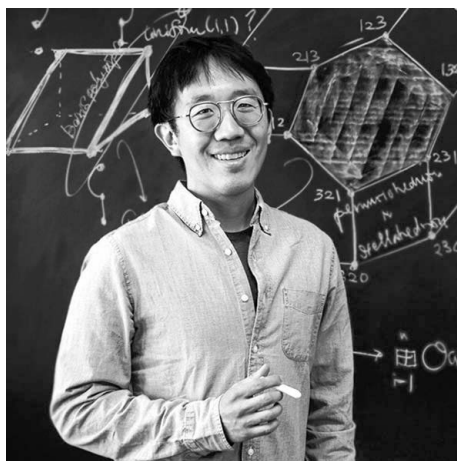


Комбинаторная геометрия выходит вперед: о работах Дж. Ху

А. Ю. Окуньков, Б. Р. Френкин

Эти заметки основаны на статье А. Ю. Окунькова [1]. Обработка для «Математического просвещения» произведена Б. Р. Френкиным. Цель заметок — разделить с читателем восхищение результатами филдсовских лауреатов 2022 года, используя максимально доступный, но точный математический язык. В конце указана литература, позволяющая расширить и углубить понимание предмета.



Дж. Ху

§ 1. Точки, прямые, плоскости и т. д.

Любые две точки P_1 и P_2 на плоскости определяют единственную проходящую через них прямую, которую мы не совсем стандартно обозначим $P_1 \vee P_2$. Пусть на плоскости даны n различных точек P_1, \dots, P_n , где $n > 2$. Пусть это точки *общего положения*, т. е. никакие три из них не лежат на одной прямой. Тогда все прямые $P_i \vee P_j$ различны, и их количество равно количеству неупорядоченных пар из n предметов, т. е. $n(n-1)/2$. При $n \geq 3$ это количество не меньше n .

Переместим теперь точки так, чтобы они уже не находились в общем положении. Например, поместим $n - 1$ из них на одну прямую. Тогда количество прямых сокращается до n , но по-прежнему не меньше количества точек. В общем случае верен классический результат де Брёйна и Эрдёша [13]: количество прямых, заданных n точками, не меньше n , если только все точки не лежат на одной прямой.

В трёхмерном пространстве n точек могут задавать ровно n плоскостей. Теодор Моцкин [4] показал в 1951 г., что это количество плоскостей минимально. (Он предположил это ещё в своей диссертации [35] в 1936 г.!)

Пусть в пространстве произвольной конечной размерности d выбраны n точек общего положения. Это означает, что никакие 3 из них не лежат на одной прямой, никакие 4 не лежат на одной плоскости и т. д. Тогда эти точки задают $\binom{n}{2}$ прямых, $\binom{n}{3}$ двумерных плоскостей, ..., $\binom{n}{r}$ плоскостей размерности $(r - 1)$ и т. д. Здесь

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$(r = 1, \dots, d)$ — биномиальные коэффициенты. Их последовательность при данных d и n обладает свойством *униmodalности*: числа вначале меняются в одну сторону, а затем в другую — вначале возрастают, затем убывают. Кроме того, эта последовательность *top-heavy* — обладает свойством *тяжёлой вершины* (числа в конце последовательности достаточно велики сравнительно с числами в начале):

$$\binom{n}{r} \leq \binom{n}{d-r}, \quad 2r \leq d \leq n.$$

Рота [39] предположил, что униmodalность сохраняется и для точек не общего положения. Даулинг и Уилсон [15, 16] высказали гипотезу, что сохраняется и свойство тяжёлой вершины. Эти вопросы долго оставались открытыми, но теперь и униmodalность для возрастающей части, и гипотеза тяжёлой вершины доказаны: это следствие теоремы, которую доказали Джун Ху и Ботонг Ванг. О ней пойдёт речь ниже.

Почему интересна гипотеза тяжёлой вершины? «Она указывает на глубоко скрытую обратимость!» — говорит Гиль Калаи, выступавший на конгрессе 2022 г. по случаю присуждения Ху Филдсовской медали. Джун Ху заинтересовался этой гипотезой, узнав о подобном явлении в группах Коксетера, имеющих существенное значение в геометрии. Подробнее см. [10, 17, 24, 34].

