
По мотивам задачника

Задача о разрезании многоугольника на две конгруэнтные части

А. Ю. Садовничий, Ю. С. Маркелов

Посвящается памяти Сергея Маркелова

В статье обсуждается вариация на тему задачи о разбиении фигуры на две конгруэнтные части, которая была предложена в задачнике Математического просвещения как задача 1.5 (выпуск 1), и дополнена задачей 1.5' (выпуск 27). Рассматривается гипотеза, что при разбиении выпуклой центрально-симметричной фигуры на две конгруэнтные части центр симметрии фигуры всегда лежит на общей границе двух частей. Основной результат работы состоит в доказательстве гипотезы для простых, но не обязательно выпуклых фигур на плоскости при условии, что фигура разбита на две части несамопересекающейся кривой.

§ 1. Введение и постановка задачи

Разбиения фигур представляют собой одну из ключевых тем в комбинаторной геометрии. Существует обширная литература, посвящённая разбиениям многоугольников на части, и в этой области было получено множество изящных результатов. Одной из основных задач является проблема равносоставленности равновеликих фигур. Две фигуры называются равносоставленными, если одну из них можно разбить на несколько частей и, переложив эти части движениями, сложить

из них вторую фигуру. Очевидно, что равноставленность фигур требует равенства площадей, т. е. их равновеликости. Несложно проверить, что равноставленность является отношением эквивалентности. Классическим результатом в этой теме является теорема Бойяи — Гервина о равноставленности двух равновеликих многоугольников, впервые доказанная в начале XIX века Уоллесом [3]. Аналогичное утверждение для трёхмерных многогранников было сформулировано Гильбертом как его Третья проблема и вскоре было опровергнуто Дэном в 1901 году с помощью построенного им алгебраического инварианта, определяемого через длины рёбер и двугранные углы (а именно, как сумма тензорных произведений этих величин над $\mathbb{Q}$, см. [6]). Эквивалентность равноставленности фигур и совпадения их инвариантов Дэна, т. е. полнота этого инварианта, была доказана значительно позже Сайдлером.

Другой проблемой, иллюстрирующей сложность этой темы, является квадратура круга Тарского — вопрос о равноставленности круга и квадрата равной площади. Здесь важную роль играет конкретное определение разбиения фигур. Если под разбиением понимать геометрическое «разрезание ножницами», при котором границы частей являются непрерывными кривыми, то ответ будет отрицательным [1]. Однако если разрешить любое теоретико-множественное разбиение точек на непересекающиеся множества, то в такой формулировке недавно был получен положительный результат: удалось разбить круг на конечное число борелевских множеств и переложить их параллельными переносами в квадрат [4].

Примером классической комбинаторной задачи на разбиение многоугольников является утверждение, что если квадрат разбит на несколько равновеликих треугольников, то их число обязательно чётно, что нетривиально доказывается с помощью леммы Шпернера [5].

В данной статье рассматривается разбиение плоской центральной-симметричной фигуры на две конгруэнтные части, т. е. части, совмещаемые движением. Под разбиением понимается «геометрическое разбиение», при котором границы частей представляют собой непрерывные спрямляемые кривые: неформально говоря, фигура разрезается на кусочки «ножницами», и каждый получившийся кусочек принадлежит одной из частей. Под спрямляемой кривой имеется в виду кривая конечной длины.

Впервые частный случай задачи, которой посвящена эта статья, был сформулирован в 1-м выпуске Математического просвещения [9]. В общем виде задача была предложена на заочном конкурсе Турнира

городов в 1999 году А. Я. Канель-Беловым и С. В. Маркеловым [11] и в 27-м выпуске Математического просвещения [10]. Эта задача обсуждалась в двух проектах под руководством А. Я. Канель-Белова [7, 8], в первом из которых были получены основные результаты этой статьи, а также докладывалась первым автором на семинаре по дискретной геометрии и теории чисел под руководством Н. П. Долбилина.

Текст данной статьи представляет собой более развёрнутое изложение работы [12].

