Задачник

(составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

Обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

На базе решения трудной задачи неоднократно появлялась научная статья (в том числе у школьника), а также доклад на конференции (школьной или взрослой). Так что призываем присылать решения опубликованных задач. Составители задачника помогут с публикациями и докладами на конференциях.

1. а) Дана система прямых, отстоящих друг от друга на единичные расстояния. Какова вероятность, что случайно брошенная игла длины L пересечёт прямую? (*Задача Бюффона*)
   б) Тот же вопрос для квадратной решётки. Рассмотрите многомерные обобщения. (*Л. Радзивиловский*)
2. Дан конечный граф G. Докажите, что число способов правильно раскрасить его в k цветов есть многочлен от k. (Раскраска правильная, если любые смежные вершины покрашены различно.) (*Фольклор*)

3. Дана матрица $C = (c_{ij})$ где $C_{ij} = \dfrac{1}{a_i + b_j}$. Найдите $\mathrm{Det}(C)$ и C^{-1}. (*Л. Радзивиловский*)

4. а) Сфера разбита n большими кругами общего положения. Какое минимальное число треугольников может получиться? Рассмотрите многомерные обобщения.
   б) А что если требовать лишь, чтобы не все круги проходили через одну точку? (*А. Я. Канель-Белов, А. В. Шанин*)

5. У каждого игрока в настольный теннис есть параметр силы, который принимает положительные значения. В противостоянии спортсменов с силами a и b игрок с силой a побеждает с вероятностью $a/(a+b)$. На соревновании каждая команда упорядочивает своих спортсменов, и сначала играют первые игроки каждой команды. Проигравший выбывает, следующий по очереди из его команды играет с тем же игроком другой команды, и т. д. Проигрывает команда, у которой все игроки проиграли. Докажите, что вероятность победы каждой из команд не зависит от порядка, в котором команды располагают своих игроков. (*Фольклор*)

6. На какое минимальное число чёрных и белых частей можно разбить отрезок $[0, 1]$ так, чтобы для каждого многочлена P степени не выше 2025 сумма интегралов по чёрным частям равнялась сумме интегралов по белым? (*А. Я. Канель-Белов, Г. В. Кондаков*)

7. В школе учатся n мальчиков и n девочек. Каждый мальчик знаком ровно с k девочками и каждая девочка знакома ровно с k мальчиками. При этом у любых двух девочек ровно c знакомых мальчиков. Докажите, что у любых двух мальчиков ровно c знакомых девочек. (*Л. Радзивиловский*)

8. Задан некоторый набор $\mathcal{V}$ возрастающих функций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Будем говорить, что последовательность нулей и единиц $A(n)$ является *$\mathcal{V}$-случайной*, если для любой функции $f \in \mathcal{V}$ плотность единиц в последовательности $A(f(n))$ существует и равна $1/2$.
   а) Докажите, что для любого конечного набора $\mathcal{V}$ существует $\mathcal{V}$-случайная последовательность.
   б) Докажите, что если $\mathcal{V}$ счётно, то $\mathcal{V}$-случайная последовательность существует.
   в) Постройте $\mathcal{V}$-случайную последовательность, если $\mathcal{V}$ — множество всех линейных функций или множество всех многочленов. (*Д. В. Фомин, Гран-при Ленинград*, 1987–1988)

9. На плоскости дано $a = 3n + 1$ точек общего положения. Докажите, что их можно раскрасить в красный и чёрный цвета так, что, при

выкидывании любых $n-1$ точек из набора, выпуклые оболочки оставшихся красных и оставшихся чёрных точек будут пересекаться.
а) Рассмотрите случай $n=1,2$.
б) Докажите, что при $n=2$ число a в условии нельзя заменить на $3n$.
в) Докажите утверждение задачи для произвольного n.
г) Верно ли, что при любом n число a в условии нельзя заменить на $3n$?
Попробуйте дать какую-либо оценку снизу для числа a.

(*Г. Я. Перельман, Гран-при Ленинград, 1987–1988, сообщил Д. В. Фомин*)

10. Есть правильный треугольник со стороной n, разбитый на маленькие правильные треугольнички со стороной 1, причём в этом треугольнике есть n треугольных дырок размера 1 вершиной вверх. Докажите, что исходный треугольник можно замостить ромбиками со стороной 1 в точности тогда, когда выполнено следующее условие: *для любого $k \leqslant n$ каждый правильный треугольничек вершиной вверх и со стороной k содержит не более k дырок.*

(*IMO Shortlist, 2006, задача C6*)

11. Прямая пересекает плоскости граней BCD, CDA, DAB, ABC тетраэдра $ABCD$ в точках A', B', C', D' соответственно. Докажите, что середины отрезков AA', BB', CC', DD' лежат в одной плоскости.

(*С. В. Маркелов*, *предложил А. А. Заславский*)

12. Докажите, что сумма $\sum_{n=m_1}^{m_2} \dfrac{1}{an+b}$ не является целой: а) при $a=3$, $b=1$; б) при любых целых a, b. (*А. Я. Канель-Белов*)

13. Из бумаги склеили модель выпуклого многогранника с n вершинами. Затем сделали несколько разрезов вдоль рёбер так, что получилась его плоская развёртка.
а) Докажите, что число разрезов равно $n-1$.
б) Докажите, что любые $n-1$ разрезов, не нарушающие связности поверхности многогранника, приводят к его плоской развёртке.

(*С. Л. Табачников*)

14. Пусть G — неабелева конечная простая группа, $f\colon G \to G$ — произвольное отображение G в себя. Докажите, что существуют такое натуральное n и такие $g_1, g_2, \ldots, g_n, g_{n+1} \in G$, что

$$f(x) = g_1 x g_2 x g_3 x \ldots g_n x g_{n+1} \quad \text{при всех } x \in G.$$

(*Фольклор*)

15. Известно, что хаусдорфова размерность графиков функций

$$f\colon [0,1] \to [0,1] \quad \text{и} \quad g\colon [0,1] \to [0,1]$$

равна α, β соответственно. Какой может быть хаусдорфова размерность графика функции $f \circ g$? (*Хаусдорфова размерность* множества M равна γ, если асимптотика минимального числа частей диаметра ε, покрывающих M, есть $\varepsilon^{-\gamma}$ при $\varepsilon \to 0$.)

(*А. Я. Канель-Белов*)