§ 2. СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Будем называть *рангом* r -мерной плоскости в пространстве \mathbb{R}^d наименьшее количество точек, необходимое для однозначного задания этой плоскости, т. е. число $r + 1$. Наименьшую плоскость, содержащую данные точки P_1, \dots, P_k , будем называть их *линейной оболочкой* и обозначать $P_1 \vee \dots \vee P_k$ или $\text{span}(P_1, \dots, P_k)$.

Джун Ху и его сотрудники Том Брейден, Джейкоб П. Мэтерн, Николас Праудфут и Ботонг Ванг доказали ряд мощных результатов, которые мы рассмотрим в возрастающей общности. Исходной версией является

ТЕОРЕМА 1 [22]. Пусть n точек $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^d$ не лежат в одной гиперплоскости, и пусть $r \leq r'$, $r + r' \leq d + 1$. Тогда существует инъективное отображение множества \mathcal{F}_r всех плоскостей ранга r , заданных этими точками, в множество $\mathcal{F}_{r'}$ всех таких плоскостей ранга r' .

Например, при $d = 2$ единственный содержательный случай — это $r = 1$, $r' = 2$. Тогда теорема 1 утверждает, что если не все данные точки лежат на одной прямой, то каждой из этих точек можно так сопоставить прямую, проходящую через две из них, что разным точкам будут соответствовать разные прямые. При произвольном d и $r = 1$, $r' = d$ теорему 1 доказал ещё в статье [19] Грин.

Ситуация при $r + r' > d + 1$ не столь ясна. Например, в статье [14] построена конфигурация из 21 точки в 10-мерном пространстве, для которой не существует инъективного или сюръективного отображения $\mathcal{F}_6 \rightarrow \mathcal{F}_7$.

§ 3. РАНГИ И МАТРОИДЫ

Представим себе компьютерную программу, которая строит соответствие из теоремы 1 или проверяет его инъективность. Такая программа должна работать с информацией о расположении точек P_1, \dots, P_n и фиксировать, какие подмножества $S \subset \{P_1, \dots, P_n\}$ лежат на прямой, на плоскости и т. д. Для этого требуется вычислять и использовать функцию ранга:

$$\text{rank}(S) = \dim \text{span}(S) + 1.$$

То, что обсуждалось выше, можно сформулировать в терминах функции ранга. Например, подмножество S определяет плоскость ранга r в точности тогда, когда $\text{rank}(S) = r$ и для любой точки $P_i \notin S$

$$\text{rank}(S \cup P_i) = \text{rank}(S) + 1. \quad (1)$$

При перемещении точек P_1, \dots, P_n функция ранга меняется, но всегда удовлетворяет условиям

$$\text{rank}(\{P_i\}) = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$S \subseteq S' \Rightarrow \text{rank}(S) \leq \text{rank}(S'),$$

$$\text{rank}(S_1 \cup S_2) \leq \text{rank}(S_1) + \text{rank}(S_2) - \text{rank}(S_1 \cap S_2). \quad (3)$$

По определению

$$\text{rank}(\emptyset) = 0. \quad (4)$$

Из (2), (3) и (4) нетрудно вывести геометрически очевидный факт:

$$\text{rank}(S) \leq |S|.$$

Указанные свойства функции ранга дают одно из многих эквивалентных определений *матроида* — точнее, матроида без петель. Если дана функция ранга, то плоскости матроида определяются условием (1). И наоборот, функция ранга восстанавливается по информации о плоскостях.

Понятие матроида является комбинаторной абстракцией от геометрического представления о конфигурации. Справедлива важная

ТЕОРЕМА 2 (Том Брейден, Джун Ху, Джейкоб Мэтерн, Николас Праудфут, Ботонг Ванг [11]). *Для плоскостей произвольного матроида M инъективное соответствие из теоремы 1*

$$\iota: \mathcal{F}_r \rightarrow \mathcal{F}_{r'}, \quad r \leq r'$$

всегда существует при $r + r' \leq \text{rank}(M)$.

