

Модель Изинга в нашей размерности и в наше время: о работах Ю. Дюминиль-Копена

А. Ю. Окуньков, Б. Р. Френкин

Эти заметки основаны на статье А. Ю. Окунькова [1]. Обработка для «Математического просвещения» произведена Б. Р. Френкиным. Цель заметок — разделить с читателем восхищение результатами филдсовских лауреатов 2022 года, используя максимально доступный, но точный математический язык. В конце указана литература, позволяющая расширить и углубить понимание предмета.



Ю. Дюминиль-Копен

Математическая физика, как показывает её название, развивается усилиями и математиков, и физиков. Как сказал герой этих заметок Юго Дюминиль-Копен, *«математическая физика соединяет всё, о чём я всегда мечтал как исследователь: она удовлетворяет моё стремление понять физический мир, в котором мы живём, и вознаграждает математиков красивыми и изящными строгими доказательствами»*.

Одним из самых впечатляющих физических процессов являются фазовые переходы. Они могут сопровождаться большими перемещениями в пространстве, и их подробное понимание — важная проблема как для физиков, так и для математиков. Юго Дюминиль-Копен и его сотрудники достигли в последние годы большого прогресса в изучении фазовых переходов в трёхмерной модели Изинга — вероятно, самой известной из моделей математической статистической физики.

§ 1. Модель Изинга

Вещество флуктуирует в пространстве

При обсуждении модели Изинга полезно иметь в виду картинку. Перед вами такая картинка, созданная Станиславом Смирновым (рис. 1), её смысл раскроется постепенно.

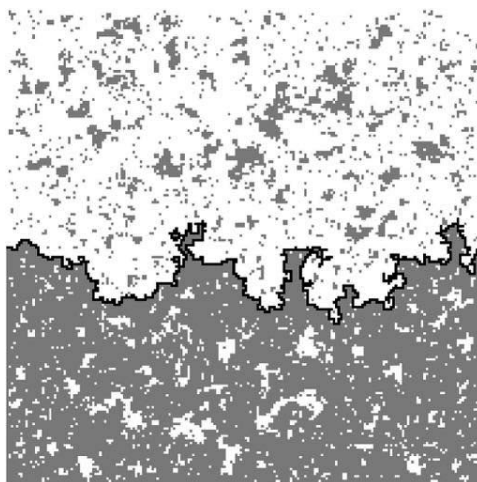


Рис. 1

В статистической физике с самого начала присутствует *случайность* и идёт речь о *вероятности* нахождения физической системы в том или ином состоянии¹⁾.

¹⁾ В квантовой механике случайность также присутствует с самого начала. Ньютоновская механика в принципе однозначно предсказывает поведение физической системы, но для системы большого размера и сложности эти предсказания становятся настолько сложными, что поведение системы практически случайно. Это тематика *эргодической теории*, развитие которой сильно стимулировалось вопросом, как возникает статистическая физика из ньютоновой механики.

На рис. 1 случайность реализуется в двумерном пространстве. Получившаяся конфигурация хотя и сложна, но не представляет собой простой «шум». Мы видим причудливую границу между чёрным и белым с множеством островов одного цвета среди другого, причём эти острова могут находиться один в другом.

Поведение статистической модели сильно зависит от размерности. Например, модель Изинга тривиальна в размерности 1, очень интересна в размерностях 2 и 3 и сводится к стандартной гауссовой модели в размерностях начиная с 4 (но доказательство гауссовости всё же требует глубоких идей).

Многие выдающиеся успехи статистической физики относятся к модели Изинга в размерности 2. Мы немного скажем о ней, но наша цель — рассказать о достижениях Юго Дюминиль-Копена с сотрудниками в исследовании модели Изинга в размерности 3. Однако мы ещё не определили, что это за модель.

ЗНАКИ НА РЕШЁТКЕ

Изинг и его наставник Ленц вначале построили модель ферромагнетизма, которая, как часто случается в математике и физике, нашла и совершенно другие приложения. Поскольку реальные физические данные дискретны, иногда бывает целесообразно считать дискретным и пространство, в котором они рассматриваются. А именно, будем рассматривать значения случайных величин лишь в точках некоторой решётки. Будем считать, что в каждом узле решётки Λ задан *знак*, т. е. значение случайной переменной σ , равное 1 или -1 . (В случае ферромагнетизма знак указывает направление магнитного момента.)