В настоящей статье мы рассматриваем следующую гипотезу:

ГИПОТЕЗА 1 (А. Канель-Белов — С. Маркелов). *Выпуклая ограниченная центрально-симметричная фигура в $\mathbb{R}^n$ разбита на две конгруэнтные части. Тогда центр симметрии фигуры лежит на общей границе двух частей.*

Предложение 1. *Гипотеза верна, если фигура — замкнутый шар D^n .*

Доказательство. Предположим, что существуют две диаметрально противоположные точки на сфере — границе шара, принадлежащие одной и той же части разбиения. При движении, переводящем одну часть в другую, эти две точки также переходят в диаметрально противоположные, так как это две точки в шаре на расстоянии, равном диаметру. Следовательно, центр шара при движении остаётся на месте и лежит на общей границе частей. Наконец, если любые две диаметрально противоположные точки сферы принадлежат разным частям, то можно взять точку на границе частей, которую можно считать принадлежащей обеим частям, и ей противоположную. $\square$

Однако уже для других классических фигур, таких как гиперкуб, гипероктаэдр или n -мерный симплекс, в произвольной размерности доказательство гипотезы неизвестно.

Основные результаты данной работы получены для фигур на плоскости.

1. Гипотеза доказана, если движение, совмещающее части разбиения, не является поворотом.
2. Получен пример, показывающий, что условие выпуклости фигуры в гипотезе нельзя опустить.
3. Основной результат: если фигура имеет простую спрямляемую границу и разбита на две связные части простой спрямляемой кривой, то центр симметрии фигуры лежит на границе частей.
4. Получены некоторые продвижения для общего случая разбиений на плоскости.

§ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЙ

Рассмотрим ограниченную (не обязательно выпуклую) центрально-симметричную фигуру, разбитую на две части. Исследуем, как может быть устроено движение, которое совмещает две части разбиения. Назовём эти части A и B .

ТЕОРЕМА 1. *Если движение, которое переводит две части друг в друга, не является поворотом, то утверждение гипотезы верно.*

Доказательство (М. Бидва). Согласно теореме Шаля все движения плоскости можно классифицировать на несколько типов:

- 1) параллельный перенос;
- 2) скользящая (осевая) симметрия;
- 3) поворот.

Рассмотрим первые два по отдельности.

1. Параллельный перенос. Предположим, что некоторая окрестность U (будем считать, что это круг) центра симметрии фигуры целиком лежит в одной из частей разбиения (например, в A). Рассмотрим параллельный перенос T , который переводит A в B (рис. 1). Тогда образ TU окрестности при действии T лежит в части B . Следовательно, образ TU при центральной симметрии, т. е. $T^{-1}U$, лежит в фигуре и при этом принадлежит части B , так как её образ при действии T целиком лежит в части A . Получаем, что $T^{-2}U \subset A$ и аналогично $T^2U \subset A$. Продолжая эти рассуждения, получаем, что $T^{2k}U \subset A$, $T^{2k+1}U \subset B$ для всех целых k , и, следовательно, фигура не ограничена, что противоречит условию гипотезы.

2. Осевая (скользящая) симметрия. Ось симметрии удовлетворяет следующему условию: ровно половина площади фигуры находится по каждую сторону от оси (рис. 2). Несложно заметить, что любая прямая с таким свойством проходит через центр симметрии фигуры. Для осевой симметрии это завершает доказательство. Для скользящей симметрии проводим рассуждение, аналогичное случаю параллельного переноса. □

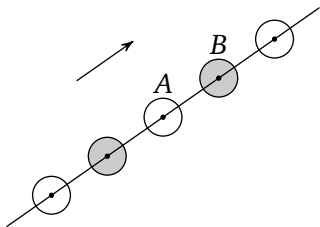


Рис. 1. Параллельный перенос

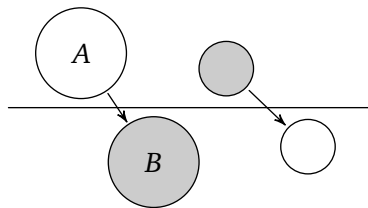


Рис. 2. Скользящая симметрия

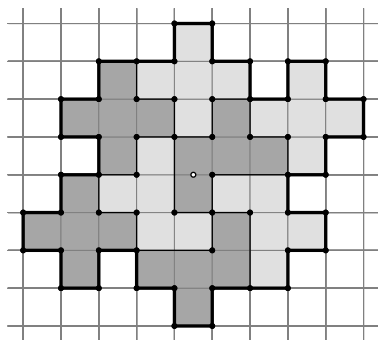


Рис. 3. Пример невыпуклого многоугольника, для которого не выполнено условие гипотезы

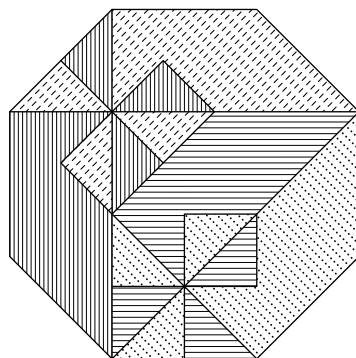


Рис. 4. Контрпример при разбиении на 4 части (П. Гузенко)

§ 3. ПРИМЕР НЕВЫПУКЛОГО МНОГОУГОЛЬНИКА, ДЛЯ КОТОРОГО НЕ ВЫПОЛНЕНА ГИПОТЕЗА

Условие выпуклости в формулировке гипотезы нельзя опустить (рис. 3).