Эта теорема доказана в алгебраическом и комбинаторном контексте, без использования предельных переходов. Но, как мы увидим, *сильное свойство Лефшеца*, составляющее сердцевину этой теоремы, в прошлом ассоциировалось как раз с геометрией непрерывного.

Примерами матроидов служат множества точек векторных или проективных пространств над полем.

Далее, пусть \mathbb{F} — поле, y_1, \dots, y_n — переменные, $S \subseteq \{1, \dots, n\}$. Положим $\text{rank } S$ равным степени трансцендентности поля $\mathbb{F}(\{y_i\}_{i \in S})$ над \mathbb{F} . Для такой функции ранга выполнены аксиомы матроида.

Пусть теперь Y — неприводимое алгебраическое многообразие в векторном пространстве \mathbb{F}^n . Определим ранг множества индексов S как размерность проекции многообразия Y на подпространство, порождённое всеми y_i , $i \in S$. Матроиды, которые можно получить таким способом, называются *алгебраически представимыми* (algebraically realizable).

Оказывается, существует естественный класс примеров, содержащий все матроиды. Достаточно в предыдущей конструкции взять в ка-

честве Y тропическое векторное пространство, т. е. векторное пространство не над полем, а над идемпотентным полуполем. (Последнее отличается от поля тем, что сложение \oplus идемпотентно: $x \oplus x = x$, а вычитание, вообще говоря, не определено.) Это обнаружил Бернд Штурмфельс в работе [43]. Введение в эту тематику можно найти в [27, 30, 33], а новейшие продвижения — в [2, 3, 7–9, 18]. Здесь происходит комбинаторное обобщение классических геометрических результатов — важное для приложений и красивое.

§ 4. ГРАДУИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ И СИЛЬНОЕ СВОЙСТВО ЛЕФШЕЦА

Пусть \mathbb{A} — алгебра над некоторым полем, порождённая образующими x_1, \dots, x_n , и пусть они подчинены некоторым соотношениям. Иначе говоря, определённые многочлены от образующих тождественно равны нулю. Далее, пусть каждому x_i приписано натуральное число $\deg x_i$ — его *степень*. Степень монома $x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$ равна $n_1 \deg x_1 + \dots + n_k \deg x_k$. Алгебра называется *градуированной*, если в каждом соотношении все мономы имеют одинаковую степень. Например, соотношение $x^4 = 0$ в градуированной алгебре допустимо, а соотношение $x^4 + x = 0$ — нет. Подпространство в алгебре \mathbb{A} , порождённое мономами данной степени k от образующих, обозначается \mathbb{A}_k . Пространство \mathbb{A} является их прямой суммой.

Пусть topdeg — наибольшая степень соотношения, ω — элемент из \mathbb{A}_1 . Для каждой компоненты \mathbb{A}_i при $i < \text{topdeg} / 2$ рассмотрим гомоморфизм в $\mathbb{A}_{\text{topdeg} - i}$, заданный умножением на элемент $\omega^{\text{topdeg} - 2i}$. Если для некоторого $\omega \in \mathbb{A}_1$ все эти отображения взаимно однозначны (являются изоморфизмами), то будем говорить, что градуированная алгебра \mathbb{A} обладает *сильным свойством Лефшеца*. Из этого свойства, в частности, следует, что при $i < \text{topdeg} / 2$ отображение $\mathbb{A}_i \rightarrow \mathbb{A}_{i+1}$, заданное умножением на ω , взаимно однозначно и, значит, $\dim \mathbb{A}_i \leq \dim \mathbb{A}_{i+1}$.

Лефшец рассматривал описанное свойство в связи с красивыми геометрическими задачами, но в работе [11] для него создан более абстрактный, чисто комбинаторный контекст. Бывает, что прогресс в математике заставляет отказаться от красивых конструкций, которые больше не требуются логически.

