[0; L^d]} \bar{f}(t) dt = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) dt,$$

откуда

$$f(0) \geq \frac{1}{n} \sum_{v \in LZ^d} \sum_{i,j} f(v + t_i - t_j) = \frac{1}{n} \sum_{i,j} \bar{f}(v + t_i - t_j) \geq \frac{n}{L^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) dt. \quad (12)$$

Первое из этих неравенств следует из того, что  $v + t_i - t_j$  — разность двух центров сфер, которая имеет норму не меньше  $2r$ , если не равна нулю. Второе неравенство — это неравенство (9) для периодической функции  $\bar{f}$ . Отсюда получаем, что плотность центров сфер не превосходит

$$\min_f \frac{f(0)}{\int_{\mathbb{R}^d} f(t) dt}, \quad (13)$$

где минимум берётся по всем ненулевым функциям со свойствами (i)-(iii).

Теперь заметим, что интересующие нас множества и функции инвариантны относительно вращений пространства  $\mathbb{R}^d$ ; поскольку группа вращений компактна, существует среднее по всем вращениям функции  $f$ , и оно также обладает свойствами (i)–(iii). Это среднее является *радиальной функцией*, т. е. зависит от единственной переменной  $\|t\|$ .

#### § 4. МАГИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ВЯЗОВСКОЙ

##### РЕШЁТОЧНЫЕ УПАКОВКИ, ДЛЯ КОТОРЫХ ОЦЕНКА ТОЧНА

Пусть решётка  $\Lambda$  и функция  $f$  таковы, что плотность соответствующей упаковки равна (13). Вспомним, что неравенство (12) получалось удалением некоторых неположительных и неотрицательных слагаемых. Если в итоге достигается равенство, то удалённые слагаемые должны быть равны нулю.

Первое неравенство в (12) обращается в равенство в точности тогда, когда  $f(v) = 0$  при всех  $v \in \Lambda \setminus \{0\}$ . Радиальная функция  $f$  равна нулю для всех векторов той же длины, что и ненулевой вектор из  $\Lambda$ . В случае  $E_8$  это  $\sqrt{2n}$ , где  $n = 1, 2, \dots$

Можно показать, что второе неравенство в (12) обращается в равенство в точности тогда, когда

$$\hat{f}(k) = 0 \quad \text{при всех } k \in \Lambda^\vee \setminus \{0\}, \quad (14)$$

где  $\Lambda^\vee$  — решётка, двойственная к  $\Lambda$ , т. е. состоящая из всех тех векторов  $k$ , для которых  $(k, v) \in \mathbb{Z}$  при всех  $v \in \Lambda$ . При этом  $E_8^\vee = E_8$ , и формула (14) означает, что  $\hat{f}(k)$  обращается в нуль для всех векторов  $k$  длины  $\sqrt{2n}$ , где  $n = 1, 2, \dots$

Чтобы убедиться в оптимальности решётки  $E_8$ , нужно найти функцию  $f(x)$ , которая удовлетворяет следующим ограничениям. Пусть  $f(x)$  — радиальная функция в  $\mathbb{R}^8$ , а  $\hat{f}(x)$  — её преобразование Фурье:

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^8} f(\|t\|) e^{-2\pi i t_1 x} dt,$$

где  $t_1$  — первая координата вектора  $t$ . Функция  $\hat{f}(x)$  должна быть неотрицательна при  $x \geq 0$ , а  $f(x)$  — неположительна при  $x \geq \sqrt{2}$ . Обе функции должны быть равны 0 при  $x = \sqrt{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . А так как  $\Delta_{E_8} = 1$ , можно положить  $f(0) = \hat{f}(0) = 1$ .

#### Ожидание окончено

В выступлении по случаю награждения Марины Вязовской Филдсовской медалью [9] американский математик Генри Кон говорил о своих попытках найти магическую функцию  $f$ :

*«Когда Элкис и я предложили этот метод в 1999 г., Вязовская ещё училась в средней школе. Не представляя глубокую трудность оставшегося шага, я воображал, что мы почти решили проблему упаковки шаров в размерностях 8 и 24, и наша неспособность найти магические функции крайне огорчала. Вначале я опасался, что кто-то другой найдёт лёгкое решение и заставит меня чувствовать себя глупым, поскольку я не сделал этого сам. Через некоторое время я убедился, что в действительности найти эти функции трудно, и другие пришли к тому же выводу. Например, Томас Хейлз сказал: Я почувствовал, что для их отыскания потребуется Рамануджан [32]. В итоге... я уже стал опасаться, что никто не решит эту*

задачу, и однажды я умру, не узнав результат. Я благодарен Вязовской за то, что она нашла столь удовлетворительное и красивое решение, выдвинув замечательные новые идеи, и математическое сообщество может их развивать».

