

## Две культуры в математике

У. Т. Гауэрс

В 1959 году, в своей знаменитой Ридовской лекции «Две культуры», Ч. П. Сноу доказывал, что очень вредно отсутствие коммуникации между гуманитарными и естественными науками. В частности, он критиковал гуманитариев за непонимание естествознания. Один из самых запоминающихся пассажей посвящён несимметричности, которая продолжает существовать — хотя и в смягчённой форме — спустя сорок лет:

Очень много раз я был на встречах, где собирались люди высокообразованные, по меркам традиционной культуры, и с заметным удовольствием выражали скептическое отношение к малообразованным учёным-естественникам. Один-два раза это спровоцировало меня спросить, сколь многие из присутствующих готовы сформулировать второй закон термодинамики. Реакция была холодной и отрицательной. Но ведь я задавал естественнонаучный эквивалент примерно такого вопроса: «Читали ли Вы Шекспира?».

Я хочу показать, что похожий социологический феномен наблюдается и внутри фундаментальной математики и что это не вполне здоровое положение дел.

«Две культуры», которые я намерен обсуждать, знакомы всем профессиональным математикам. Грубо говоря, речь идёт о различии между математиками, которые видят свою главную цель в решении отдельных задач, и теми, кто больше занят построением и осмыслением теорий.

Это различие в подходах было замечено многими, я не претендую на приоритет. Как большинство обобщений, это деление упрощает ситуацию, но не настолько, чтобы стать бесполезным. Если вы не зна-

---

Перевод Н. С. Калинина под редакцией Б. Р. Френкина. Оригинал статьи доступен на <http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf>.

ете, к какому классу принадлежите, посмотрите на следующие два высказывания.

- (i) Решение конкретных задач помогает лучше понимать математику в целом.
- (ii) Понимание математики в целом помогает решать конкретные задачи.

Большинство математиков скажут, что правильно и то, и другое. Не все задачи одинаково интересны, и один из способов выделить наиболее интересные — это показать, что они развивают наше понимание математики в целом. Точно так же, если кто-то тратит годы, пытаясь освоить трудную область математики, но это понимание не приводит ни к каким новым результатам, то почему это должно заинтересовать других? Однако многие математики — возможно, большинство — не согласятся в равной мере с обоими утверждениями. Несомненно не согласился бы сэр Майкл Атья, как видно из его интервью 1984 г. [A1].

Минио: Как Вы выбираете задачу, которой будете заниматься?

Атья: Думаю, что вопрос предполагает ответ. Я вообще не считаю, что работаю таким способом. Некоторые люди усядутся и говорят: «Я хочу решить эту задачу», берутся за неё и говорят: «Как мне решить эту задачу?». У меня не так. Я просто плаваю в водах математики, думаю о вещах, которые удивляют, интересуют, разговариваю с людьми, загораюсь идеями; возникает что-то, чему я следую. Или я замечаю связь с чем-то знакомым, я пробую это соединить, идёт развитие. Я практически никогда не начинал с определившимися намерениями, что я хочу сделать или куда это пойдёт. Я интересуюсь математикой; рассказываю, изучаю, обсуждаю, и тогда интересные вопросы просто сами возникают. Я никогда не начинал с конкретной цели, кроме цели понять математику.

Это интервью вначале появилось в журнале *Mathematical Intelligencer*, а потом было переиздано в общем разделе собрания трудов Атьи. Всем, кто хочет упорядочить свои представления о значении математики, я настоятельно советую прочитать эссе и лекции Атьи на эту тему. Я буду к ним обращаться в этой статье ещё не раз.

Другой человек, который бы не оценивал эти два тезиса одинаково, был Поль Эрдёш, который оставил миру огромное количество восхитительных задач, а также решений многих других задач, но не связан

настолько же с развитием теорий. Нет сомнения, что Эрдёш стремился понять математику: многие люди, решившие какую-либо задачу Эрдёша (увы, я не из их числа), подтвердят, что в процессе всё более напряжённого размышления над задачей им открывались неожиданно плодотворные направления и задача виделась уже не просто забавной, как могло казаться поначалу.

