Преподавание математики

Обман?!

А. Б. Сосинский

В этой заметке, адресованной старшеклассникам, студентам и преподавателям школ и вузов, я постараюсь объяснить, как вас обманывали при обучении математики. Предупреждаю, что дальнейший текст будет понятен только тем учащимся, которые всерьёз продвинулись в изучении математики.

Производная. Вам объясняли, что производная определяется на основании теории пределов, а именно как следующий предел:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Это определение — верное, но обман здесь состоит в том, что нет никакой необходимости в изучении теории пределов для работы с производной. На самом деле производная — это *линейный оператор* на соответствующем пространстве функций

$$': f(x) \mapsto f'(x),$$

удовлетворяющий правилу Лейбница:

$$(f \cdot g)'(x) = (f \cdot g')(x) + (f' \cdot g)(x).$$

Чтобы читатель освоил этот подход, предлагаю вычислить производные функций x^n и $\sin(x)$ и сравнить это вычисление с вычислением производных этих функций, выполненным на основании привычного определения производной. (Заметим, что при указанном выше подходе не нужно доказывать ни «лемму о производной суммы», ни правило Лейбница — они содержатся в определении производной, данном выше.) Однако здесь есть скрытая проблема, см. заключение статьи.

Интеграл. Во многих учебниках интеграл определяется как «предел интегральных сумм»:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \delta$, $x_1 = a$, $x_n = b$. Но выражение в правой части равенства не является функцией от δ. Если вам повезло и попался более качественный учебник или более толковый преподаватель, вы узнали смысл этого предела: это не предел, а инфимум интегральных сумм. Другой, тоже правильный (и в сущности эквивалентный) подход, состоит в предварительном построении теории меры (римановой меры или более общей меры Лебега). Эти меры имеют естественную интерпретацию в виде площади «криволинейной трапеции».

Но если вы хотите познать самое современное определение интеграла, то знайте: интеграл — это значение некоторого «класса когомологии». Но это чересчур заумно для рассказа адресату этой статьи. Продвинутый же читатель может посмотреть мою статью: *Sossinsky A. B.* De Rham Cohomology and Integration in Manifolds // Mathematical Notes. 2020. Vol. 107. P. 1034–1037.

Формула Ньютона — Лейбница. Эта замечательная формула связывает понятия интеграла и производной. Обычно говорят, что формула Ньютона — Лейбница гласит, что интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ равен разности значений первообразной $F(x)$ от $f(x)$ в точках b и a, и пишут

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

У такой формулировки два недостатка. Первый — то, что на самом деле интегрируется не функция f, а дифференциальная 1-форма $f(x)dx$. Второй — перечисление соавторов в названии, идущее не в алфавитном порядке (Л должно идти раньше Н, тем более, что Ньютон, в отличие от Лейбница, никогда не писал ничего похожего на эту формулу). Кроме того, указанная запись формулы Ньютона — Лейбница плохо обобщается на большие размерности, в отличие от следующего элегантного равенства:

$$\int_{[a,b]} dF = \int_{\partial[a,b]} F,$$

формальный смысл которого я предлагаю читателю разобрать самостоятельно.

Отступление: обозначение $f(x)$ для функции. Обозначение типа $y=f(x)$ для функции — большое несчастье. Его автор — французский математик XVIII века, специалист по дифференциальным уравнениям А. Клеро (A. Clairot). Беда тут вот в чём. Если мы рассматриваем композицию функций (скажем, сначала f, а потом g), мы должны писать $f(g(x))$, но это приходится читать справа налево, т. к. сначала выполняется $g(x)$, а затем к числу $g(x)$ применяется функция f. Если бы Клеро придумал для функций обозначение $(x)f$, этих неприятностей не было бы. И топологам не пришлось бы изобретать обозначения $g \circ f$ для композиции сначала g, потом f, которая определяется равенством

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Основная теорема математического анализа. Скорей всего от вас скрывали название этой теоремы, как и её формулировку:

Пусть даны гладкое многообразие M с краем ∂M и дифференциальная n-форма ω. Тогда

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

где $d\omega$ — дифференциал де Рама n-формы ω.

Имеется красивое недлинное доказательство этой теоремы в моей работе *De Rham Cohomology and Integration in Manifolds* (см. с. 2). Но боюсь, что оно будет недоступно большинству адресатов этой заметки. Давайте тогда перейдём к более простым и фундаментальным вещам.

Закон исключённого третьего. Закон исключённого третьего (*tertium non datur*) и вытекающий из него метод «доказательства от противного» вам известен ещё из средней школы, вы этим пользуетесь, как и большинство математиков. Но вот беда: этот закон попросту не всегда верен!