Решение Вязовской поистине восхищает. Она даёт крайне нетривиальную явную формулу для магической функции. Невозможно сказать, смог бы найти это решение Рамануджан, но можно предположить, что он был бы чрезвычайно счастлив его увидеть. О поисках ускользающей магической функции Марина Вязовская рассказывает в своём интервью [54].

### ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Вязовская предложила следующий систематический способ строить функции со свойствами (i)–(iii). Она предположила, что нужная радиальная быстро убывающая функция  $f$  на  $\mathbb{R}^8$  однозначно определяется значениями  $f, f', \hat{f}, \hat{f}'$  в точках  $x = \sqrt{2n}, n = 1, 2, \dots$ . А именно, существует такой интерполяционный базис, состоящий из радиальных быстро убывающих функций  $a_n, b_n, \hat{a}_n, \hat{b}_n$ , что для любой функции  $f$  с нужными свойствами имеем

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\sqrt{2n})a_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f'(\sqrt{2n})b_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(\sqrt{2n})\hat{a}_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}'(\sqrt{2n})\hat{b}_n(x). \quad (15)$$

В частности, магическая функция  $f$  пропорциональна  $b_1(x)$ , поскольку остальные коэффициенты для неё равны нулю.

Гипотеза Вязовской была доказана в работе [13], соавторами которой являются Марина Вязовская, Генри Кон, Абхинав Кумар, Стивен Д. Миллер и Данило Радченко. Они рассматривают ряд

$$F(\tau, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)e^{2\pi in\tau} + 2\pi in\tau \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2n}b_n(x)e^{2\pi in\tau} \quad (16)$$

и аналогичный ряд  $\hat{f}(\tau, x)$  для  $\hat{a}_n$  и  $\hat{b}_n$ . Заметим, что

$$F(\tau + 2, x) - 2F(\tau + 1, x) + F(\tau, x) = 0 \quad (17)$$

и аналогично для  $\hat{f}(\tau, x)$ .

Для функции  $f(t) = f_\tau(t) = e^{\pi i\tau\|t\|^2}$  уравнение (15) принимает вид

$$e^{\pi i\tau\|t\|^2} = F(\tau, x) + \tau^{-4}\hat{f}\left(-\frac{1}{\tau}, x\right). \quad (18)$$

Авторы работы [13] решают уравнения (18) и (17) и выводят формулы для интерполяционного базиса в (16). В частности, это даёт формулу для  $b_1$ , а тем самым и для искомой магической функции.

Аналогичные результаты получены в работе [13] для решётки Лича. При этом доказана оптимальность решёток  $E_8$  и  $\Lambda_{24}$  не только для упаковки сфер, но и в более общих геометрических задачах оптимизации.

## § 5. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ЧТЕНИЕ

Популярные обзоры [30, 32, 33] по этой и близкой тематике опубликовал журнал «Quanta Magazine».

Среди вводных и обзорных статей, написанных ведущими специалистами в этой области, можно отметить [7, 15, 20, 21, 48], которые появились до решающего достижения Вязовской, и [8, 9, 36], посвящённые этому достижению.

Следует упомянуть учебники [19, 51] и справочник [16]. О связи упаковок сфер с физикой см. [44].

И, разумеется, сошлёмся на оригинальные статьи [11–13, 53].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Okounkov A. The magic of 8 and 24. <https://arxiv.org/abs/2207.03871>.
- [2] Акоюн А. В., Кабатынский Г. А., Мусин О. Р. Контактные числа, коды и сферические многочлены // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 16. М.: МЦНМО, 2012. С. 57–74.
- [3] Андреев Н. Н., Юдин В. А. Экстремальные расположения точек на сфере // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 1. М.: МЦНМО, 1997. С. 115–125.
- [4] Axler S. Linear algebra done right / 3rd ed. Cham: Springer, 2015. (Undergraduate Texts in Mathematics).
- [5] Blichfeld H. F. The minimum values of positive quadratic forms in six, seven and eight variables // Math. Z. 1935. Bd. 39, № 1. S. 1–15.
- [6] Casselman B. The difficulties of kissing in three dimensions // Notices Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 51, № 8. P. 884–885.
- [7] Cohn H. Packing, coding, and ground states // Mathematics and materials. Providence, RI: AMS, 2017. (IAS/Park City Math. Ser.; Vol. 23). P. 45–102.
- [8] Cohn H. A conceptual breakthrough in sphere packing // Notices Amer. Math. Soc. 2017. Vol. 64, № 2. P. 102–115.
- [9] Cohn H. The work of Maryna Viazovska. Proceedings of ICM 2022.
- [10] Cohn H. Sphere packing. <https://cohn.mit.edu/sphere-packing>.