Таким образом, когда я говорю, что математиков можно разделить на создателей теорий и решателей задач, я имею в виду их *приоритеты*; смешно утверждать, что они полностью посвятили себя лишь одному виду математической деятельности.

Очевидно, математика нуждается и в тех, и в других (как Атья сам пишет в конце статьи [A2]). Столь же очевидно, что различные ветви математики требуют различных умений. В некоторых областях, например в алгебраической теории чисел или во всём том, что сейчас называют просто Геометрией, представляется (по крайней мере неспециалисту — тут я не авторитет), что по многим причинам важно обладать достаточными знаниями и квалификацией в том, что делают другие математики, так как прогресс в науке часто бывает следствием хитроумного комбинирования многих более ранних результатов. И если выбрать задачу, замкнуться на ней на ряд лет и наконец её решить, то существует опасность (если только задача не очень знаменита), что это уже не будет считаться сколько-нибудь важным.

На другом конце спектра лежит, например, теория графов, где базовый объект — граф — может быть понят мгновенно. Нельзя ничего добиться в теории графов, сидя в кресле и пытаясь *понять графы* лучше. И не очень нужно читать много литературы, берясь за какую-либо задачу: разумеется, полезно иметь представление о важнейших методах, но интересные задачи часто остаются нерешёнными как раз потому, что известные методы к ним применить не удаётся.

Теперь позвольте упомянуть об асимметрии вроде той, которую так убедительно показал Сноу. Дело обстоит так, что сейчас области, требующие построения теорий, более популярны, чем требующие решения задач. Более того, математики, работающие над построением теорий, часто рассматривают свою работу как центральное ядро математики (именно так говорит Атья), а области вроде комбинаторики считаются периферией, не особенно связанной с главными целями математики. Можно, пожалуй, вообразить собрание высокообразованных математиков, которые скептически взирают на неосведомлённость комбинаторщиков, в большинстве своём неспособных сказать что-нибудь грамотное про квантовые группы, зеркальную симмет-

рию, многообразия Калаби — Яу, уравнение Янга — Милса, солитоны и даже когомологии. Если комбинаторщик захочет прервать такое собрание и попросту спросит, сколько подмножеств можно выбрать в множестве  $\{1, \dots, n\}$  так, чтобы мощность симметрической разности любых двух подмножеств была не меньше  $n/3$ , реакция скорее всего окажется прохладной. (Задача эта очень проста в том и только том случае, когда известен соответствующий метод: надо выбрать множества случайно и показать, что вероятность для какой-то пары иметь симметрическую разность размера меньше, чем  $n/3$ , экспоненциально мала. Поэтому ответом является  $e^{cn}$  с некоторой константой  $c > 0$ ).

Главная цель этой статьи — защитить некоторые не очень модные ныне области от обычных нападков. Прежде всего я уделю внимание комбинаторике, так как эту область я знаю лучше всего. Однако сказанное мной будет относиться к другим областям не в меньшей мере. Я часто использую слово «комбинаторика» в не совсем общепринятом смысле: я обозначаю им все те задачи, которые следует решать более-менее на основе исходных принципов. (На самом деле это не абсолютное различие, а вопрос степени.) Такие задачи не обязательно носят дискретный характер или требуют больших вычислений. Тем не менее есть большое пересечение между этим видом задач и комбинаторикой в её обычном понимании.

Почему решение задач нужно оценивать ниже, чем создание теорий? Чтобы ответить на этот вопрос, придётся рассмотреть более глубокий: что делает одну область математики более интересной, чем другую? Атья и на эту тему пишет очень ясно и обоснованно (с должным уважением к великим математикам прошлого — Пуанкаре, Вейлю). Он отмечает (см., например, [A2]), что в математике создаётся больше, чем можно запомнить. Поэтому процессы абстрагирования и обобщения очень важны для осмысления огромной массы сырого материала (т. е. доказательств отдельных теорем) и его дальнейшей передачи, хотя бы частичной. Сохранится то, что будет согласованно и экономично изложено для будущих поколений математиков. Конечно, сохранятся результаты решения самых известных задач, но даже они, если не будут включены в некоторую разумную схему, вряд ли будут подробно изучаться более чем горсткой специалистов.

