

О правильных раскрасках графов

М. В. Пименов, Хо Данг Зунг

В задачнике «Математического просвещения» [1] была предложена следующая задача 34.8:

Докажите, что либо вершины графа можно правильно покрасить в четыре Цвета, либо в графе найдутся два простых цикла, имеющие ровно две общие вершины. (М. Пименов)

В данной заметке мы приведём два решения этой задачи, а также поговорим о родственных результатах, связанных с правильной раскраской графов.

Напомним необходимые понятия и обозначения, которые мы будем использовать в данной работе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Раскраской графа G в k цветов называется функция $c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ на множестве V вершин графа G , ставящая в соответствие каждой вершине графа G натуральное число от 1 до k . Раскраска c называется *правильной*, если для любого ребра uv верно, что $c(u) \neq c(v)$, т. е. все смежные вершины имеют разные цвета. Наконец, *хроматическим числом* $\chi(G)$ графа G называется наименьшее число k , для которого существует правильная раскраска $c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$.

Далее под раскрасками понимаются только правильные раскраски. Они тесно связаны с циклами и путями. Рассмотрим несколько интересных результатов, которые помогут нам привыкнуть к этой связи.

ТЕОРЕМА 1. Если $\chi(G) \geq 4$, то существует пара вершин (u, v) , такая что между ними существует три простых пути, не пересекающихся по другим вершинам.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что наш граф G связан. При помощи индукции по количеству вершин докажем, что если такой пары вершин нет, то граф G красится в три цвета. База индукции для одной вершины очевидна. Докажем теперь шаг индукции. Рассмотрим минимальный простой цикл C в нашем графе

(если в графе цикла нет, то граф G является деревом и его вершины можно правильным образом раскрасить в два цвета) и удалим все рёбра этого цикла. Так как C — минимальный цикл, после его удаления не останется рёбер между вершинами, входящими в него. В результате наш граф G распадётся на несколько компонент связности.

Предположим, что какие-то две вершины u и v , входящие в цикл C , попали в одну и ту же компоненту связности. Рассмотрим простой путь P из вершины u в вершину v в этой компоненте связности. Выберем в этом пути все вершины, которые лежат в цикле C , и выпишем их в порядке обхода: $u, a_1, a_2, \dots, v$. Рассмотрим вершины u и a_1 (возможно, $a_1 = v$). Между ними есть простой путь, являющийся частью пути P , а также есть два пути, проходящие от u к a_1 по циклу C (рис. 1).

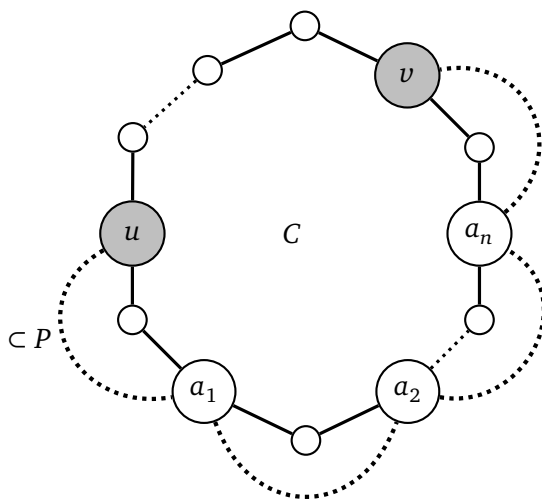


Рис. 1

Значит, после удаления рёбер цикла C все вершины попали в разные компоненты связности. Покрасим вначале вершины цикла C в три цвета, а затем удалим рёбра цикла и согласно предположению индукции покрасим каждую из компонент связности (это возможно, так как в каждой компоненте уже покрашено не более одной вершины). $\square$

Теорема 1 выглядит довольно непонятно: странно ожидать, что между двумя вершинами нам когда-либо придётся искать три пути... Однако из этой теоремы получается замечательное следствие, которое формулируется очень просто и красиво.

Следствие 1. Если в графе G нет простых чётных циклов, то $\chi(G) \leq 3$.