ВЕРОЯТНОСТЬ И ЭНЕРГИЯ

Людвиг Больцман и Уиллард Гиббс, первые архитекторы статистической физики, поняли связь между вероятностями состояний и *энергией*. В состоянии равновесия вероятность той или иной конфигурации частиц падает с ростом энергии *экспоненциально*:

$$\text{Prob}(\mathcal{C}) = \frac{1}{Z(T)} \exp\left(-\frac{\text{Энергия}(\mathcal{C})}{T}\right). \quad (1)$$

Здесь нужно пояснить смысл коэффициентов T и $Z(T)$.

Поскольку в экспоненте имеют смысл лишь безразмерные величины, а энергия — величина размерная, требуется размерная константа

$T \geq 0$, чтобы их связать. Она показывает, как быстро падает вероятность с ростом энергии. Константу T называют *температурой*²⁾.

Коэффициент $Z(T)$ таков, чтобы вероятности всех конфигураций в сумме давали 1. Он называется *функцией разбиения*. Отметим, что если добавить к энергиям всех конфигураций одну и ту же константу E_0 , то $Z(T)$ умножится на $e^{-E_0/T}$ и вероятности не изменятся, т. е. они зависят только от разностей между энергиями.

ЭНЕРГИЯ ПРОТИВ ЭНТРОПИИ

В статистической механике идёт драматическое соревнование между энергией и *энтропией*. Зададимся вопросом о распределении энергии в системе, которую описывает формула (1). В большой системе энергия примерно пропорциональна объёму V (при подходящем определении объёма), поэтому рассмотрим энергию, заключённую в единице объёма.

По определению, *энтропия* равна³⁾

$$S(E) = \frac{1}{V} \ln \left(\text{число состояний, в которых } \frac{\text{Энергия}}{V} = E \right). \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) следует, что

$$\text{Prob} \left(\frac{\text{Энергия}}{V} = E \right) = \frac{1}{Z(T)} \exp \left(\frac{V}{T} (-E + TS(E)) \right). \quad (3)$$

При больших V вероятность далека от нуля лишь если *свободная энергия* $E - TS(E)$ мала. При малых T это зависит в основном от энергии, а при больших T от энтропии.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В МОДЕЛИ ИЗИНГА

Настало время ввести энергию в модели Изинга. Пусть \mathcal{C} — некоторая конфигурация знаков. Ей соответствует функция

$$\sigma : \Lambda \rightarrow \{\pm 1\}. \quad (4)$$

Пространственная структура решётки проявляется в том, что взаимодействуют только соседние знаки, т. е.

$$\text{Энергия}(\sigma) = \sum_{\text{рёбра } v-v'} E(\sigma(v), \sigma(v')), \quad (5)$$

²⁾ Название «температура» связано с тем, что если две системы находятся в равновесии и взаимодействуют только путём обмена энергией, то объединённая система находится в равновесии в точности тогда, когда температуры частей равны, — как это происходит при теплообмене.

³⁾ Эквивалентная формула высечена на надгробии Больцмана в Вене.

где суммирование ведётся по рёбрам решётки, узлы v, v' — концы очередного ребра, а $E(\pm 1, \pm 1)$ — энергия взаимодействия соседних знаков, которую мы сейчас зададим.

Чтобы построить максимально симметричную модель, положим

$$E(1, 1) = E(-1, -1), \quad E(1, -1) = E(-1, 1).$$

Вспомним, что сдвиг всех энергий на константу ничего не меняет, а их масштабирование равносильно умножению температуры на константу. Так что ничто не мешает положить

$$E(\sigma(v), \sigma(v')) = -\sigma(v)\sigma(v'). \quad (6)$$

Знак минус здесь приводит к тому, что энергия меньше при одинаковых знаках в узлах.

КЛАСТЕРЫ И ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА

Кластер в модели Изинга — это совокупность узлов одинакового знака, между которыми можно пройти по рёбрам решётки. *Поверхность раздела* — граница между плюсами и минусами.

Модель Изинга можно понимать как описание флуктуирующей поверхности раздела. Действительно, из (5) следует, что энергия взаимодействия равна удвоенной площади поверхности раздела плюс константа (если считать расстояние между соседними узлами единичным).