Заметим, что части в этом примере не являются связными многоугольниками. Необходимость таких «сложных» частей следует в том числе из основной теоремы, доказанной ниже.

Кроме того, П. Гузенко придумал контрпример для аналогичной задачи о разбиении фигуры на 4 конгруэнтные части, в котором центр симметрии фигуры лежит строго внутри одной из частей (рис. 4).

§ 4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Под *многоугольником* мы далее понимаем фигуру, ограниченную одной несамопересекающейся замкнутой ломаной. В частности, в многоугольнике не может быть «дырок».

Основной результат работы состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 2. *Центрально-симметричный многоугольник разбит на две конгруэнтные части несамопересекающейся ломаной. Тогда эта ломаная проходит через центр симметрии многоугольника.*

Отметим, что в теореме 2 *выпуклость многоугольника не требуется*.

Отметим также, что согласно теореме 1 можно считать, что движение, которое меняет местами две части разбиения (назовём их A и B) — это поворот. Далее под «поворотом» понимается именно поворот, который переводит A в B .

Доказательство теоремы использует лемму из работы [2].

ЛЕММА 1 [2, лемма 2]. *Существует общий участок границы многоугольника и части A , который при повороте переходит в общий участок границы многоугольника и части B .* $\square$

На рис. 5 на левой фигуре утолщёнными линиями отмечены участки границы части A и части B , лежащие на границе многоугольника, которые переводятся одна в другую при повороте. Эти участки всегда можно продлить в обе стороны до максимальных по включению. Такие участки выходят из конца ломаной разбиения, как на правой фигуре с рис. 5. Далее будем рассматривать именно максимальные по включению участки из леммы 1.

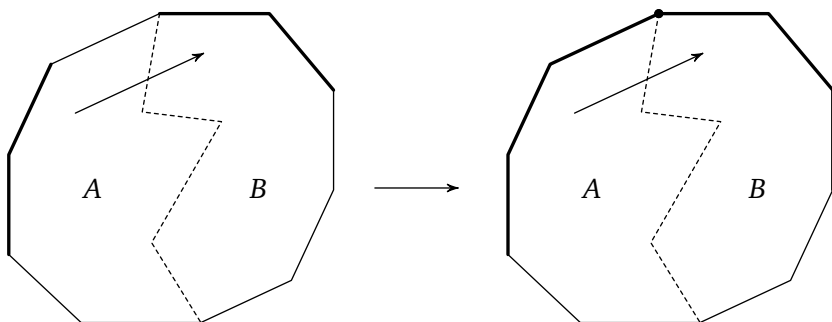


Рис. 5. Участок границы из леммы 1 показан утолщёнными линиями

Доказательство теоремы 2. Из равенства периметров частей тривиальным образом следует, что концы ломаной — центрально-симметричные точки. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Половина границы многоугольника, которая принадлежит части A , целиком переходит во вторую половину границы многоугольника при повороте. Тогда движение, которое действует таким образом на границу многоугольника, — это в точности центральная симметрия (рис. 6). Следовательно, при центральной симметрии ломаная переходит в себя, а значит, она содержит центр симметрии.

Случай 2. Образ ломаной при повороте пересекается с ломаной хотя бы по одному ребру. В таком случае рассмотрим конец ломаной (точка X на рис. 7), который при повороте переходит во внутреннюю точку ломаной. Угол при точке X на границе многоугольника должен быть равен 360° , что, очевидно, невозможно. То, что образ и прообраз точки X при повороте совпадают, следует из равенства длин тонких участков границ частей A и B (рис. 7).