Доказательство. Если $\chi(G) \geq 4$, то по теореме 1 найдётся пара вершин (u, v) , между которыми есть три простых не пересекающихся по вершинам пути P_1, P_2 и P_3 . Длины каких-то двух из них имеют одинаковую чётность, поэтому цикл, образованный этими двумя путями, будет чётным — противоречие. $\square$

Следующий результат, которым мы обсудим, позволяет ответить на вопрос о том, может ли не увеличиться хроматическое число графа при добавлении в него ребра. Отметим, что в теории гамильтоновых графов хорошо известна теорема Бонди — Хватала (см. [2]), которая устанавливает связь между гамильтоновостью исходного графа и гамильтоновостью графа с добавленными рёбрами.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\chi(G) \leq k$ и u, v — несмежные вершины в графе G . Предположим, что если добавить ребро uv , то в новом графе G' нельзя выделить $k - 1$ чётных путей между вершинами u и v , не имеющих общих рёбер. Тогда $\chi(G') \leq k$.

Доказательство. Рассмотрим правильную раскраску графа G в k цветов. Если добавленное ребро uv соединяет вершины разного цвета, то граф G' по-прежнему k -раскрашиваемый. Значит, вершины u и v имеют одинаковый цвет 1. Рассмотрим подграфы G_i , образованные вершинами первого и i -го цветов (где $i = 2, \dots, k$) и рёбрами из графа G между этими вершинами. Каждый из подграфов G_i правильно покрашен в два цвета (1 и i), а потому является двудольным. Заметим, что после добавления ребра uv каждый из подграфов G_i должен перестать быть двудольным. Действительно, если при каком-то i подграф G'_i , полученный из G_i добавлением ребра uv , остался двудольным, то покрасим его правильно в цвета 1 и i , а остальные вершины графа G' перекрашивать не будем. В результате мы получим правильную раскраску графа G' в k цветов.

Значит, при каждом $i = 2, \dots, k$ в графе G'_i найдётся нечётный цикл, содержащий вершины u и v . В этом цикле найдётся чётный путь между вершинами u и v , причём ребра этого пути соединяют вершины цветов 1 и i . Ясно, что для разных i эти пути не имеют общих рёбер. Таким образом, между вершинами u и v мы нашли $k - 1$ чётных путей, не имеющих общих рёбер, — противоречие. $\square$

И снова результат теоремы вызывает недоумение: каким образом можно применить такое утверждение? Теперь нам придётся искать не три, а $k - 1$ путей в графе... Но и здесь есть замечательное следствие, которое формулируется коротко и ясно. Прежде чем переходить к этому следствию, напомним следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Граф G называется *критическим*, если удаление любой его вершины или любого его ребра приводит к уменьшению хроматического числа $\chi(G)$. Назовём граф k -критическим, если $\chi(G) = k$ и граф G является критическим.

Следствие 2. *Связный k -критический граф при удалении любых $k - 2$ рёбер остаётся связным.*

Доказательство. Нам достаточно показать, что любые две смежные вершины останутся в одной компоненте связности после удаления любых $k - 2$ рёбер. Для этого докажем, что между любыми двумя смежными вершинами в исходном графе существуют $k - 1$ путей, не имеющих общих рёбер. Тогда при удалении $k - 2$ рёбер хотя бы один из путей сохранит все свои рёбра и будет связывать данные вершины.

Один путь — это просто ребро между этими вершинами. Теперь докажем, что между любыми двумя смежными вершинами k -критического графа существует $k - 2$ чётных не пересекающихся по рёбрам путей. Предположим противное: пусть в нашем k -критическом графе G нашлось ребро uv , соединяющее вершины u и v , такое, что между вершинами u и v нельзя выделить $k - 2$ чётных не пересекающихся по рёбрам путей. Удалим это ребро. Теперь вершины нового графа G' можно правильно раскрасить в $k - 1$ цветов. Однако из теоремы 2 следует, что если в граф G' добавить ребро uv , то полученный граф G тоже можно будет покрасить в $k - 1$ цветов — противоречие. $\square$

Теперь решим задачу 34.8 из задачника «Математического просвещения». Мы докажем более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Если $\chi(G) \geq 5$, то в графе G есть два простых цикла, имеющих ровно одно общее ребро (т. е. у них есть ровно две общие вершины, причём эти вершины соседние).*

Доказательство. Предположим противное и рассмотрим контрпример с наименьшим количеством вершин. Прежде всего заметим, что степень любой вершины не меньше 4, в противном случае граф G правильно красится в четыре цвета. Докажем, что при удалении из графа G любого простого пути граф останется связным. Проведём индукцию по длине пути.