При определённой *критической температуре* T_c в модели Изинга происходит *фазовый переход*. При температуре ниже критической модель отражает поведение анизотропного (например, кристаллического) вещества. Начиная с критической температуры появляются новые симметрии. Значение модели Изинга в статистической физике в том, что она даёт универсальное описание широкого класса явлений, в которых симметрия нарушается ниже определённой температуры.

§ 2. МЕРЫ ГИББСА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Перейдём теперь к *бесконечной* кубической решётке. Формула (1) даёт тогда бесконечные значения энергии. Но в физике важны не сами значения энергии, а их *разности*. И эти разности для конфигураций знаков, отличающихся лишь в конечном числе узлов, будут конечными. Далее Ω_L обозначает конечную кубическую решётку, состоящую из узлов исходной решётки Ω с координатами в пределах от $-L$ до L .

Важное понятие *меры Гиббса* на самом деле ввели Добрушин, Лэнфорд и Рюэль в 1960-х годах. Пусть σ — фиксированная конфигурация

знаков на решётке Ω , а π и π' — две произвольные конфигурации знаков на решётке Ω_L , совпадающие на её границе. Распределение вероятностей событий, состоящих в том, что σ совпадает с некоторой конфигурацией на Ω_L , называется *мерой Гиббса*, если при любом L и любых π и π' , совпадающих на границе решётки Ω_L , выполнено равенство

$$e^{\text{Энергия}(\pi)/T} \text{Prob}(\sigma|_{\Omega_L} = \pi) = e^{\text{Энергия}(\pi')/T} \text{Prob}(\sigma|_{\Omega_L} = \pi'). \quad (7)$$

Для любой температуры T существуют меры Гиббса, см. ниже. Для нас главным будет вопрос о том, сколько мер Гиббса существует при данном значении T .

Для бесконечной системы может существовать при данном T много различных состояний равновесия, флуктуации между которыми невозможны, поскольку требуют бесконечной энергии. Конкретно в модели Изинга каждый знак предпочитает быть таким же, как в соседних узлах. Поэтому если, скажем, в некоторой области плюсы преобладают над минусами, то такое преобладание будет сохраняться.

Далее обозначаем рассматриваемую меру Гиббса через μ , а $\mu(A)$ будет обозначать вероятность события A .

На практике удобно использовать средние по мере μ

$$\langle \sigma(v_1) \dots \sigma(v_n) \rangle_\mu = \mu(\text{произведение слева равно } 1) - \mu(\text{произведение слева равно } -1), \quad (8)$$

где v, \dots, v_n — некоторые узлы из Λ . Средние (8) называются (*n-точечными*) *корреляционными функциями*.

ВЫСОКАЯ ТЕМПЕРАТУРА

При $T = \infty$ энергия в равенстве (7) исчезает, и все конфигурации знаков равновероятны.

При достаточно высоких температурах мера Гиббса единственна и выражается в виде степенного ряда от $1/T$, который можно исследовать методами теории возмущений.

Пусть μ_0 — мера Гиббса при $1/T = \beta_0$, и мы хотим построить меру Гиббса μ для $\beta \approx \beta_0$. Для конечной подрешётки $\Omega \subset \Lambda$ единственная такая мера определяется формулой (1), или в преобразованном виде

$$\langle f(\sigma) \rangle_{\Omega, \beta} = \frac{\langle e^{(\beta_0 - \beta) \text{Энергия}(\sigma)} f(\sigma) \rangle_{\Omega, \beta_0}}{\langle e^{(\beta_0 - \beta) \text{Энергия}(\sigma)} \rangle_{\Omega, \beta_0}}, \quad (9)$$

где суммирование распространяется на все возможные знаки узлов из Ω .

На бесконечной решётке энергия может оказаться бесконечной. Но может и оказаться, что в формуле (9) в каждом члене разложения

по степеням $\Delta\beta$ бесконечности в числителе и знаменателе будут сокращаться. Если корреляция знаков быстро убывает с ростом расстояния между узлами, то ряд сходится. Однако так происходит не всегда.

Поскольку при высоких температурах мера Гиббса единственна, она трансляционно инвариантна, т. е. не меняется при сдвигах решётки Λ .