- [11] *Cohn H., Elkies N.* New upper bounds on sphere packings. I // *Ann. of Math. (2)*. 2003. Vol. 157, № 2. P. 689–714.
- [12] *Cohn H., Kumar A., Miller S. D., Radchenko D., Viazovska M.* The sphere packing problem in dimension 24 // *Ann. of Math. (2)*. 2017. Vol. 185, № 3. P. 1017–1033.
- [13] *Cohn H., Kumar A., Miller S. D., Radchenko D., Viazovska M.* Universal optimality of the  $E_8$  and Leech lattices and interpolation formulas. [arxiv.org/abs/1902.05438](https://arxiv.org/abs/1902.05438).
- [14] *Cohn H., Zhao Y.* Sphere packing bounds via spherical codes // *Duke Math. J.* 2014. Vol. 163, № 10. P. 1965–2002.
- [15] *Conway J. H., Sloane N. J. A.* What are all the best sphere packings in low dimensions? // *Discrete Comput. Geom.* 1995. Vol. 13, № 3–4. P. 383–403.
- [16] *Conway J. H., Sloane N. J. A.* Sphere packings, lattices and groups / 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 1999. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]; Vol. 290). With additional contributions by E. Bannai, R. E. Borcherds, J. Leech, S. P. Norton, A. M. Odlyzko, R. A. Parker, L. Queen and B. B. Venkov.
- [17] *Delsarte P.* Bounds for unrestricted codes, by linear programming. *Philips Res. Rep.* 27 (1972), 272–289.
- [18] *Delsarte P., Goethals J. M., Seidel J. J.* Spherical codes and designs // *Geometriae Dedicata*. 1977. Vol. 6, № 3. P. 363–388.
- [19] *Ebeling W.* Lattices and codes / 3rd ed. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2013. (Advanced Lectures in Mathematics). A course partially based on lectures by Friedrich Hirzebruch.
- [20] *Elkies N. D.* Lattices, linear codes, and invariants. I // *Notices Amer. Math. Soc.* 2000. Vol. 47, № 10. P. 1238–1245.
- [21] *Elkies N. D.* Lattices, linear codes, and invariants. II // *Notices Amer. Math. Soc.* 2000. Vol. 47, № 11. P. 1382–1391.
- [22] *Fejes L.* Über einen geometrischen Satz // *Math. Z.* 1940. Bd. 46. S. 83–85 (German).
- [23] *Tóth L. F.* Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1972. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; Bd. 65) Zweite verbesserte und erweiterte Auflage.
- [24] *Gauss C. F.* Besprechung des Buchs von L. A. Seeber: Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen usw. *Göttingische Gelehrte Anzeigen* (1831, July 9) = *Werke*, II (1876). P. 188–196.
- [25] *Geck M., Pfeiffer G.* Characters of finite Coxeter groups and Iwahori—Hecke algebras. New York: The Clarendon Press; Oxford University Press, 2000. (London Mathematical Society Monographs. New Series; Vol. 21)