Так что полезно думать не столько о содержательности математического результата самого по себе, сколько о том, как его эффективно передать другим математикам — нынешним и будущим. Комбинаторика, в представлении многих, состоит из множества разрозненных задач и результатов и в этом смысле находится в невыгодном положе-

нии. Каждый отдельный результат может потребовать огромной изобретательности, но изобретательные люди есть, особенно в Венгрии, и будущим поколениям математиков не хватит времени и желания прочесть и оценить больше чем крохотную долю их достижений.

Попытаюсь возразить этой критике. Конечно, в комбинаторике редко можно найти очень общее утверждение, которое неожиданно помещает множество результатов в подходящий контекст. И многие её результаты изолированы друг от друга и будут полностью забыты (но это не отличает комбинаторику от любой другой области математики). Однако неверно, что в комбинаторике нет никакой структуры. Причина того, что комбинаторика видится многим математикам как собрание разрозненных задач и результатов, состоит в менее явных организующих принципах.

Но если абстрагирование и обобщение, которые так важны в математике, лишь ограниченно применимы в комбинаторике, то как её передавать следующим поколениям? Один из подходов к этому вопросу — подумать, каковы могут быть запросы завтрашней комбинаторики. Как я уже сказал, её приоритет, наверно, будет состоять в решении задач. Поэтому интерес к уже решённым задачам будет определяться тем, насколько их понимание поможет лучше решать другие задачи. И это направляет нас прямо к сути дела. Важные идеи в комбинаторике обычно появляются не в форме точно сформулированных теорем, а, чаще, в виде общих принципов широкой применимости.

Можно пояснить это на примере. Одна из формулировок теоремы Рамсея такова.

*ТЕОРЕМА. Для любого натурального  $k$  найдётся такое натуральное  $N$ , что в полном графе на  $N$  вершинах, рёбра которого покрашены в два цвета, найдутся  $k$  вершин, все рёбра между которыми — одного цвета.*

Наименьшее такое  $N$  обозначается  $R(k)$ . Покажем, что

$$2^{k/2} \leq R(k) \leq 2^{2k}.$$

Пусть  $G$  — граф с  $2^{2k}$  вершинами. Упорядочим их для удобства. Пусть  $x_1$  — первая вершина. Тогда по принципу Дирихле она соединена рёбрами одного цвета хотя бы с  $2^{2k-1}$  вершинами, обозначим их множество  $A_1$ . Пусть  $x_2$  — вершина с наименьшим номером из  $A_1$ . Снова по принципу Дирихле она соединена рёбрами одного цвета хотя бы с  $2^{2k-2}$  вершинами из  $A_1$ , обозначим их множество  $A_2$ . Продолжая процесс, получим такие последовательности вершин  $x_1, x_2, \dots, x_{2k}$

и множеств  $A_{2k} \subset \dots \subset A_2 \subset A_1$ ,  $x_i \in A_{i-1}$ , что все рёбра из  $x_i$  в  $A_i$  имеют одинаковый цвет. Значит, цвет ребра между  $x_i$  и  $x_j$  зависит только от  $\min(i, j)$ . Снова по принципу Дирихле найдётся подмножество  $H \subset x_1, \dots, x_{2k}$  размера не менее  $k$  такое, что этот цвет в нём всюду одинаков, т. е. все рёбра в множестве  $H$  — одного цвета.

Слегка видоизменив предыдущее рассуждение, можно улучшить оценку до  $\binom{2k}{k}$ . Однако мне сейчас интереснее *нижние* границы для  $R(k)$ . Один из самых знаменитых результатов Эрдёша состоит в том, что  $R(k) \geq 2^{k/2}$ . Доказательство следующее. Вместо того чтобы строить какую-то продуманную раскраску явно, будем красить рёбра случайным и самым очевидным образом. Пусть каждое ребро — красное с вероятностью  $1/2$  или синее с той же вероятностью, причём все эти события независимы. Пусть количество вершин  $N$ , а  $x_1, \dots, x_k$  — какие-то  $k$  из них. Вероятность того, что каждое  $x_i$  соединено с каждым  $x_j$  ребром красного цвета, равна  $2^{-\binom{k}{2}}$ , и то же для синего цвета. Значит, матожидание количества  $k$ -элементных множеств, все рёбра которых одноцветны, равно  $2^{1-\binom{k}{2}} \binom{N}{k}$ . Если оно меньше единицы, то такие  $k$ -элементные множества появляются заведомо не всегда. Нетрудно вычислить, что так будет при  $N = 2^{k/2}$ .