§ 5. ГРАДУИРОВАННАЯ АЛГЕБРА МЁБИУСА

Градуированная алгебра Мёбиуса $\mathbb{H}(M)$ матроида M определяется следующим образом. Как векторное пространство над \mathbb{Q} она имеет

базис y_F , индексированный плоскостями F матроида M и имеющий градуировку

$$\deg y_F = \text{rank}(F).$$

Тогда

$$|\mathcal{F}_r| = \dim \mathbb{H}(M)_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Умножение в этой алгебре определяется по формуле

$$y_F y_{F'} = \begin{cases} y_{F \vee F'}, & \text{rank}(F \vee F') = \text{rank}(F) = \text{rank}(F'), \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $F \vee F'$ — минимальная плоскость, содержащая F и F' . В частности, $y_\emptyset \in \mathbb{H}(M)_0$ является единицей для этого умножения. Далее,

$$y_F \cdot \mathbb{H}(M) \subseteq \text{span}(\{y_{F'}\}_{F \subseteq F'}). \quad (5)$$

Теорема 2 вытекает из следующего свойства умножения на элемент

$$\omega = \sum_{F \in \mathcal{F}_\infty} y_F$$

в алгебре $\mathbb{H}(M)$.

ТЕОРЕМА 3 [11]. При $r \leq r'$ и $r + r' \leq \text{rank}(M)$ линейное отображение

$$\mathbb{H}(M)_r \xrightarrow{\text{умножение на } \omega^{r'-r}} \mathbb{H}(M)_{r'} \quad (6)$$

взаимно однозначно.

Покажем, как из теоремы 3 следует теорема 2. Пусть $A = (a_{F', F})$ — матрица умножения на $\omega^{r'-r}$ в базисах $\{y_F\} \subseteq \mathbb{H}(M)_r$ и $\{y_{F'}\} \subseteq \mathbb{H}(M)_{r'}$. В силу (5) элемент $a_{F', F}$ может быть не равен нулю лишь при $F \subseteq F'$. Поскольку матрица A задаёт взаимно однозначное отображение, в ней есть обратимая квадратная подматрица A' размера $|\mathcal{F}_r|$. Её определитель не равен нулю, поэтому для некоторой перестановки σ на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ произведение $a_{1, \sigma(1)} \dots a_{n, \sigma(n)}$ не равно нулю. Перестановка σ задаёт взаимно однозначное соответствие плоскостей из \mathcal{F}_r с плоскостями из $\mathcal{F}_{r'}$. Что и требовалось доказать.

В этом доказательстве мы переходим от комбинаторики к линейной алгебре и обратно: выбираем базисы в линейных пространствах, строим взаимно однозначное линейное отображение, а затем получаем из него взаимно однозначное отображение между базисами.

В наиболее общем виде стратегия доказательства теоремы 3 может быть описана так. Для $r = 0, 1, \dots, \text{rank}(M)$ строится градуированный модуль \mathbb{H} над алгеброй $\mathbb{H}(M)$, в котором можно рассматривать умно-

жение на $\omega^{\text{rank}(M)-2r}$ при $r < \frac{1}{2} \text{rank}(M)$, отображающее одну компоненту модуля в другую. Если доказано, что оно обладает сильным свойством Лефшеца, т. е. взаимно однозначно, то взаимно однозначным будет и отображение (6). Это ключ к теоремам 1, 2 и 3.

Если даны матроид M и его плоскость F , то можно построить два меньших матроида M^F и M_F . В матроиде M^F присутствуют лишь те точки и плоскости, которые содержатся в F . В матроиде M_F присутствуют лишь плоскости, содержащие F . Они определяются тем, какие точки присоединяются к F . При доказательстве теоремы 3 можно использовать индукцию: если теорема верна для всех M^F и M_F , то отсюда можно вывести её справедливость для M .

В статье [11] сделано важное наблюдение: гораздо естественнее доказывать не теорему 3, а более сильное утверждение. А именно, авторы доказывают, что для пространства $\mathbb{H}(M)$ существует *пакет Кэлера*, который кроме сильного свойства Лефшеца включает наличие невырожденной билинейной формы

$$(\cdot, \cdot): \mathbb{H}(M)_i \times \mathbb{H}(M)_{\text{rank}(M)-i} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad (7)$$

для которой при любом $\alpha \in \mathbb{H}(M)_i$ выполнено условие

$$\omega^{\text{rank}(M)-2i+1} \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad (-1)^i (\omega^{\text{rank}(M)-2i} \alpha, \alpha) > 0. \quad (8)$$

Для осведомлённых читателей отметим, что (7) выражает двойственность Пуанкаре, а (8) — это соотношения Ходжа — Римана. Однако теорема 3 верна для любых матроидов, не требуя топологического или алгебро-геометрического контекста.