НИЗКАЯ ТЕМПЕРАТУРА

Пусть теперь, наоборот, $T = 0$. Тогда смысл равенства (7) таков: если энергию конфигурации можно уменьшить, поменяв конечное количество знаков, то её вероятность равна нулю. Для поверхности раздела это означает её *минимальность* в том смысле, что её площадь нельзя уменьшить, изменив конечное количество знаков.

Примером минимальной поверхности раздела служит пустое множество. В этом случае либо все знаки положительны, либо все отрицательны. Таким образом, при $T = 0$ существуют хотя бы две меры Гиббса. Более того, любая плоскость вида $x_i = 1/2 + N$ ($i = 1, 2, 3$), где N целое, задаёт минимальную поверхность раздела. Соответствующие меры Гиббса мы обозначим μ_{wall} . Если имеются две меры Гиббса, то любая их выпуклая линейная комбинация — тоже мера Гиббса. Опорные точки этого множества — *чистые* меры Гиббса.

Что происходит с мерами Гиббса при малых положительных T ? Поведение соответствующего ряда возмущений зависит от размерности.

В размерности 1 беспорядочное поведение возникает при любой ненулевой температуре, и можно получить любую температуру в результате возмущений системы с $T = 0$. Это было установлено Изингом в его диссертации в 1924 г. и на некоторое время снизило интерес к его модели. Подробнее об истории модели Изинга см. [18].

В размерности $d \geq 2$ ряд теории возмущений для мер Гиббса $\mu_{\pm 1}$ сходится! По существу это первым установил Рудольф Пайерлс в 1936 г. Он заметил, что количество допустимых поверхностей раздела данной площади S ограничено величиной C^S , где C — некоторая константа. Вследствие этого ряд возмущений сходится при $e^{2/T} > C$. Таким образом, при $d \geq 2$ модель Изинга может описывать и порядок, и беспорядок в зависимости от температуры.

Можно показать, что в размерности $d = 2$ единственные чистые меры Гиббса при $T > 0$ — это меры $\mu_{\pm 1}$. Напротив, при $d \geq 3$ ряд возмущений для μ_{wall} сходится, и существует целое семейство мер, которые изучались Добрушиным и носят его имя [11, 12]. При низких температурах, в размерностях начиная с 3, симметрии системы могут переводить одну из этих мер в другую.

КРИТИЧЕСКАЯ ТЕМПЕРАТУРА

Что происходит при промежуточных температурах? В модели Изинга и ей подобных существует ровно одна *критическая температура* T_c , пограничная между преобладанием порядка и беспорядка, влияния энергии и влияния энтропии. Станислав Смирнов провёл численное моделирование этого явления.

В случае конечной части решётки (например, квадрата) важны *граничные условия*. Формула (7) говорит о вероятностях различных знаков внутри квадрата, но знаки на границе можно расставить произвольно. Численное моделирование показывает, что поверхность раздела хорошо видна при $T < T_c$ (рис. 2, слева), практически отсутствует при $T > T_c$ (рис. 2, справа), а при $T = T_c$ видна, но сильно флуктуирует (рис. 2, посередине).

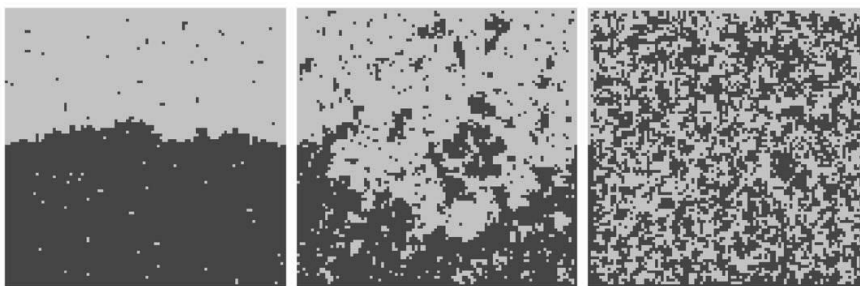


Рис. 2

При $T > T_c$ все существенные явления происходят на микроскопическом уровне. При $T < T_c$ есть одно макроскопическое явление — поверхность раздела, но её флуктуации опять микроскопические. Общее для всех случаев $T \neq T_c$ — *экспоненциальное* убывание корреляции между знаками с расстоянием. Скорость этого убывания определяет типичный масштаб явлений, наблюдаемых в этих случаях.

