

Решения задач из прошлых выпусков

20.12. Условие. (а) Дан n -мерный шар единичного объёма. Пусть M_1 и M_2 — два его подмножества объёма ε . Докажите, что расстояние между ними ограничено функцией, зависящей от ε , но не от размерности.

(б) Аналогичный вопрос для n -мерного куба единичного объёма.
(Н. А. Бобылёв, А. Я. Канель-Белов)

Отметим, что диаметр множества единичного объёма в n -мерном пространстве не меньше, чем у шара такого объёма и имеет асимптотику типа $E\sqrt{n}$. Такую же асимптотику имеет расстояние от точки до множества половинного объёма. Тем не менее расстояние между двумя подмножествами объёма ε ограничено!

Этой задаче — *проблеме Бобылёва* — посвящён проект 34-й Летней конференции Турнира городов (И. Иванов-Погодаев, Ф. Ивлев, А. Исмаилов, А. Канель-Белов, М. Голафшан «Дискретная задача Дидоны и проблема Бобылёва»), а также обзор:

Ismailov A., Kanel-Belov A., Ivlev F. Dimension-free estimates on distances between subsets of volume ε inside a unit-volume body // J. Math. Sci. 2023. Vol. 271, № 4. P. 497–545. arXiv:2301.13495.

Перечислим некоторые результаты. Для единичного куба произвольной размерности существует такая константа C , не зависящая от ε и размерности и такая, что расстояния между двумя множествами объёма ε внутри единичного куба не превосходят $C\sqrt{|\ln \varepsilon|}$. Аналогичный результат верен для шара. Для n -мерного симплекса (аналогично для кокуба — аналога правильного октаэдра) единичного объёма существует константа D , не зависящая от размерности и ε и такая, что расстояния между двумя внутренними множествами объёма ε не превосходят $D|\ln \varepsilon|$. Все эти асимптотики — точные, константа D неизвестна, константа C известна только для шара.

См. также:

Ивлев Ф. А., Канель А. Я. Оценка расстояния между двумя телами внутри n -мерного шара единичного объёма // Матем. заметки. 2020. Т. 107, вып. 6. С. 888–893.

Ивлев Ф. А. Оценка расстояния между двумя телами внутри n -мерного единичного куба и шара // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Матем., мех. 2015. № 6. С. 23–28.

Заславский А. А. О вычислении объёма n -мерного шара // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 14, М.: МЦНМО, 2010. С. 270–271.

Всё это связано с вопросами концентрации меры, за которые Мишель Талагран получил премию Абеля в 2024 г.

22.7(б). Условие. Дан квадрат с вершинами в точках $(\pm 1, \pm 1)$. Существует ли на оси OX точка, расстояния от которой до всех его вершин рациональны? (Н. С. Келлин)

Ответ: нет.

Решение. Пусть это точка с координатами $(0, r)$, и пусть $q, p \in \mathbb{Q}$ — расстояния до вершин $(-1, 1)$ и $(1, 1)$ соответственно. Покажем, что они не могут быть оба рациональны.

Легко видеть, что p, q и r связаны уравнениями

$$\begin{cases} 1 + (1 + r)^2 = q^2, \\ 1 + (1 - r)^2 = p^2, \end{cases}$$

что эквивалентно

$$\begin{cases} 2 + r^2 + 2r = q^2, \\ 2 + r^2 - 2r = p^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $4r = q^2 - p^2$, следовательно, $r \in \mathbb{Q}$. Обозначим $r_1 = 1 + r$, $r_2 = 1 - r$, $q_1 = q + r_1$, $p_1 = p + r_2$. Тогда

$$\begin{aligned} 1 &= q^2 - (1 + r)^2 = q^2 - (r_1)^2 = (q - r_1)(q + r_1), \\ 2r_1 &= (q + r_1) - (q - r_1) = (q + r_1) - \frac{1}{q + r_1} = q_1 - \frac{1}{q_1}. \end{aligned}$$

Аналогично $2r_2 = p_1 - 1/p_1$. Из $r_1 + r_2 = 2$ получаем, что

$$q_1 - \frac{1}{q_1} + p_1 - \frac{1}{p_1} = 4.$$

Пусть $p_1 = k/l$, $q_1 = m/n$, где $(k, l) = 1$ и $(m, n) = 1$. Тогда уравнение преобразуется к виду

$$\frac{l^2 - k^2}{lk} + \frac{m^2 - n^2}{mn} = 4.$$

Легко видеть, что $(kl, l^2 - k^2) = 1$ и $(mn, m^2 - n^2) = 1$. Поэтому $kl = mn$. Получаем систему

$$\begin{cases} kl = mn, \\ l^2 - k^2 + m^2 - n^2 = 4kl. \end{cases}$$

Так как $(k, l) = 1$, $(m, n) = 1$ и $kl = mn$, для некоторых взаимно простых чисел x, y, z, v выполняются равенства

$$k = yv, \quad l = zx, \quad m = yx, \quad n = vz.$$

Подставляя эти равенства в систему, получим:

$$\begin{aligned} z^2x^2 - y^2v^2 + y^2x^2 - v^2z^2 &= 4xyzv, \\ x^2(z^2 + y^2) - v^2(z^2 + y^2) &= 4xyzv, \\ (x^2 - v^2)(z^2 + y^2) &= 4xyzv. \end{aligned}$$