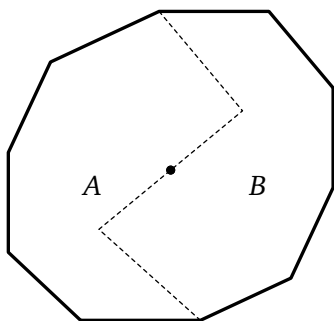


Рис. 6. Ломаная
центрально-симметрична

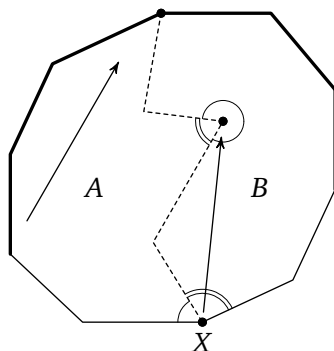


Рис. 7. Сумма углов
при точке X равна 360°

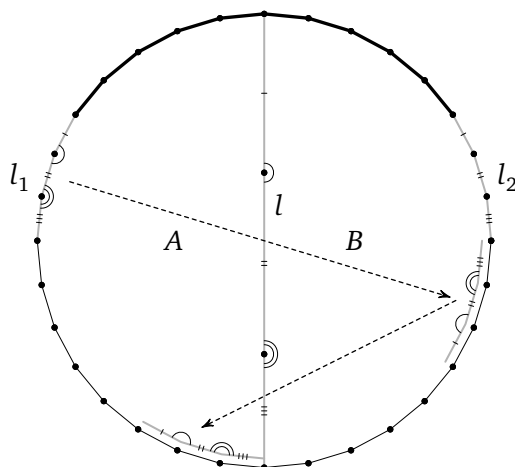


Рис. 8. Толстая часть границы части A переходит в толстую, тонкая в тонкую. Ломаная l_1 отражается и поворачивается до пересечения с l_2

Случай 3. Образ ломаной при повороте целиком лежит на границе многоугольника (следовательно, и прообраз тоже). Обозначим ломаную l , прообраз ломаной l_1 , образ l_2 (рис. 8).

Запустим следующий алгоритм: рассмотрим образ l_1 при центральной симметрии. Если этот образ пересекается с l_2 по отрезку ненулевой длины, то остановимся. Иначе, рассмотрим прообраз получившейся ломаной относительно поворота, снова отразим его относительно центра симметрии и т. д., пока не получим пересечение с l_2 . Это обязательно произойдёт, так как алгоритм не может заиклиться: прообраз на каждом шаге однозначен, а вернуться в l_1 невозможно по построению.

Возможны два типа пересечения образа l_1 с l_2 :

- Образ l_1 целиком совпал с l_2 (рис. 9). Так как этот образ l'_1 , а также l_2 , равны ломаной l , получается, что ломаная l равна своему отражению, т. е. она центрально-симметрична (относительно середины отрезка с концами в концах ломаной, т. е. центра симметрии изначального многоугольника). Таким образом, центр симметрии лежит на ломаной.
- Образ l_1 пересекается с l_2 , но не совпадает. В этом случае угол многоугольника при конце ломаной, образ которого в l_2 лежит внутри l'_1 (рис. 10), равен 360° , что невозможно. $\square$

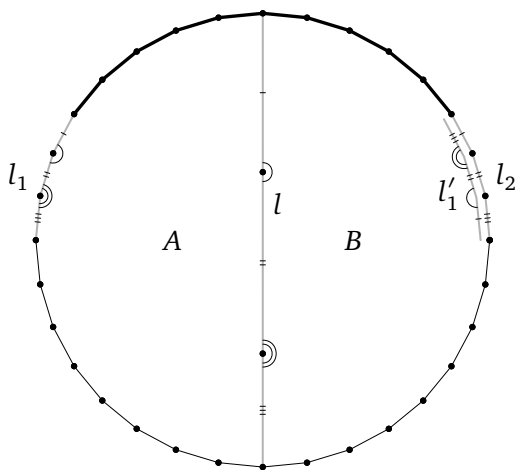


Рис. 9. Ломаная центрально-симметрична

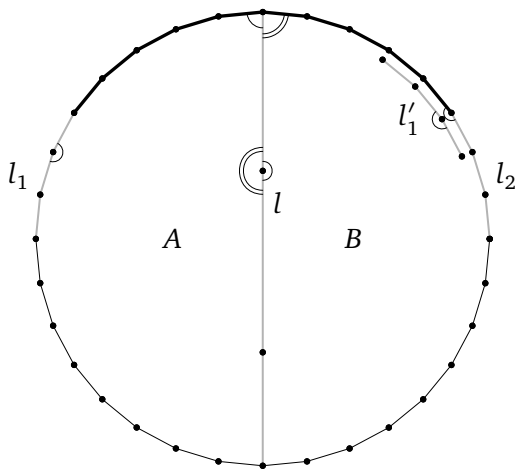


Рис. 10. Сумма углов с одной и двумя дужками равна 360°

Теорема 2 обобщается на фигуры с простой спрямляемой границей, разбитые на две части также простой спрямляемой кривой. Основной технической сложностью при доказательстве теоремы для таких фигур является обобщение понятия угла и суммы углов.