Заинтересованный читатель найдёт рекомендации по дальнейшему чтению в § 7.

Первый из авторов находит уместным выразить здесь благодарность, которой заслуживают Джун Ху и Гил Калаи, познакомившие его с этой замечательной областью математики.

§ 6. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ МОТИВИРОВКА

Рассмотрим граф Γ на поверхности тора Σ . Он разбивает эту поверхность на грани. Будем считать, что эти грани — многоугольники, вершинами которых являются вершины графа.

Пусть на каждом ребре задано направление, а на вершинах $\{V_i\}$ графа Γ определена функция f_0 . Её *градиент* df_0 — это функция от ориентированных рёбер E_{ij} : если E_{ij} идёт из вершины V_i в вершину V_j , то

$$df_0(E_{ij}) = f(V_i) - f(V_j).$$

Пусть F — грань, ∂F — её граница, E_{ij}, E_{jk}, \dots — составляющие её рёбра, ориентированные соответственно от i к j , от j к k и т. д. Пусть f_1 — функция от ориентированных рёбер, заданная на этих рёбрах. Положим

$$df_1(F) = \sum_{E \in \partial F} f_1(E).$$

Аналогично можно определить функции от ориентированных граней. Будем считать, что функции от рёбер и граней при смене их ориентации меняют знак.

Если значения рассматриваемых функций лежат в некотором поле \mathbb{F} , то функции от вершин графа Γ образуют линейное пространство $\Omega^0(\Gamma)$, а функции от рёбер и граней — соответственно пространства $\Omega^1(\Gamma)$ и $\Omega^2(\Gamma)$. Выше мы построили линейные отображения

$$\Omega^0(\Gamma) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(\Gamma) \xrightarrow{d_1} \Omega^2(\Gamma).$$

Важно, что

$$d^2 = d_1 d_0 = 0.$$

(Здесь отражается тот факт, что граница границы пуста.)

В многомерном случае можно аналогично рассмотреть линейные пространства Ω^i , $i = 0, 1, \dots$, и последовательность отображений

$$d_i: \Omega^i \rightarrow \Omega^{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

со свойством $d_{i+1} d_i = 0$. Такая последовательность отображений носит название *комплéкс*. Поскольку $\text{Im } d_i \subseteq \text{Ker } d_{i+1}$, можно определить *группы когомологий* комплекса

$$H^i = \text{Ker } d_i / \text{Im } d_{i-1}$$

(полагаем $H^0 = \text{Ker } d_0$, $H^n = \Omega^n / \text{Im } d_{n-1}$).

Предыдущие рассуждения переносятся на любое *симплициальное* пространство, т. е. такое топологическое пространство, которое можно разбить на многогранники каких-либо размерностей.

Оказывается, что на прямой сумме групп когомологий комплекса можно ввести структуру градуированной алгебры. Ряд выдающихся математиков: М. Горески, Р. Макферсон, П. Делинь, А. Бейлинсон, И. Бернштейн и другие изучали вопрос о наличии у неё сильного свойства Лefшеца в следующей постановке: для каких чётномерных вещественных многообразий X найдётся такой класс $\omega \in H^2(X, \mathbb{Q})$, что отображение умножения

$$H^i(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\omega^{\frac{1}{2} \dim X - i}} H^{\dim X - i}(X, \mathbb{Q}), \quad i < \frac{1}{2} \dim X \quad (9)$$

является изоморфизмом? (Здесь размерность \dim рассматривается над \mathbb{R} , но изначально X может быть задано как комплексное многообразие. Его размерность как вещественного пространства вдвое больше, поэтому в формулировке вопроса присутствуют чётная размерность и класс $H^2(X, \mathbb{Q})$.)

Гладкости многообразия X недостаточно: для чётномерных сфер S^{2k} имеем $N^2(S^{2k}) = 0$, что не оставляет шансов для изоморфности отображения (9) при $k > 1$. Однако известно, что сильное свойство Лефшеца имеет место для некоторых классов как гладких, так и особых многообразий при соответствующем выборе класса ω .