База индукции. Докажем, что при удалении любой вершины граф G не распадается на компоненты связности (иначе говоря, докажем, что в графе G нет точек сочленения). Предположим, что нашлась точка сочленения s и после её удаления возникают компоненты связности

$H_1, \dots, H_k$, где $k \geq 2$. Покрасим все вершины этих компонент в четыре цвета произвольным образом.

Теперь для каждого индекса i рассмотрим подграф $G_i = H_i \cup \{s\}$ в графе G . Если соседи вершины s в графе G_i покрашены не более чем в три цвета, то $\chi(G) \leq 4$. В самом деле, покрасим граф G_1 в четыре цвета (это можно сделать, так как вершина s граничит лишь с вершинами не более чем трёх цветов), а затем по очереди будем красить компоненты $H_2, \dots, H_k$ следующим образом. Пусть вершина s имеет цвет 1. Если её соседи в компоненте H_i покрашены в цвета 2, 3 и 4, то оставим раскраску компоненты H_i неизменной. Если же соседи вершины s в компоненте H_i покрашены (без ограничения общности) в цвета 1, 2 и 3, то изменим раскраску компоненты H_i так: цвет 1 заменится на цвет 2, цвет 2 — на цвет 3, цвет 3 — на цвет 4, цвет 4 — на цвет 1. Легко видеть, что мы получим правильную раскраску графа G в четыре цвета, что невозможно.

Значит, найдётся компонента H_i , при любой покраске которой в четыре цвета с вершиной s в графе G_i граничат вершины всех четырёх цветов. Получается, что $\chi(G_i) \geq 5$, причём в графе G_i нет двух простых циклов, имеющих ровно одно общее ребро (поскольку и в графе G их не было). Таким образом, мы нашли граф с меньшим числом вершин, чем в G , удовлетворяющий условию контрпримера, что невозможно в силу минимальности графа G — противоречие. Тем самым база индукции доказана.

Теперь докажем переход индукции. Вновь будем рассуждать от противного: пусть при удалении пути $P = a_1 a_2 \dots a_n$ граф G распадается на компоненты связности $M_1, M_2, \dots, M_k$ (рис. 2). Этот путь содержит два пути $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ и $a_2 a_3 \dots a_n$ длины $n - 1$, и при удалении любого из них граф G по предположению индукции остаётся связным. Значит, вершины a_1 и a_n соединены со всеми компонентами $M_1, \dots, M_k$. Предположим, что вершина a_2 соединена с компонентой M_i при некотором i . Пусть Q — путь из a_2 в a_1 , проходящий через вершины компоненты M_i . Выберем произвольную компоненту M_j , где $j \neq i$, и рассмотрим путь R , который соединяет вершины a_n и a_1 и лежит в компоненте M_j . Тогда возьмём в графе G циклы $C_1 = a_1 a_2 Q$ и $C_2 = PR$. Циклы C_1 и C_2 пересекаются ровно по одному ребру $a_1 a_2$ — противоречие.

Значит, все рёбра из вершины a_2 ведут в другие вершины пути P . Так как степень вершины a_2 не меньше 4, есть хотя бы две вершины из пути P , кроме a_1 и a_n , с которыми она соединена. Пусть это вершины a_x и a_y , где $x < y$ (рис. 3). Рассмотрим следующие два цикла: цикл $D_1 = a_2 a_3 \dots a_x a_2$ и $D_2 = a_x a_{x+1} \dots a_y a_2 a_x$. Вновь мы видим, что