Напротив, при $T = T_c$ есть заметные явления любого масштаба вследствие того, что скорость убывания корреляции с расстоянием *полиномиальна*. На самом деле в размерности $d = 2$ при критической температуре модель Изинга инвариантна не только относительно масштабирования, но и относительно любых конформных (сохраняющих углы между кривыми) преобразований. За доказательство этой конформности Станислав Смирнов был удостоен в 2010 году Филдсовской медали. Дальнейшую информацию на тему конформной инвариантности можно найти в [19, 33]. После прорыва, который осуществили в 1984 г. три Александра — Белавин, Поляков и Zamolodchikov, — кон-

формная теория поля превратилась в мощнейшее средство изучения двумерных критических явлений.

Специалист по статистической физике должен предсказывать макроскопические свойства материалов исходя из микроскопических флуктуаций на уровне атомов. Это очень интересная работа, и изучение модели Изинга при $T \neq T_c$ не исключение. Но звёздный час наступает тогда, когда предстоит описать систему, испытывающую макроскопические флуктуации. Фазовые переходы — как раз такое явление. В частности, переход между порядком и беспорядком в модели Изинга вызывает больший интерес и имеет больше применений, чем то, что происходит при $T \neq T_c$. Но что же происходит при $T = T_c$? Этому вопросу посвящён следующий раздел.

§ 3. Что происходит при $T = T_c$?

КРИТИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА

Первый вопрос, который здесь возникает, — одна или много мер Гиббса существует при критической температуре. На самом деле это вопрос о *непрерывности* фазового перехода. Действительно, если таких мер много, то лишь одна из них может быть пределом единственной меры Гиббса, существующей при более высоких температурах. Для системы с другой мерой Гиббса при $T = T_c$ малейшее повышение температуры приведёт к скачку меры, что означает скачок в физических свойствах.

В природе встречаются фазовые переходы и непрерывного, и скачкообразного характера. Первоначальной мотивировкой модели Изинга явилось изучение магнитных свойств вещества вблизи *точки Кюри*, когда эти свойства утрачиваются непрерывным образом при нагревании. Однако модель Изинга не описывает магнитные явления в точности, так что делать выводы из этого примера нужно с осторожностью.

Модель Поттса

Важное отличие магнитных явлений от модели Изинга со знаками состоит в том, что намагничивание — это вектор, вращения которого образуют непрерывную группу Ли, тогда как в модели Изинга симметрии сводятся к смене знаков. Важно, что вращения могут быть произвольно малыми.

Ближе к модели Изинга стоят модели с большой, но конечной группой симметрий. Важнейший их пример — модель Поттса с Q состояни-

ями, при $Q = 2$ совпадающая с моделью Изинга. В модели Поттса отображение (4) имеет Q возможных образов, а энергия имеет вид (5), где

$$E(a, b) = \begin{cases} E_{=} , & a = b, \\ E_{\neq} , & a \neq b. \end{cases} \quad (10)$$

Как и в модели Изинга, здесь существенно лишь, что $E_{\neq} > E_{=}$.

ТЕОРЕМЫ

В свете сказанного, что же происходит при критической температуре в трёхмерной модели Изинга? Чтобы ещё больше заинтриговать читателя, приведём следующий фундаментальный результат Дюминиль-Копена и его сотрудников для $d = 2$.

ТЕОРЕМА 1 [20, 21]. *При $d = 2$ фазовый переход в модели Поттса с Q состояниями непрерывен в точности тогда, когда $Q \leq 4$.*

Теорема 1 соединяет два результата, доказанных разными методами. Непрерывность при $Q \leq 4$ доказали в статье [20] Дюминиль-Копен, Сидоравичюс и Тасьон, опираясь на более раннюю работу [13] Дюминиль-Копена. Наличие скачка при $Q > 4$ доказали в статье [21] Дюминиль-Копен, Ганьебен, Манолеску и Тасьон.

Подчеркнув таким образом глубину вопроса о непрерывности, мы наконец формулируем следующий результат, который получили Айзенман, Дюминиль-Копен и Сидоравичюс.

ТЕОРЕМА 2 [2]. *При $d = 3$ фазовый переход в модели Изинга непрерывен.*

Ожидается, что при $d = 3$ фазовый переход в модели Поттса скачкообразен при $Q \geq 3$ (см. [17]). Для высших размерностей имеется следующий результат.