Для матрица M , линейно представимого (т. е. представимого в проективном пространстве) над \mathbb{C} , алгебра Мёбиуса $\mathbb{P}\mathbb{H}(M)$ допускает интерпретацию в терминах когомологий, что приводит к топологическому доказательству сильного свойства Лефшеца. Это было использовано в первоначальном доказательстве теоремы 1 в статье [22].

Сильное свойство Лефшеца в терминах когомологий нашло эффективные применения к комбинаторным проблемам. В частности, Ричард Стэнли использовал его при доказательстве необходимости условий Макмаллена в характеристизации f -векторов симплицальных выпуклых многогранников (такой вектор указывает количество граней каждой размерности). См. [41] об этом и других комбинаторных применениях сильного свойства Лефшеца.

§ 7. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ЧТЕНИЕ

Популярное изложение этой тематики можно найти в статьях [20] в «Quanta Magazine».

Ведущими специалистами опубликованы обзоры [6, 28], в том числе самим Ху — [23, 24].

Среди учебной литературы по затронутым здесь областям математики отметим [5, 21, 38, 42].

И, разумеется, есть смысл обратиться к первоисточникам [11, 22].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Okounkov A. Combinatorial geometry takes the lead. <https://arxiv.org/abs/2207.03875>.
- [2] Amini O., Piquerez M. Hodge theory for tropical varieties. arxiv.org/abs/2007.07826.

- [3] *Amini O., Piquerez M.* Tropical Clemens — Schmid sequence and existence of tropical cycles with a given cohomology class. arxiv.org/abs/2012.13142.
- [4] *Ardila F., Boocher A.* The closure of a linear space in a product of lines // *J. Algebraic Combin.* 2016. Vol. 43, № 1. P. 199–235.
- [5] *Axler S.* Linear algebra done right / 3rd ed. Cham: Springer, 2015. (Undergraduate Texts in Mathematics).
- [6] *Baker M.* Hodge theory in combinatorics // *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*. 2018. Vol. 55, № 1. P. 57–80.
- [7] *Baker M., Bowler N.* Matroids over partial hyperstructures // *Adv. Math.* 2019. Vol. 343. P. 821–863.
- [8] *Baker M., Lorscheid O.* The moduli space of matroids // *Adv. Math.* 2021. Vol. 390. Paper No. 107883, 118.
- [9] *Baker M., Lorscheid O.* Foundations of matroids I: Matroids without large uniform minors. arxiv.org/abs/2008.00014.
- [10] *Björner A., Ekedahl T.* On the shape of Bruhat intervals // *Ann. of Math. (2)*. 2009. Vol. 170, № 2. P. 799–817.
- [11] *Braden T, Huh J., Matherne J., Proudfoot N., Wang B.* Singular Hodge theory for combinatorial geometries. arxiv.org/abs/2010.06088.
- [12] *Brenti F.* Unimodal, log-concave and Pólya frequency sequences in combinatorics // *Mem. Amer. Math. Soc.* 1989. Vol. 81, № 413.
- [13] *Bruijn N. G. de., Erdős P.* On a combinatorial problem // *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.* 1948. Vol. 51. P. 1277–1279 = *Indagationes Math.* 1948. Vol. 10. P. 421–423.
- [14] *Dilworth R. P., Greene C.* A counterexample to the generalization of Sperner's theorem // *J. Combinatorial Theory Ser. A.* 1971. Vol. 10. P. 18–21.
- [15] *Dowling Th. A., Wilson R. M.* The slimmest geometric lattices // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1974. Vol. 196. P. 203–215.
- [16] *Dowling Th. A., Wilson R. M.* Whitney number inequalities for geometric lattices // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1975. Vol. 47. P. 504–512.
- [17] *Elias B., Williamson G.* The Hodge theory of Soergel bimodules // *Ann. of Math. (2)*. 2014. Vol. 180, № 3. P. 1089–1136.
- [18] *Fink A.* Tropical cycles and Chow polytopes // *Beitr. Algebra Geom.* 2013. Vol. 54, № 1. P. 13–40.
- [19] *Greene C.* A rank inequality for finite geometric lattices // *J. Combinatorial Theory.* 1970. Vol. 9. P. 357–364.
- [20] *Hartnett K.* A Path Less Taken to the Peak of the Math World // *Quanta Magazine* (June 27, 2017). www.quantamagazine.org/a-path-less-taken-to-the-peak-of-the-math-world-20170627/.