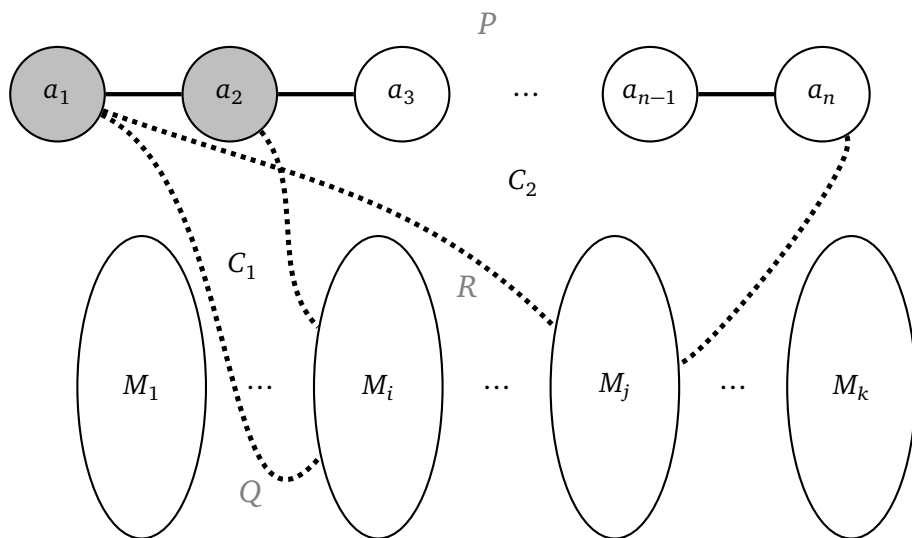


Рис. 2

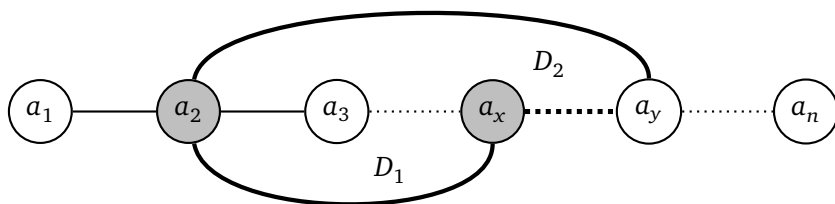


Рис. 3

эти циклы пересекаются ровно по одному ребру — $a_2 a_x$. Полученное противоречие доказывает переход индукции.

Итак, мы доказали, что при удалении из графа G любого простого пути этот граф остаётся связным. Значит, граф G не является деревом, а потому содержит некоторый цикл C . Заметим, что внутри этого цикла нет рёбер, поскольку в противном случае он разбивается на два цикла с двумя общими вершинами.

Выберем в цикле C две соседние вершины u и v и рассмотрим их соседей $u' \neq v'$, не лежащих в цикле C (такие существуют, поскольку степень каждой вершины графа G не меньше 4, см. рис. 4). Рассмотрим путь между этими вершинами, идущий по циклу и не совпадающий с ребром uv . При удалении этого пути граф G останется связным. Значит, существует путь между вершинами u' и v' . Но тогда мы вновь сумели найти два цикла, имеющие ровно две общие вершины u и v , что и завершает доказательство теоремы. $\square$

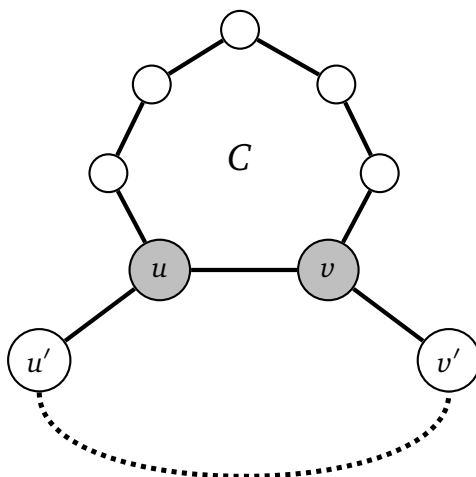


Рис. 4

Оказывается, в условии теоремы 3 можно уменьшить хроматическое число графа с 5 до 4 и утверждение останется верным.

ТЕОРЕМА 4. Если $\chi(G) \geq 4$, то в графе G есть два простых цикла, имеющих ровно одно общее ребро.