Этот результат Эрдёша [E] известен не потому, что у него много приложений, не потому, что он труден, не потому, что он решил долго стоявшую проблему. Его известность вызвана тем, что этот факт открыл плотину, через которую хлынули в комбинаторику вероятностные рассуждения. Если вы понимаете простое рассуждение Эрдёша (или любое из многих подобных рассуждений), то вы загрузили в своё сознание следующий общий принцип:

Если надо максимизировать размер некоторой структуры при определённых ограничениях, которые предположительно приводят к однородному, в некотором смысле, распределению примеров максимума, то можно ожидать хороших результатов, выбирая примеры случайным образом.

Как только вы усвоили этот принцип, ваша математическая сила немедленно возрастает. Вопросы вроде приведённого в начале — о нахождении большого количества множеств с большой симметрической разностью между любыми двумя — внезапно из кажущихся неразрешимыми превращаются в почти тривиальные.

Конечно, очень многое в вероятностной комбинаторике не сводится к простому применению этого принципа. Например, решив использовать вероятностные методы, вы часто обнаруживаете, что

нелегко оценить соответствующие вероятности. Тем не менее, ныне в этой области много сделано и много сложных методов разработано. Некоторые из них также могут быть изложены в виде полезных принципов. Вот один из них, известный его приверженцам как *концентрация меры*:

*Если функция  $f$  зависит, в разумном смысле непрерывно, от большого числа малых переменных, то  $f(x)$  почти всегда близко к его математическому ожиданию.*

Вся важность концентрации меры была впервые выявлена Виталием Мильманом в его революционном доказательстве [М] следующей теоремы Дворецкого [D].

**ТЕОРЕМА.** *Для любого натурального  $k$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $n$ , что каждое  $n$ -мерное нормированное пространство  $X$  имеет  $k$ -мерное подпространство с расстоянием Банаха — Мазура от  $\ell_2^k$  не более  $1 + \varepsilon$ .*

То есть, эквивалентно, мы можем найти такие векторы  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ , что

$$\left( \sum_{i=1}^k a_i^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{i=1}^k a_i x_i \right\| \leq (1 + \varepsilon) \left( \sum_{i=1}^k a_i^2 \right)^{1/2}$$

для любого набора скаляров  $a_1, \dots, a_k$ . Более геометрическая (и при этом более контринтуитивная) формулировка утверждает, что каждое  $n$ -мерное выпуклое центрально-симметричное тело имеет  $k$ -мерное центральное сечение, которое почти эллипсоидально, т. е. содержит  $k$ -мерный эллипсоид  $B$  и содержится в эллипсоиде  $(1 + \varepsilon)B$ .

Подход Мильмана состоял в том, чтобы выбирать  $k$ -мерное подпространство в  $X$  случайным образом. Перед этим нужно выбрать подходящую вероятностную меру. Это можно сделать с помощью теоремы Фрица Джона, утверждающей, что в  $X$  существует базис  $x_1, \dots, x_n$ , который не безнадежно далёк от ортонормированного в том смысле, что

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq \sqrt{n} \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}$$

для любого набора скаляров  $a_1, \dots, a_n$ . Затем следует взять естественную меру на грассманиане  $G(n, k)$  относительно этого базиса. (На самом деле это свехупрощение, но точные подробности нам здесь не требуются.)

В случае двух вышеупомянутых результатов легко видеть задним числом, что вероятностные методы должны были подойти. Напротив, трудно ожидать этого в последнем примере. В конце концов, естественно считать, что типичное сечение выпуклого нерегулярного тела нерегулярно. Однако любой, кто знаком с идеей концентрации меры, заметит, что норма вектора  $\sum_{i=1}^n a_i x_i$  зависит от нескольких  $a_i$ . А так как нас интересует лишь отношение этой нормы к  $l_2$ -норме  $(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2}$ , можно считать, что все  $a_i$  мало изменяются. Тогда в силу принципа концентрации меры можно ожидать, что отношение  $X$ -нормы к  $l_2$ -норме очень близко к матожиданию почти всегда. И теперь идея почти эллипсоидальных сечений перестаёт противоречить интуиции.