ТЕОРЕМА 3 [3]. *При $d = 4$ в модели Изинга при критической температуре распределение при уменьшении шага решётки стремится к гауссову.*

Все эти замечательные результаты значительно углубили наше понимание явлений, которые изучает статистическая физика. При этом Юго Дюминиль-Копен говорит следующее: «Я предпочитаю оценки. Они обычно предоставляют более надёжный подход к критическим явлениям, и насколько возможно я стараюсь получать доказательства, не опирающиеся на точные формулы».

§ 4. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ЧТЕНИЕ

В качестве популярных обзоров данной тематики можно назвать [10, 35] и особенно [16]. Для дальнейшего изучения предмета можно рекомендовать лекции Дюминиль-Копена [17] и его статьи [14, 15, 18], см. также [25, 28, 34]. И, разумеется, читатель может обратиться к оригинальным статьям, в частности [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Okounkov A.* The Ising model in our dimension and our times. <https://arxiv.org/abs/2207.03874>.
- [2] *Aizenman M., Duminil-Copin H., Sidoravicius V.* Random currents and continuity of Ising model's spontaneous magnetization // *Comm. Math. Phys.* 2015. Vol. 334, № 2. P. 719–742.
- [3] *Aizenman M., Duminil-Copin H.* Marginal triviality of the scaling limits of critical 4D Ising and ϕ_4^4 models // *Ann. of Math. (2)*. 2021. Vol. 194, № 1. P. 163–235.
- [4] *Baxter R. J.* Onsager and Kaufman's calculation of the spontaneous magnetization of the Ising model // *J. Stat. Phys.* 2011. Vol. 145, № 3. P. 518–548.
- [5] *Baxter R. J.* Onsager and Kaufman's calculation of the spontaneous magnetization of the Ising model: II // *J. Stat. Phys.* 2012. Vol. 149, № 6. P. 1164–1167.
- [6] *Beffara V., Duminil-Copin H.* The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$ // *Probab. Theory Related Fields*. 2012. Vol. 153, № 3–4. P. 511–542.
- [7] *Bodineau T.* Translation invariant Gibbs states for the Ising model // *Probab. Theory Related Fields*. 2006. Vol. 135, № 2. P. 153–168.
- [8] *Cardy J.* Scaling and renormalization in statistical physic. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. (Cambridge Lecture Notes in Physics; Vol. 5).
- [9] *Chari V., Pressley A.* A guide to quantum groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. Corrected reprint of the 1994 original.
- [10] *Curien N.* Hugo Duminil-Copin et les transitions de phase // *Images des Mathématiques, CNRS* (2017). images.math.cnrs.fr/Hugo-Duminil-Copin-et-les-transitions-de-phase.
- [11] *Добрушин Р. Л.* Исследование гиббсовских состояний для трёхмерных решётчатых систем // *Теория вероятн. и её применения*. 1973. Т. 18, № 2. С. 261–279.
- [12] *Dobrushin R. L., Shlosman S. B.* The problem of translation invariance of Gibbs states at low temperatures // *Mathematical physics reviews*, Vol. 5, Chur: Harwood Academic Publ., 1985. (Soviet Sci. Rev. Sect. C: Math. Phys. Rev.; Vol. 5). P. 53–195.