Доказательство. Будем считать, что граф G связан. Докажем следующее утверждение: если в графе G не найдутся два простых цикла, имеющих ровно одно общее ребро, то его можно правильно раскрасить в три цвета.

Шаг 1. Запустим на нашем графе G обход в глубину — рекурсивный алгоритм обхода графа, начинающийся в корневой вершине, обходящий весь граф и посещающий каждую вершину ровно один раз. Алгоритм заключается в следующем:

1. Начнём обход в любой вершине, которая будет *корнем* будущего остова дерева.
2. Пусть мы пришли в вершину v . Запомним, что она является посещённой.
3. Будем рассматривать в любом порядке все вершины u , смежные с v . Если u уже была посещена, то назовём ребро $v \rightarrow u$ *обратным*.
4. В противном случае рассмотрим вершину u и перейдём к шагу 2. В таком случае ребро $v - u$ является *прямым*.

Докажем следующие полезные свойства этого алгоритма.

1. Прямые рёбра образуют остова дерева графа. Действительно, поскольку граф связан, алгоритм посетил все вершины. По опре-

делению прямых рёбер они не ведут в уже посещённые вершины, поэтому получится связный граф без циклов, т. е. дерево.

2. Для всех обратных рёбер $v \rightarrow u$ вершина u является предком вершины v в остовном дереве. Предположим противное: пусть существует обратное ребро $v \rightarrow u$ и вершина v не лежит в поддереве вершины u . Заметим, что в процессе нашего обхода вершину u мы посетили раньше, чем вершину v . Но тогда в тот момент, когда мы посетим вершину v , мы всё ещё будем находиться в поддереве вершины u — противоречие.

С помощью нашего алгоритма найдём в графе G остовное дерево T со свойством 2 и мысленно ориентируем все обратные рёбра от потомка к предку.

Шаг 2. Докажем, что из каждой вершины G исходит не более одного обратного ребра.

Предположим противное: пусть из вершины v графа G выходит два обратных ребра $v \rightarrow u_1$ и $v \rightarrow u_2$. Без ограничения общности, пусть вершина u_1 является предком вершины u_2 . Обозначим прямой путь от u_2 к v через A , а путь от u_1 до u_2 — через B (рис. 5). Заметим, что тогда найдутся два простых цикла, имеющих ровно одно общее ребро — это $C_1 = Avu_2$ и $C_2 = Bu_2vu_1$. Полученное противоречие доказывает утверждение шага 3.

Теперь забудем про ориентации обратных рёбер и будем считать, что отныне они опять неориентированные.

Шаг 3. Будем «жадно» красить вершины графа в порядке увеличения расстояния до корня в T : сначала покрасим корень, затем вершины на уровне два в дереве T , затем вершины на уровне 3 и так далее, пока не дойдём до листьев в T . Заметим, что, когда выбирается цвет для вершины v , из смежных с ней вершин покрашены не более двух: её непосредственный родитель в T и, может быть, конец обратного ребра, ведущего из v . Следовательно, трёх цветов гарантированно хватит, чтобы покрасить весь граф. $\square$

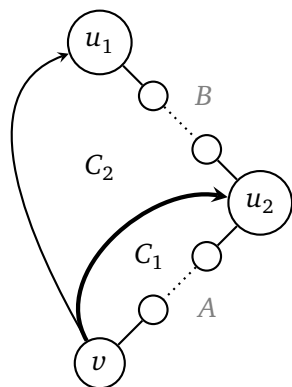


Рис. 5

Используя теорему 4, удаётся доказать следующие нетривиальные утверждения.

Следствие 3. Пусть $\{a_k\}$ — бесконечная последовательность натуральных чисел, такая, что $a_1 = a_2 = 1$ и $a_k \geq a_{k-1} + a_{k-2}$ для всех $k \geq 3$.

Тогда если в графе G выполняется неравенство $\chi(G) \geq 5$, то в нём есть простой цикл, длина которого не равна ни одному из чисел a_k .

Доказательство. Предположим противное: пусть в графе G длины всех циклов равны a_k для подходящих индексов k . По теореме 4 существуют два цикла C_1 и C_2 , которые пересекаются ровно по одному ребру e (рис. 6).

