По мотивам задачника

Движение ортоцентра треугольника, вписанного в гиперболу

К. А. Бельский

Данная заметка посвящена решению задачи 26.5 («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 26, 2021, с. 266).

Задача 26.5. Даны коника Γ и её хорда AB. Найдите геометрическое место ортоцентров вписанных в Γ треугольников ABC.

(*А. А. Заславский, А. И. Сгибнев*)

Решение этой задачи можно найти в заметке [1]. Мы решим её для гиперболы другим способом. Для остальных видов коник Γ рассуждение остаётся таким же, но некоторые из точек в решении могут быть комплексными.

Формулировка для гиперболы. Даны гипербола Γ и её хорда AB. Точка C двигается по гиперболе Γ. Тогда ортоцентр H треугольника ABC двигается по гиперболе, асимптоты которой перпендикулярны асимптотам Γ.

Лемма 1. *Даны две параллельные хорды AB, CD коники Γ. Точки X, Y выбраны на конике Γ так, что точки A, B, X, Y лежат на одной окружности* (рис. 1). *Тогда точки C, D, X, Y также лежат на одной окружности.* □

Доказательство этой леммы можно найти в статьях [2] и [3]. В последнем случае для доказательства используется сложение точек на вырожденной кубике. Этот метод мы также будем использовать.

Лемма 2. *Дана гипербола Γ и её хорда AB. Пусть ℓ — асимптота гиперболы Γ, а точка C двигается по гиперболе Γ. Точка D выбирается*

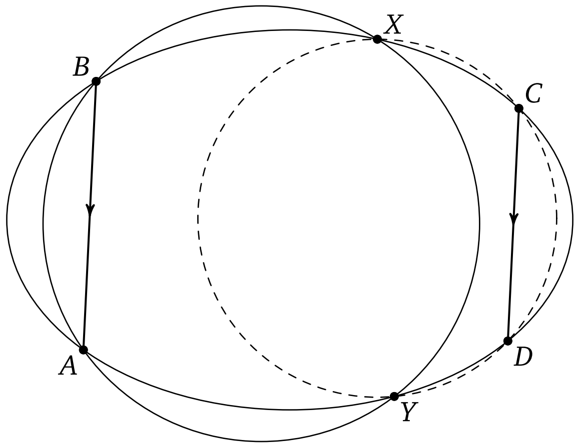

Рис. 1

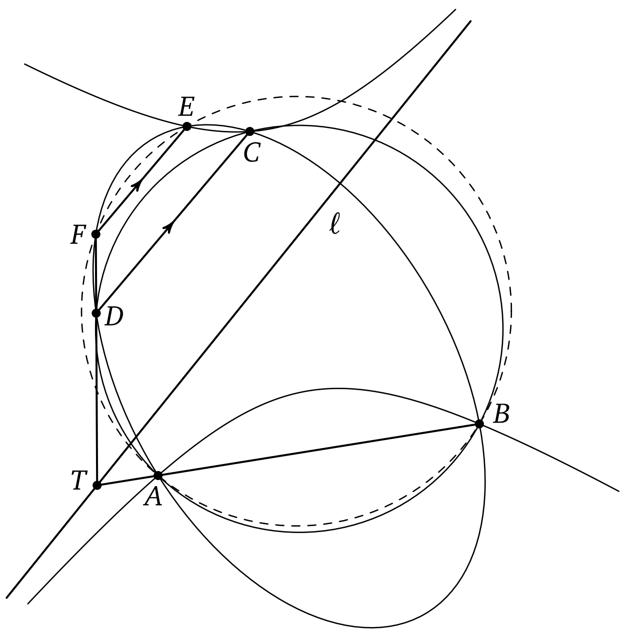

Рис. 2

так, что $CD \parallel \ell$ и точки A, B, C, D лежат на одной окружности (рис. 2). *Тогда точка D лежит на прямой, не зависящей от выбора точки C.*

Доказательство. Пусть T — точка пересечения прямой AB и прямой ℓ. Покажем, что прямая DT не зависит от выбора точки C. Выберем точку E на гиперболе Γ и точку F на прямой DT так, что $EF \parallel \ell$. Достаточно доказать, что точки A, B, E, F лежат на одной окружности.

В силу леммы 1 (заменив A, B, C, D, X, Y на C, D, E, F, A, B соответственно) достаточно показать, что точки A, B, C, D, E, F лежат на одной конике.