Теперь можно считать, что $x, y, z, v > 0$. Заметим, что $(z^2 + y^2, zu) = 1$. Отсюда следует, что $x^2 - v^2$ делится на yz . Аналогично $y^2 + z^2$ делится на xv . Получаем три системы:

$$\begin{cases} x^2 - v^2 = yz, & \begin{cases} x^2 - v^2 = 2yz, \\ y^2 + z^2 = 4xv, \end{cases} & \begin{cases} x^2 - v^2 = 4yz, \\ y^2 + z^2 = 2xv, \end{cases} & \begin{cases} x^2 - v^2 = 4yz, \\ y^2 + z^2 = xv. \end{cases} \end{cases}$$

Первый случай невозможен, так как из того, что $y^2 + z^2$ делится на 4, следует, что y и z делятся на 2. Во втором случае y и z нечётны, но из того, что $x^2 - v^2$ делится на 2, следует, что $x^2 - v^2$ делится на 4, то есть yz делится на 2.

Рассмотрим третий случай: из того, что $x^2 - v^2$ делится на 2, получаем, что x и v нечётны. Положим $x_1 = (x + v)/2$, $v_1 = (x - v)/2$. Легко видеть, что $(x_1, v_1) = 1$, $x_1v_1 = yz$, $y^2 + z^2 = x_1^2 - v_1^2$. Тогда для некоторых взаимно простых a, b, c, d верны равенства $x_1 = ab$, $v_1 = cd$, $y = ac$, $z = bd$. Используя их, получим уравнение $a^2c^2 + b^2d^2 = a^2b^2 - c^2d^2$, откуда

$$c^2(a^2 + d^2) = b^2(a^2 - d^2), (a^2 + d^2, a^2 - d^2) \leq (2a^2, 2d^2) \leq 2.$$

Если $(a^2 + d^2, a^2 - d^2) = 1$, то

$$\begin{cases} a^2 + d^2 = e^2, \\ a^2 - d^2 = f^2 \end{cases}$$

для некоторых натуральных e, f .

Известно, что эта система не имеет решений. Если

$$(a^2 + d^2, a^2 - d^2) = 2,$$

то для некоторых натуральных e, f

$$\begin{cases} a^2 + d^2 = 2e^2, \\ a^2 - d^2 = 2f^2. \end{cases}$$

Из $(a - d)(a + d) = 2f^2$ следует, что

$$\text{либо } \begin{cases} a - d = 4g^2, \\ a + d = 2h^2, \end{cases} \quad \text{либо } \begin{cases} a + d = 4g^2, \\ a - d = 2h^2. \end{cases}$$

Так как знак d не имеет значения, будем считать, что

$$\begin{cases} a = 2g^2 + h^2, \\ d = h^2 - 2g^2. \end{cases}$$

Возведём в квадрат оба равенства:

$$\begin{cases} a^2 = h^4 + 4g^2h^2 + 4g^4, \\ d^2 = h^4 - 4g^2h^2 + 4g^4. \end{cases}$$

Тогда из полученного выше равенства $a^2 + d^2 = 2e^2$ получаем

$$h^4 + 4g^4 = e^2.$$

Так как $(h, g) = 1$, это означает

$$\begin{cases} h^2 = (i - j)(i + j), \\ g^2 = ij. \end{cases}$$

Действительно, в этом случае

$$e^2 = h^4 + 4g^4 = i^4 - 2i^2j^2 + j^4 + 4i^2j^2 = (i^2 + j^2)^2 \quad \text{и} \quad e = i^2 + j^2.$$

Так как $(i, j) = 1$, из уравнения $g^2 = ij$ получаем $i = s^2, j = t^2$. Из уравнения

$$h^2 = (i - j)(i + j) = (s^2 - t^2)(s^2 + t^2)$$

имеем либо

$$\begin{cases} s^2 - t^2 = w^2, \\ s^2 + t^2 = u^2, \end{cases}$$

что не имеет решений (так как s^2 и t^2 не могут быть одновременно чётными), либо

$$\begin{cases} s^2 - t^2 = 2w^2, \\ s^2 + t^2 = 2u^2. \end{cases}$$

Но

$$e = i^2 + j^2 = s^4 + t^4 \geq s^2 + t^2 = 2u^2 > 0,$$

откуда следует, что процесс можно продолжать бесконечно, получая всё меньшие натуральные числа, что невозможно. Получаем, что у этой системы нет решений, а значит, нет и точки на оси OX с нужными свойствами. (А. Аллеманд, А. Халявин)

31.9. Условие. Робот Чертёжник является *конечным автоматом*, т. е. имеет только конечное число внутренних состояний. Он может передвигаться по клетчатому листу бумаги, закрашивая клетки. Для Чертёжника допустимы всего три действия:

- 1) *закрасить* — закрасить клетку,
- 2) *налево* — повернуться на 90 градусов налево вокруг начала стрелки,
- 3) *прыгнуть* — перепрыгнуть в центр соседней клетки по направлению стрелки.

Кроме того, Чертёжник умеет проверять условие *впереди край*.

а) Напишите программу для Чертёжника, по которой он на любом листе бумаги (в том числе и тогда, когда размер листа не помещается в его памяти) закрасит все клетки квадрата, кроме клеток, содержащих его центр (в зависимости от чётности длины стороны листа это одна клетка или четыре клетки).

б) Можно ли написать программу, чтобы Чертёжник закрасил только центр листа? (А. Я. Канель-Белов, М. В. Сапир)

РЕШЕНИЕ см.: Белов А. Я., Сапир М. В. На круги свои (окончание) // Квант. 2024. № 3. С. 36–43.