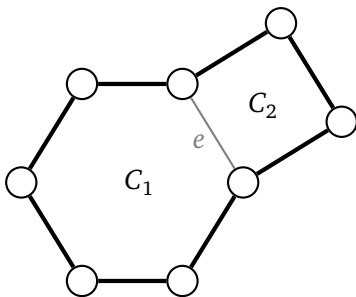


Рис. 6

Пусть длины циклов C_1 и C_2 равны a_i и a_j , причём без ограничения общности $i \leq j$. Тогда $a_i, a_j \geq 3$. Рассмотрим цикл $C_3 = (C_1 \setminus e) \cup (C_2 \setminus e)$. С одной стороны, его длина равна $a_i + a_j - 2$, а с другой стороны его длина равна a_ℓ для какого-то индекса ℓ . Получаем, что $a_\ell = a_i + a_j - 2$. Однако такое может быть тогда и только тогда, когда $i = j$, ведь если $i < j$, то $a_j < a_j + (a_i - 2) < a_{j+1}$. Таким образом, мы доказали, что если какие-то два цикла пересекаются ровно по одному ребру, они обязаны быть одинаковой длины.

Теперь построим остовное дерево T нашего графа, как в шаге 1 доказательства теоремы 4. Мы утверждаем, что найдётся вершина v , из которой идёт хотя бы три обратных ребра. Действительно, предположим, что из каждой вершины исходит не более двух обратных рёбер, тогда, крася вершины в порядке в порядке увеличения расстояния от корня в T аналогично шагу 3 в доказательстве теоремы 4, мы сможем покрасить все вершины графа G в четыре цвета. Однако $\chi(G) \geq 5$ — противоречие.

Возьмём любые три обратных ребра, исходящих из вершины v : пусть это рёбра vu_1 , vu_2 и vu_3 , причём вершина u_3 является предком вершины u_2 в дереве T , а вершина u_2 — предком вершины u_1 (рис. 7). Рассмотрим циклы $C_1 = vu_1 \dots u_2v$, $C_2 = vu_2 \dots u_3v$ и $C_3 = vu_3 \dots v$. Обозначим длины всех этих циклов через x (напомним, что длины любых двух циклов, имеющих общее ребро, равны). Заметим, что длина цикла $C_2 \oplus C_3$ равна $2x - 2$, а длина цикла $C_1 \oplus C_2 \oplus C_3$ равна $3x - 4$. Это

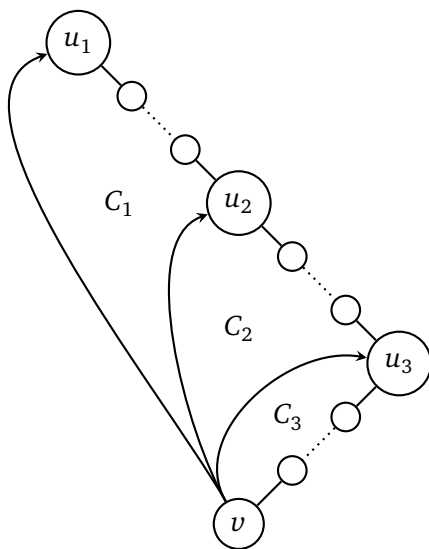


Рис. 7

означает, что числа x , $2x - 2$ и $3x - 4$ являются членами последовательности $\{a_k\}$. Однако это невозможно, ведь $x + (2x - 2) > (3x - 4)$. Полученное противоречие доказывает следствие 3. $\square$

Если выбирать последовательность $\{a_k\}$ определённым образом, то аналогичные результаты можно доказать и для графов с меньшим хроматическим числом.

Следствие 4. Если $\chi(G) \geq 4$, то в графе G есть простой цикл, длина которого не является числом Фибоначчи.