Дело в том, что по теореме Гёделя о неполноте существуют высказывания, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть. (В частности, таковы все те высказывания о натуральных числах в аксиоматике Пеано без аксиомы индукции, которые можно доказать лишь с использованием этой аксиомы.) Для всех таких высказываний закон исключённого третьего не верен. При этом Гёдель придумал конкретное высказывание, про которое он доказал, что его нельзя ни доказать, ни опровергнуть.

Что делать? Перейти на какую-то форму интуиционистской математики? Как А. А. Марков, изучать только так называемую «конструктивную математику»? (В ней, между прочим, все функции непрерывны!) Или, как делает большинство математиков, просто игнорировать эти неприятности, закрыть на них глаза? Есть ли здесь единственно правильный ответ?

Геометрия: аксиомы и картинки. Ещё в средней школе вам наверняка рассказывали, что геометрия — дедуктивная наука, основные её положения («теоремы») логически выводятся из «аксиом», и приводили списки этих аксиом. Но так ли это на практике?

В качестве иллюстрации рассмотрим нашу модификацию придуманного Я. С. Дубновым рассуждения, «доказывающего», что все треугольники — равносторонние. (См. *Дубнов Я. С.* Ошибки в геометрических доказательствах. М.: Физматлит, 1961. С. 13–17. Объяснение: с. 30–31.)

Пусть дан треугольник ABC. Очевидно, достаточно доказать, что он равнобедренный ($|AB| = |AC|$). Проведём биссектрису угла A до пересечения со срединным перпендикуляром к стороне BC в точке O (рис. 1). Логически возможны три случая.

(1) Точка O находится внутри треугольника ABC.

(2) Точка O находится вне треугольника ABC.

(3) Точка O находится на стороне BC.

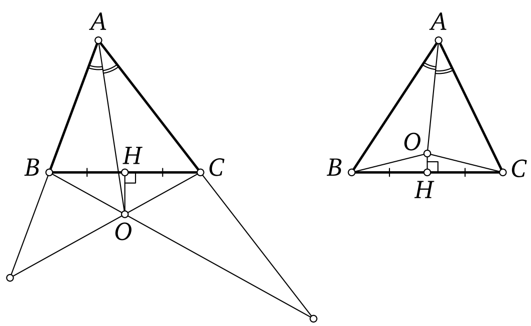

Рис. 1. Равносторонние треугольники?

(1) Сначала докажем, что треугольники HOB и HOC конгруэнтны. Действительно, у них сторона OH — общая, углы CHO и BHO равны (оба прямые) и стороны BH и CH равны по построению. Следовательно, отрезки BO и CO равны.

Докажем теперь конгруэнтность треугольников AOB и AOC. У них сторона AO — общая, углы OAB, OAC равны по построению и стороны

BO, CO равны (как мы только что доказали). Значит, $|AB| = |AC|$ и треугольник ABC — равнобедренный.

(2) Сначала докажем, что треугольники HOB и HOC конгруэнтны. Действительно, у них сторона OH — общая, углы CHO и BHO равны (оба прямые) и стороны BH и CH равны по построению. Следовательно, отрезки BO и CO равны.

Докажем теперь конгруэнтность треугольников AOB и AOC. У них сторона AO — общая, углы OAB, OAC равны по построению и стороны BO, CO равны (как мы только что доказали). Значит, $|AB| = |AC|$ и треугольник ABC — равнобедренный.

(3) В этом случае точки H и O совпадают, совпадают и прямые AH и AO, значит, треугольник ABC — равнобедренный.

Читатель наверняка понимает, что в случаях (1) и (2) на самом деле ошибка. Но как это доказать? Всё дело в том, что в треугольниках AOB и AOC соответственно равны две стороны и угол против одной из них. В этом случае треугольники не обязательно равны: возможен ещё случай, когда углы против второй из равных сторон в сумме дают 180 градусов. На картинке это не очевидно, и происходит подмена общего случая частным: делается необоснованный вывод, что треугольники равны.

Но в обычной средней школе многие доказательства проводятся с явным использованием картинки. Так что с точки зрения принятого в массовой школе уровня строгости наши рассуждения приходится считать ничуть не худшими, чем обычные!

Заключение. Перечитывая написанное, мне показалось, что я может быть в какой-то мере клеветал на свою любимую науку, показал её в неприглядном свете. Но всё-таки главное в этой заметке — это то, что не нужно быть ослеплённым любовью к математике, нужно сохранять разумно критическое отношение ко всем её разделам и утверждениям.

А также и к моим утверждениям, в частности в первом же разделе (про производную). Постарайтесь понять, что я не досказал, не заглядывая на страницу 190.

Алексей Брониславович Сосинский, НМУ

`asossinsky@yandex.ru`