§ 5. Общий случай на плоскости

Рассмотрим теперь общий случай разбиения. Фигуру для простоты изложения будем считать выпуклым многоугольником. Будем также считать, что каждая часть разбиения состоит из конечного числа связанных компонент, граница каждой из которых — «достаточно хорошая» кривая (например, кусочно-гладкая). Исследуем свойства поворота, переводящего части фигуры (как и раньше, A и B) друг в друга. Обозначим центр поворота через O . Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Центр поворота O лежит строго вне многоугольника. В таком случае есть ровно одна точка многоугольника, ближайшая к O . Образ и прообраз этой точки относительно поворота оказывается вне многоугольника, что невозможно, так как поворот переводит одну часть в другую.

Случай 2. Точка O лежит на границе многоугольника. Без ограничения общности можем считать, что поворот идёт против часовой стрелки на угол, меньший 180° . Рассмотрим образ всего многоугольника при этом повороте. Рассмотрим первую «слева» (первую против часовой стрелки относительно центра поворота) точку X пересечения границы многоугольника и границы его образа. Обозначим

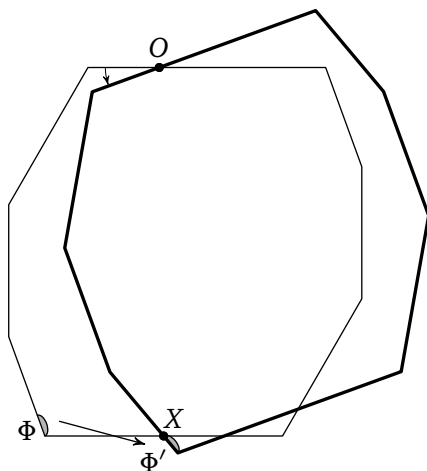


Рис. 11. Центр поворота на границе фигуры

через Φ' окрестность границы образа многоугольника справа от точки X (рис. 11). Заметим, что Φ' лежит вне изначального многоугольника. Обозначим через Φ прообраз Φ' относительно поворота. Тогда Φ лежит вне образа многоугольника при повороте, поэтому Φ не может принадлежать ни части A , ни части B : и образ, и прообраз Φ относительно поворота лежит вне многоугольника.

Случай 3. Точка O лежит внутри многоугольника (рис. 12). Покажем, что угол поворота в таком случае рационален (в градусах). Рассмотрим такой круг малого радиуса с центром в точке O , что он целиком лежит внутри многоугольника и ни одна дуга окружности ненулевой длины не лежит целиком на общей границе частей. Тогда окружность, ограничивающая этот круг, целиком разбивается на дуги, принадлежащие частям A и B . Рассмотрим наибольшую такую дугу (любую из таких, если их несколько). При повороте эта дуга целиком переходит в дугу, принадлежащую части B . При ещё одном повороте получается дуга, лежащая в части A , так как её прообраз не пересекается с частью A . Повторяя этот процесс конечное число раз, получаем либо дугу, целиком совпадающую с изначальной, из чего следует рациональность угла поворота, либо дугу, пересекающуюся с изначальной, что противоречит максимальной длине выбранной дуги.

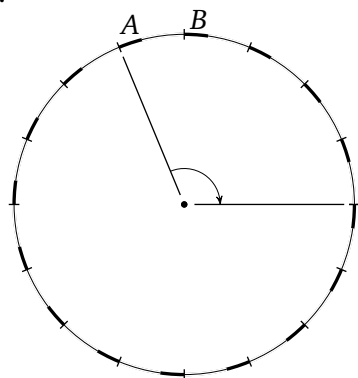


Рис. 12. Центр поворота внутри фигуры

§ 6. Вопросы для дальнейшего исследования

Из доказательства для плоскости следует более сильное утверждение, чем сформулированная гипотеза: части всегда совмещаются центральной симметрией. Вопрос о том, верно ли это в общем случае для выпуклых фигур, остаётся открытым.