- [13] *Duminil-Copin H.* Divergence of the correlation length for critical planar FK percolation with $1 \leq q \leq 4$ via parafermionic observables // *J. Phys. A.* 2012. Vol. 45, № 49. P. 494013, 23.
- [14] *Duminil-Copin H.* Random currents expansion of the Ising model // *European Congress of Mathematics.* Zürich: Eur. Math. Soc., 2018. P. 869–889.
- [15] *Duminil-Copin H.* Sixty years of percolation // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians — Rio de Janeiro 2018.* Vol. IV. Invited lectures. Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2018. P. 2829–2856.
- [16] *Duminil-Copin H.* Counting self-avoiding walks on the hexagonal lattice // *Snapshots of modern mathematics from Oberwolfach (2019).* <https://www.imaginary.org/sites/default/files/snapshots/snapshots-2019-006.pdf>.
- [17] *Duminil-Copin H.* Lectures on the Ising and Potts models on the hypercubic lattice // *Random graphs, phase transitions, and the Gaussian free field.* Cham: Springer, 2020. (Springer Proc. Math. Stat.; Vol. 304). P. 35–161.
- [18] *Duminil-Copin H.* 100 years of the (critical) Ising Model on the Hypercubic Lattice // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians.* 2022.
- [19] *Duminil-Copin H., Smirnov S.* Conformal invariance of lattice models // *Probability and statistical physics in two and more dimensions.* Providence, RI: AMS, 2012. (Clay Math. Proc.; Vol. 15). P. 213–276.
- [20] *Duminil-Copin H., Sidoravicius V., Tassion V.* Continuity of the phase transition for planar random-cluster and Potts models with $1 \leq q \leq 4$ // *Comm. Math. Phys.* 2017. Vol. 349, № 1. P. 47–107.
- [21] *Duminil-Copin H., Gagnebin M., Harel M., Manolescu I., Tassion V.* Discontinuity of the phase transition for the planar random-cluster and Potts models with $q > 4$ // *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 54 (2021), no. 6, 1363–1413 (in English, with English and French summaries).
- [22] *El-Showk Sh., Paulos M. F., Poland D., Rychkov S., Simmons-Duffin D., Vichi A.* Solving the 3d Ising model with the conformal bootstrap II. c -minimization and precise critical exponents // *J. Stat. Phys.* 2014. Vol. 157, № 4–5. P. 869–914.
- [23] *Fisher M.* The renormalization group in the theory of critical behavior // *Reviews of Modern Physics.* 1974. Vol. 46, № 4. P. 597.
- [24] *Fortuin C. M., Kasteleyn P. W., Ginibre J.* Correlation inequalities on some partially ordered sets // *Comm. Math. Phys.* 1971. Vol. 22. P. 89–103.
- [25] *Grimmett G* *Percolation* / 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1999. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]; Vol. 321).
- [26] *Ikhlef Y., Weston R., Wheeler M., Zinn-Justin P.* Discrete holomorphicity and quantized affine algebras // *J. Phys. A.* 2013. Vol. 46, № 26.

- [27] *Jimbo M., Miwa T.* Algebraic analysis of solvable lattice models. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC. Providence, RI: AMS, 1995. (CBMS Regional Conference Series in Mathematics; Vol. 85).
- [28] *Le Gall J.-F.* Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires, 2006. www.imo.universite-paris-saclay.fr/~jflgall/IPPA2.pdf.
- [29] *Maris H., Kadanoff L.* Teaching the renormalization group // *American Journal of Physics*. 1978. Vol. 46, № 6. P. 652–657.
- [30] *Reshetikhin N.* Lectures on the integrability of the six-vertex model // *Exact methods in low-dimensional statistical physics and quantum computing*. Oxford: Oxford Univ. Press, 2010. P. 197–266.
- [31] *Rukeyser M.* Willard Gibbs // *Doubleday*. New York: Doran and Company, 1942.
- [32] *Shirkov D.* Fifty years of the renormalization group // *CERN Courier*. 2001. Vol. 41. P. 19–22.
- [33] *Smirnov S.* Discrete complex analysis and probability // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Vol. I. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010.
- [34] *Werner W.* Percolation et modèle d’Ising. Paris: Société Mathématique de France, 2009. (Cours Spécialisés [Specialized Courses]; Vol. 16).
- [35] *Whitten A.* Mathematicians Prove Symmetry of Phase Transitions // *Quanta Magazine* (July 8, 2021). www.quantamagazine.org/mathematicians-prove-symmetry-of-phase-transitions-20210708/.
- [36] *Wilson K. G.* Renormalization group and strong interactions // *Phys. Rev. D* (3). 1971. Vol. 3. P. 1818–1846.
- [37] *Wilson K. G.* Renormalization group and critical phenomena. I. Renormalization group and the Kadanoff scaling picture // *Phys. Rev. B*. 1971. Vol. 4, № 9. P. 3174.
- [38] *Zinn-Justin J.* Renormalization and renormalization group: From the discovery of UV divergences to the concept of effective field theories // *Quantum Field Theory: Perspective and Prospective*. 1999. P. 375–388.

Андрей Юрьевич Окуньков, Колумбийский университет (США)

okounkov@math.columbia.edu

Борис Рафаилович Френкин, МЦНМО

frenkin@mccme.ru