- [26] *Hales Th. C.* Cannonballs and honeycombs // Notices Amer. Math. Soc. 2000. Vol. 47, № 4. P. 440–449.
- [27] *Gelfand I., Neumark M.* On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space // Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S. 1943. Vol. 12(54). P. 197–213 (English, with Russian summary).
- [28] *Hales Th. C.* Historical overview of the Kepler conjecture // Discrete Comput. Geom. 2006. Vol. 36, № 1. P. 5–20.
- [29] *Hales Th. C.* Dense sphere packings. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. (London Mathematical Society Lecture Note Series; Vol. 400). A blueprint for formal proofs.
- [30] *Honner P.* The Math of Social Distancing Is a Lesson in Geometry // Quanta Magazine (March 30, 2016). [www.quantamagazine.org/the-math-of-social-distancing-is-a-lesson-in-geometry-20200713/](http://www.quantamagazine.org/the-math-of-social-distancing-is-a-lesson-in-geometry-20200713/).
- [31] *Кабатянский Г. А., Левенштейн В. И.* О границах для упаковок на сфере и в пространстве // Пробл. передачи информ. 1978. Т. 14, вып. 1. С. 3–25.
- [32] *Klarreich E.* Sphere Packing Solved in Higher Dimensions // Quanta Magazine (March 30, 2016). [www.quantamagazine.org/sphere-packing-solved-in-higher-dimensions-20160330/](http://www.quantamagazine.org/sphere-packing-solved-in-higher-dimensions-20160330/).
- [33] *Klarreich E.* Out of a Magic Math Function, One Solution to Rule Them All // Quanta Magazine (May 13, 2019). [www.quantamagazine.org/universal-math-solutions-in-dimensions-8-and-24-20190513/](http://www.quantamagazine.org/universal-math-solutions-in-dimensions-8-and-24-20190513/).
- [34] *Korkine A., Zolotareff G.* Sur les formes quadratiques positives quaternaires // Math. Ann. 1872. Bd. 5, № 4. S. 581–583 (French).
- [35] *Korkine A., Zolotareff G.* Sur les formes quadratiques positives // Math. Ann. 1877. Bd. 11, № 2. S. 242–292 (French).
- [36] *Laat D. de., Vallentin F.* A breakthrough in sphere packing: the search for magic functions // Nieuw Arch. Wiskd. (5). 2016. Vol. 17, № 3. P. 184–192. Includes an interview with Henry Cohn, Abhinav Kumar, Stephen D. Miller and Maryna Viazovska.
- [37] *Lagarias J. C.* Bounds for local density of sphere packings and the Kepler conjecture // Discrete Comput. Geom. 2002. Vol. 27, № 2. P. 165–193.
- [38] *Левенштейн В. И.* О границах для упаковок на сфере и в пространстве // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245, № 6. С. 1299–1303.
- [39] *Левенштейн В. И.* О границах для упаковок в  $n$ -мерном евклидовом пространстве // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263, № 6. С. 1303–1308.
- [40] *Musin O. R.* The kissing problem in three dimensions // Discrete Comput. Geom. 2006. Vol. 35, № 3. P. 375–384.
- [41] *Musin O. R.* The kissing number in four dimensions // Ann. of Math. (2). 2008. Vol. 168, № 1. P. 1–32.

- [42] *Nebe G., Sloane N.* Table of Densest Packings Presently Known.  
<http://www.math.rwth-aachen.de/~Gabriele.Nebe/LATTICES/density.html>.
- [43] *Odlyzko A. M., Sloane N. J. A.* New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in  $n$  dimensions // *J. Combin. Theory Ser. A.* 1979. Vol. 26, № 2. P. 210–214.
- [44] *Parisi G., Zamponi F., Urbani P.* Theory of Simple Glasses: Exact Solutions in Infinite Dimensions. Cambridge University Press, 2020.
- [45] *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness. New York; London: Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], 1975.
- [46] *Schütte K., Waerden B. L. van der.* Das Problem der dreizehn Kugeln // *Math. Ann.* 1953. Bd. 125. S. 325–334 (German).
- [47] *Segal I. E.* Irreducible representations of operator algebras // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1947. Vol. 53. P. 73–88.
- [48] *Sloane N. J. A.* The sphere packing problem // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vol. III (Berlin, 1998).* 1998. P. 387–396.
- [49] *Stein E. M., Shakarchi R.* Fourier analysis. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2003. (Princeton Lectures in Analysis; Vol. 1). An introduction.
- [50] *Strang G.* Linear algebra and its applications / 2nd ed. New York; London: Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], 1980.
- [51] *Thompson Th. M.* From error-correcting codes through sphere packings to simple groups. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1983. (Carus Mathematical Monographs; Vol. 21).
- [52] *Thue A.* Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in einer Ebene // *Christiania Vid. Selsk. Skr.* 1910. Bd. 1. S 1–9. Oslo: Universitetsforlaget, 1977. Reprinted in Selected mathematical papers. With an introduction by Carl Ludwig Siegel and a biography by Viggo Brun; Edited by Trygve Nagell, Atle Selberg, Sigmund Selberg, and Knut Thalberg.
- [53] *Viazovska M. S.* The sphere packing problem in dimension 8 // *Ann. of Math. (2).* 2017. Vol. 185. P. 3, 991–1015.
- [54] *Viazovska M. S.* Interview // IMU webpage.

---

Андрей Юрьевич Окуньков, Колумбийский университет (США)

okounkov@math.columbia.edu

Борис Рафаилович Френкин, МЦНМО

frenkin@mccme.ru