- [21] *Hatcher A.* Algebraic topology. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [22] *Huh J., Wang B.* Enumeration of points, lines, planes, etc. // *Acta Math.* 2017. Vol. 218, № 2. P. 297–317.
- [23] *Huh J.* Combinatorial applications of the Hodge — Riemann relations // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians — Rio de Janeiro 2018.* Vol. IV. Invited lectures. Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2018. P. 3093–3111.
- [24] *Huh J.* Combinatorics and Hodge theory // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2022.*
- [25] *Ingleton A. W.* Representation of matroids // *Combinatorial Mathematics and its Applications (Proc. Conf., Oxford, 1969).* London: Academic Press, 1971. P. 149–167.
- [26] *Ingleton A. W., Main R. A.* Non-algebraic matroids exist // *Bull. London Math. Soc.* 1975. Vol. 7. P. 144–146.
- [27] *Itenberg I., Mikhalkin G., Shustin E.* Tropical algebraic geometry / 2nd ed. Basel: Birkhäuser Verlag, 2009. (Oberwolfach Seminars; Vol. 35).
- [28] *Kalai G.* The Work of June Huh // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2022.*
- [29] *Karu K.* Hard Lefschetz theorem for nonrational polytopes // *Invent. Math.* 2004. Vol. 157, № 2. P. 419–447.
- [30] *Katz E.* What is... tropical geometry? // *Notices Amer. Math. Soc.* 2017. Vol. 64, № 4. P. 380–382.
- [31] *Kazhdan D., Lusztig G.* Schubert varieties and Poincaré duality // *Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979).* Providence, RI: AMS, 1980. (Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI). P. 185–203.
- [32] *Lindström B.* The non-Pappus matroid is algebraic // *Ars Combin.* 1983. Vol. 16, № B. P. 95–96.
- [33] *Maclagan D., Sturmfels B.* Introduction to tropical geometry. Providence, RI: AMS, 2015. (Graduate Studies in Mathematics; Vol. 161).
- [34] *Melvin G., Slofstra W.* Soergel bimodules and the shape of Bruhat intervals, preprint, 2020.
- [35] *Motzkin Th.* Beiträge zur Theorie der linearen Ungleichungen, 1936. Dissertation Thesis, University of Basel, Jerusalem.
- [36] *Motzkin Th.* The lines and planes connecting the points of a finite set // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1951. Vol. 70. P. 451–464.
- [37] *Nelson P.* Almost all matroids are nonrepresentable // *Bull. Lond. Math. Soc.* 2018. Vol. 50, № 2. P. 245–248. DOI:10.1112/blms.12141.MR3830117.

- [38] *Oxley J. G.* Matroid theory. New York: The Clarendon Press; Oxford University Press, 1992. (Oxford Science Publications).
- [39] *Rota G.-C.* Combinatorial theory, old and new // Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970). Tome 3. Paris: Gauthier-Villars, 1971. P. 229–233.
- [40] *Stanley R. P.* The number of faces of a simplicial convex polytope // Adv. in Math. 1980. Vol. 35, № 3. P. 236–238.
- [41] *Stanley R. P.* Combinatorial applications of the hard Lefschetz theorem // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983). Warsaw: PWN, 1984. P. 447–453.
- [42] *Stanley R. P.* Algebraic combinatorics. Walks, trees, tableaux, and more. Cham: Springer, 2018. (Undergraduate Texts in Mathematics).
- [43] *Sturmfels B.* Solving systems of polynomial equations. Washington, DC: Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences; Providence, RI: AMS, 2002. (CBMS Regional Conference Series in Mathematics; Vol. 97).

Андрей Юрьевич Окуньков, Колумбийский университет (США)
okounkov@math.columbia.edu

Борис Рафаилович Френкин, МЦНМО
frenkin@mccme.ru