Доказательство. Предположим противное: пусть длины всех простых циклов графа G — числа Фибоначчи. Выберем два цикла C_1 и C_2 , имеющие единственное общее ребро e (существование таких циклов доказано в теореме 4). Обозначим длину первого цикла через $x = F_i$, а второго — через $y = F_j$, где F_i и F_j — числа Фибоначчи. Без ограничения общности будем считать, что $F_i \leq F_j$. Рассмотрим цикл $C_1 \cup C_2 \setminus \{e\}$. Его длина равна $x + y - 2$ и также является числом Фибоначчи. Но если $x \neq y$, то $F_j < x + y - 2 < F_i + F_j \leq F_{j+1}$, что невозможно. Если же $x = y$, то $F_{i+1} < x + y - 2 < F_{i+2}$ — снова получаем противоречие. $\square$

Следствие 5. Пусть $t \geq 4$ — произвольное вещественное число и $a_k = [kt]$ (здесь квадратные скобки, как обычно, обозначают целую часть числа). Тогда если $\chi(G) \geq 4$, то в графе G есть простой цикл, длина которого не равна a_k ни для какого индекса k .

Доказательство. Как и в предыдущем следствии, предположим противное, рассмотрим два цикла C_1 и C_2 длин $x = [tk]$ и $y = [t\ell]$ соответственно, имеющие ровно одно общее ребро e , и возьмём цикл $C_1 \cup C_2 \setminus \{e\}$ длины $x + y - 2$. Тогда

$$[t \cdot (k + \ell - 1)] < x + y - 2 < [t \cdot (k + \ell - 1)]$$

— противоречие. □

Завершим нашу заметку следующим красивым фактом.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $k \geq 3$ — натуральное число. Если $\chi(G) \geq k$, то в графе G есть цикл длины не менее k .

Доказательство. Запустим алгоритм обхода в глубину из вершины v графа G . Рассмотрим граф T , образованный прямыми рёбрами. Как мы доказывали ранее, этот граф является деревом. Ориентируем рёбра дерева T так, чтобы из каждой вершины исходило не более одного ребра (для этого достаточно подвесить граф за любую вершину и ориентировать рёбра от потомка к предку). Назовём *порядком обратного ребра* длину пути от первой до второй вершины обратного ребра в дереве, образованном прямыми рёбрами. Тогда если есть обратное ребро порядка хотя бы $k - 1$, то имеется цикл длины хотя бы k (цикл, образованный путём по прямым рёбрам и самым обратным ребром).

Заметим, что порядок каждого ребра не меньше 2 (иначе это прямое ребро), а из одной вершины выходит не более одного ребра каждого из порядков. Значит, если в графе G нет цикла длины хотя бы k , то из каждой вершины исходит не более $k - 3$ обратных рёбер. Докажем, что тогда граф красится в $k - 1$ цвет. Рассмотрим дерево, образованное прямыми рёбрами, и подвесим его за вершину v (рис. 8). Начнём красить по очереди вершины графа G , начиная с вершины v и далее опускаясь по уровням нашего дерева. В момент покраски вершины u уже раскрашенные вершины расположены в дереве выше по уровню. Тогда уже покрашенных вершин, смежных с вершиной u , не более $1 + (k - 3) = k - 2$ (одно прямое ребро к родителю и не более $k - 3$ обратных рёбер). Но тогда для вершины u найдётся свободный цвет, и мы сможем её покрасить.

Таким образом, граф G правильно красится в $k - 1$ цвет. С другой стороны, $\chi(G) \geq k$. Получаем противоречие. □

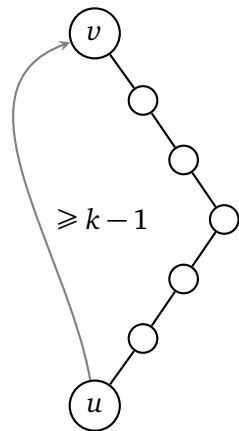


Рис. 8

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят П. В. Бибикова за внимание к работе и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 34. М.: МЦНМО, 2025. С. 168.
- [2] Bondy J. A., Chvátal V. A method in graph theory // Discrete Math. 1976. Vol. 15, № 2. P. 111–135.

Марк Владимирович Пименов,
ученик 11 класса Лицея «Воробьёвы горы» г. Москвы
comboflex@mail.ru

Хо Данг Зунг, студент 1 курса НИУ ВШЭ
hodd.tolya@gmail.com