

Дополнение и комментарии к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и естественность задачи. Оно так важно в том числе и по этой причине. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимосвязаны).

При публикации дополнения к задачнику нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут обнаружиться как с классикой, так и с сюжетами, которые находятся в процессе исследования и ещё не получили изящной формулировки.

В выпуске 1 (с. 194, см. решение: выпуск 4, с. 219) опубликована

Задача 1.7. Пусть функция непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$,

$$f(0) = f(1) = 0, \quad \int_0^1 (f'(t))^2 dt \leq 1.$$

Изобразить на координатной плоскости множество точек, через которые может проходить график функции $y = f(x)$. (В. М. Тихомиров)

Ещё немного интегральных неравенств.

Задача 1.7'. (а) Даны непрерывные неубывающие функции f, g на отрезке $[a, b]$ такие, что при всех $x \in [a, b]$

$$\int_a^x \sqrt{f(t)} dt \leq \int_a^x \sqrt{g(t)} dt, \quad \int_a^b \sqrt{f(t)} dt = \int_a^b \sqrt{g(t)} dt.$$

Докажите, что

$$\int_a^b \sqrt{1 + f(t)} dt \geq \int_a^b \sqrt{1 + g(t)} dt.$$

(б) Докажите интегральное неравенство

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)^2 dx dy + \left(\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \right)^2 \geq \\ \geq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right)^2 dy + \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right)^2 dx.$$

(Л. Радзивиловский)

В выпуске 2 (с. 216, см. решение: выпуск 4, с. 221) была опубликована

Задача 2.1. Дана возрастающая функция $f(x)$ такая, что $f(0) > 0$, $f(1) < 1$. Докажите, что существует такое x , что $f(x) = x$ и, кроме того, x — точка непрерывности функции f . (Фольклор)

Естественно возникает

Задача 2.1'. Дана убывающая функция $f(x): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такая, что $f(0) > 0$, $f(1) < 1$. Верно ли, что существует такое x , что $f(x) = x$ и, кроме того, x — точка непрерывности функции f ? (Фольклор)

В выпуске 4 (с. 217, см. решение: выпуск 8, с. 249–252; для многомерного обобщения см. выпуск 15, 212–218) опубликована

Задача 4.11. На некоторых клетках бесконечной доски стоят фишки (не более одной на каждой клетке), некоторые клетки пустые. Назовём расстановку *почти полной*, если найдётся такое число C , что можно сдвинуть каждую фишку на расстояние, не превышающее C (иногда нулевое) так, чтобы пустых клеток не осталось. Назовём расстановку *не слишком пустой*, если найдётся такое число D , что количество пустых клеток в любом квадрате не превосходит DP , где P — периметр квадрата. Докажите, что почти полные расстановки — это в точности не слишком пустые. (А. Я. Белов)

Естественно возникает

Задача 4.11'. Оцените константу C в зависимости от D , рассмотрите также многомерные обобщения. (Для многомерья вместо периметра надо рассматривать площадь поверхности, см. : Матдинов М. Л. Задача о фишках и потоки на кубической решётке // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 15, М.: МЦНМО, 2011. С. 212–218.)

(А. Я. Белов)

В выпуске 11 (с. 162–163, см. решение: выпуск 23, с. 221–223, см. также задачу 11.4', выпуск 23, с. 218, решение: выпуск 24, с. 188–189;

задачу 11.4'', выпуск 24, с. 178; задачу 11.4''', выпуск 24, с. 178, решение: выпуск 25, с. 177–178) опубликована

Задача 11.4. d -мерная ладья бьёт по прямым вдоль осей координат.

(а) Какое максимальное число ладей можно расставить в d -мерном кубе $n \times \dots \times n$ так, чтобы они не били друг друга?

Назовём расстановку ладей *полной*, если в ней максимально возможное число ладей.

(б) Слоем трёхмерного куба $n \times n \times n$ назовём квадрат $n \times n$, состоящий из клеток с одинаковой третьей координатой. Пусть первые k слоёв заполнены полно (т. е. в них стоят nk ладей). Докажите, что эту расстановку можно продолжить до полной. Верно ли аналогичное утверждение для четырёхмерного куба?

(в) В трёхмерном кубе $n \times n \times n$ расставили ладьи и зафиксировали угловую клетку. Каково максимальное число полных подкубов с той же угловой клеткой? Аналогичный вопрос для d -мерного куба. [Вопрос об общем числе полных подкубов открыт.] (А. Я. Канель)

В этой связи естественно возникает

Задача 11.4⁽⁴⁾. *Какое минимальное число ладей можно расставить в n -мерном кубе так, чтобы они били все клетки? Подумайте над многомерным обобщением.* (Фольклор)

В выпуске 19 (с. 258) опубликована

Задача 19.11. Плоскость раскрашена в несколько цветов. Докажите, что существует треугольник единичной площади с вершинами одного цвета. (А. Я. Канель-Белов)

В продолжение темы:

Задача 19.11'. (а) *Плоскость раскрашена в несколько цветов. Докажите, что существует прямоугольный треугольник единичной площади с одноцветными вершинами.* (А. Я. Канель-Белов)

(б) *Каждую точку в пространстве закрасили в один из трёх цветов. Докажите, что найдётся треугольник с углами 30, 60 и 90 градусов, у которого все вершины одного цвета.* (М. Бона, Венгрия)

(в) *А что если число цветов произвольное и мы дополнительно требуем единичность площади?* (Фольклор)

(г) (Открытый вопрос.) *Плоскость раскрашена в несколько цветов. Докажите, что существует прямоугольник единичной площади с одноцветными вершинами. Подумайте над пространственным обобщением.* (Фольклор)

В выпуске 26 (с. 266, см. решение: выпуск 27, с. 189–190) опубликована

Задача 26.6. (г) Можно ли круг перекроить в выпуклую фигуру, отличную от круга? Можно ли две выпуклые фигуры, чьи границы состоят из участков окружностей, перекроить в одну?

(И. А. Иванов-Погодаев)

Перекроить означает, что фигуру можно разрезать на конечное число частей, из которых можно сложить вторую фигуру (части можно параллельно переносить и поворачивать, но не переворачивать на другую сторону).

Родственные задачи рассматривались на 36-й Летней конференции Турнира городов (А. Канель-Белов, М. Голафшан, И. Иванов-Погодаев, Ф. Нилов, А. Оноприенко, А. Садовничий, проект «Квадратура круга»). В развитие темы:

Задача 26.6'. Докажите, что существует k такое, что квадрат можно разбить на k подмножеств, из которых можно сложить круг.

(Фольклор)

В выпуске 28 (с. 233) опубликована

Задача 28.1. Пусть число p простое. Есть неограниченный запас бусинок n цветов. Сколько можно составить различных ожерелий, содержащих ровно p бусинок? Два ожерелья, переводящиеся друг в друга поворотом, считаются одинаковыми. Выведите из результата задачи **малую теорему Ферма**: если p простое, n натуральное, то n^p сравнимо с n по модулю p .

(Фольклор)

В продолжение темы:

Задача 28.1'. (а) Пусть p — простое число. Найдите количество p -элементных подмножеств множества $\{1, 2, 3, \dots, 2p\}$, для которых сумма элементов делится на p .

(б) Дана таблица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Разрешено переставлять строки и столбцы. Сколько различных таблиц можно получить таким образом? (Л. Радзивилловский)

(в) Сколькими способами можно раскрасить куб в 6 цветов так, чтобы любые две различные грани были раскрашены разными красками? (Различными считаются раскраски, которые не совмещаются при повороте куба.) (А. Н. Колмогоров)