Рассмотрим сложение точек на вырожденной кубике, которая является объединением гиперболы Γ и прямой DT. Нам нужно доказать, что $A+B+C+D+E+F=\mathscr{O}$, где $\mathscr{O}$ — нулевая точка нашего сложения. Но это вытекает из следующих равенств:

$$A+B+T=\mathscr{O},\quad E+F+\infty_\ell=\mathscr{O},\quad C+D+\infty_\ell=\mathscr{O},\quad \infty_\ell+\infty_\ell+T=\mathscr{O},$$

где ∞_ℓ — бесконечно удалённая точка прямой ℓ. □

Теперь мы готовы решить задачу. Пусть ℓ — одна из асимптот гиперболы Γ. Прямая AB и прямая ℓ пересекаются в точке T (рис. 3). Рассмотрим треугольник с вершинами A, B и в бесконечно удалённой точке прямой, перпендикулярной к ℓ (обозначим эту точку через $\ell^\perp$). Достаточно доказать, что при изогональном сопряжении относительно этого треугольника образ точки H (обозначим его через X) движется по фиксированной прямой. Это следует из того, что при изогональном сопряжении прямая, не проходящая через вершины треугольника,

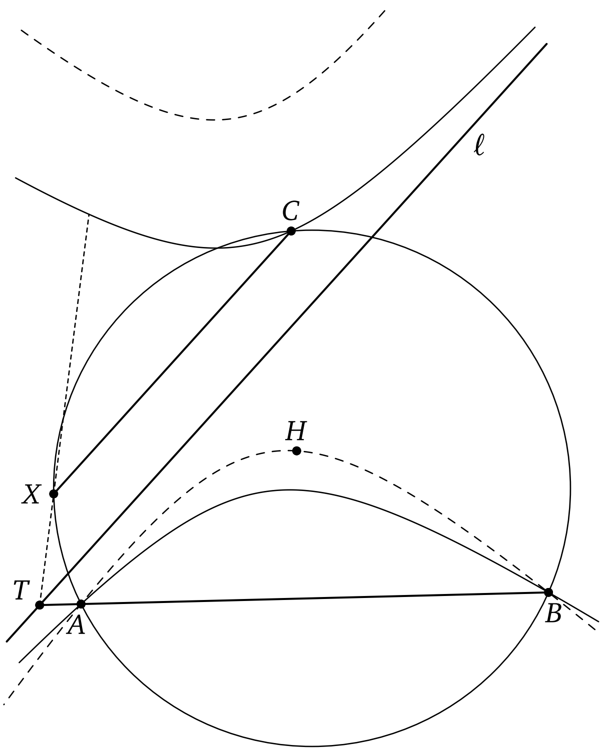

Рис. 3

переходит в конику, которая проходит через вершины треугольника. В данном случае одна из вершин треугольника — бесконечно удалённая, поэтому коника будет гиперболой.

Положим $\alpha = \angle HAB$ и $\beta = \angle HBA$. Тогда

$$\angle AXB = \angle XA\ell^{\perp} + \angle XB\ell^{\perp} = \alpha + \beta.$$

Заметим, что точка X лежит на описанной окружности треугольника ABC, поскольку

$$\angle ACB = 180^\circ - \angle AHB = \alpha + \beta.$$

Следовательно,

$$\angle CXB = \angle CAB = 90^\circ - \beta,$$

т. е. $CX \perp B\ell^{\perp}$, а значит, $CX \parallel \ell$. Таким образом, по лемме 2 прямая TX не зависит от выбора точки C. Все точки гиперболы принадлежат нашему ГМТ, так как у любой точки гиперболы есть изогональный образ на прямой TX.

Список литературы

[1] *Заславский А. А.*, *Сгибнев А. И.* Одна задача о треугольниках, вписанных в конику // Математическое просвещение. Сер. 3. М.: МЦНМО, 2021. Вып. 27. С. 182–185.

[2] *Кожевников П.* Антипараллели и коники // Квант. 2017. № 8. С. 35–38.

[3] *Бельский К. А.* Вырожденные кубические кривые и элементарная геометрия // Наст. сб. С. 114–142.

Кирилл Аркадьевич Бельский, студент 1 курса МКН СПБГУ

dfsbfs5@yandex.ru