Естественен вопрос о том, каким образом имеющиеся результаты обобщаются на фигуры больших размерностей, в том числе на гиперкубы и гипероктаэдры.

Например, контрпример тривиально обобщается на любую размерность, демонстрируя, что условие выпуклости в формулировке гипотезы нельзя опустить.

Теорему 1 можно обобщить на трёхмерное пространство: гипотеза аналогично доказывается, если движение является параллельным

переносом или зеркальной симметрией. К сожалению, уже в трёхмерном пространстве существуют несколько типов движений, для которых не удаётся применить аналогичные рассуждения.

Другим направлением для обобщения задачи может стать неевклидова геометрия: аналогичную гипотезу можно сформулировать в сферической геометрии и геометрии Лобачевского.

Не исключено, что гипотеза может быть неверна даже на плоскости, если части разбиения могут быть несвязными. Теоретически, было бы проще всего построить пример такого разбиения в теоретико-множественном смысле аналогично решению проблемы Тарского проблемы квадратуры круга, что однако не будет противоречить сформулированной гипотезе.

Данная проблема показывает, что даже такой простой сюжет комбинаторной геометрии, как разбиения фигур на две конгруэнтные части, не изучен полностью.

Благодарности

Выражаем благодарность Алексею Яковлевичу Канель-Белову за постановку этой задачи, предложение её на исследование и поддержку во время работы и написания статьи; Николаю Петровичу Долбилину и Сергею Валерьевичу Маркелову за полезное обсуждение и ценные комментарии; а также Максиму Бидве за первоначальные продвижения по данной задаче, а именно за исследование движений на плоскости и нахождение контрпримера для невыпуклой фигуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Dubins L., Hirsch M. W., Karush J.* Scissor congruence // *Israel J. Math.* 1963. Vol. 1. P. 239–247.
<https://link.springer.com/journal/11856/volumes-and-issues/1-4>.
- [2] *Eriksson K.* Splitting a polygon into two congruent pieces // *Amer. Math. Monthly.* 1996. Vol. 103, № 5. P. 393–400. <https://www.jstor.org/stable/i349420>.
- [3] *Jackson W. H.* Wallace's Theorem Concerning Plane Polygons of the Same Area // *Amer. J. Math.* 1912. Vol. 34, № 4. P. 383–390.
<https://www.jstor.org/stable/2370498?seq=1>.
- [4] *Máthé A., Noel J. A., Pikhurko O.* Circle squaring with pieces of small boundary and low Borel complexity. arXiv:2202.01412 [math.MG].
- [5] *Monsky P.* On dividing a square into triangles // *Amer. Math. Monthly.* 1970. Vol. 77, № 2. P. 161–164. <https://www.jstor.org/stable/2317329>.

- [6] Болтянский В. Г. Третья проблема Гильберта. М.: Наука, 1977.
<https://math.ru/lib/book/djvu/3problem.djvu>.
- [7] Канель-Белов А. Я. и др. Самозаклинивающиеся структуры // Майская проектная программа по математике и теоретической информатике, 2023. <https://sochisirius.ru/obuchenie/nauka/smena1488>.
- [8] Канель-Белов А. Я., Голафшан М., Иванов-Погодаев И., Нилов Ф., Оноприенко А., Садовничий А. Проект 6. Квадратура круга // 36-я Летняя конференция Международного математического Турнира Городов, 2024. <https://turgor.ru/lktg/2024/6/index.html>.
- [9] Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Задача 1.5 // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 1. М.: МЦНМО, 1997. С. 194.
<https://old.mccme.ru/free-books/matpros/pdf/mp-01.pdf>.
- [10] Канель-Белов А. Я., Маркелов С. В. Задача 1.5' // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 27. М.: МЦНМО, 2021. С. 237–238.
<https://old.mccme.ru/free-books/matpros-27.html>.
- [11] Канель-Белов А. Я., Маркелов С. В. Разбиения на равные части // Заочный конкурс Турнира Городов, 1999. <https://turgor.ru/problems/zktg/>.
- [12] Садовничий А. Ю. Задача о разрезании многоугольника на две конгруэнтные части // Матем. заметки. 2025. Т. 117, вып. 3. С. 443–452.
https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mzm&paperid=14526&option_lang=rus.

Антон Юрьевич Садовничий, ФПМИ МФТИ
sadovnichii.aiu@phystech.edu

Юрий Сергеевич Маркелов, математический факультет НИУ ВШЭ
yura.rubiks.cube@gmail.com