Главный результат, который придаёт строгость предыдущему рассуждению, — следующий вывод из изопериметрического неравенства Леви на сфере. Пусть  $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}$  — функция с медианой  $M$ . Пусть  $A \subset S^n$  — множество всех таких точек  $x$ , что  $f(x) \leq M$ . Тогда вероятность того, что случайная точка из  $S_n$  находится от  $A$  на расстоянии больше чем  $\varepsilon$ , не превосходит  $(\sqrt{\pi}/2)e^{-\varepsilon n^2/2}$ . Замена  $f$  на  $-f$  показывает, что почти любое  $y$  близко к такой точке  $x$ , что  $f(x) \geq M$ . Пусть теперь

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|.$$

Так как  $f$  в разумном смысле непрерывна, а большинство точек  $y$  близко к точкам  $x \in A$ , получаем, что  $f(y)$  ненамного больше, чем  $M$ . Аналогично  $f(y)$  ненамного меньше  $M$  для почти всех  $y$ .

Теорема Дворецкого, особенно с доказательством Мильмана, — важная веха в локальной (т. е. конечномерной) теории банаховых пространств. Хотя мне жаль тех математиков, которые не могут увидеть внутреннюю привлекательность этой теоремы, но эта привлекательность сама по себе не объясняет огромного влияния, оказанного этим доказательством — далеко за пределами теории банаховых пространств — путём внедрения идеи концентрации меры в умы многих математиков. Опубликовано огромное количество статей, использующих эту идею или предлагающих новые подходы к её доказательству.

Я могу привести много других общих принципов, подобных этим. Вот лишь немногие. Они неодинаковой важности и, как я сказал, не точны, но все они нашли широкое применение.

- 1) Очевидно, если события  $E_1, E_2, \dots, E_n$  независимы и имеют ненулевые вероятности, то с ненулевой вероятностью они случаются все вместе. На самом деле этот полезный факт обычно возможен и при достаточно малой зависимости [EL, J].

- 2) Все графы по существу сделаны из маленьких почти случайных кусочков, а мы знаем, как устроены эти кусочки [Sze].
- 3) Для подсчёта числа решений линейного уравнения на данном множестве бывает достаточно и обычно легче оценить коэффициенты Фурье характеристической функции этого множества.
- 4) Многие свойства случайных графов равносильны и поэтому могут быть взяты в качестве разумного определения псевдослучайных графов [CGW, T].
- 5) Иногда множество всех случайных последовательностей из нулей и единиц, сходящихся к нулю, является хорошей моделью для сепарабельных банаховых пространств или хотя бы позволяет формулировать интересные гипотезы.

Моё главное утверждение об этих принципах состоит не в том, что они полезны (что не очень удивительно), а в том, что они играют организующую роль в комбинаторике, какую играют глубокие теоремы широкой общности в более теоретических разделах. Пытаясь понять какой-либо результат, можно сэкономить много времени, сумев свести его к двум-трём главным идеям. После этого может оказаться ненужным вникать в подробности. Зная общие принципы и несколько примеров их применения, можно проработать подробности самостоятельно. Например, доказательство Эрдёша для нижней оценки  $R(k)$  я запомнил так: надо выбрать случайную раскраску и сделать очевидные вычисления. Другой пример — следующая замечательная теорема Кашина [K].

**ТЕОРЕМА.** Для каждого натурального  $n$  существует ортогональное разложение пространства  $\mathbb{R}^{2n}$  (относительно обычного скалярного произведения) на два таких  $n$ -мерных подпространства  $X, Y$ , что для любого  $x \in X \cup Y$  отношение его  $l_1$ -нормы к  $l_2$ -норме лежит между  $c\sqrt{2n}$  и  $\sqrt{2n}$  для некоторой абсолютной константы  $c > 0$ .

Доказательство Шарека [Sza] выглядит примерно так (если вы знаете соответствующие общие идеи): простой подсчёт объёмов показывает, что в углах (т. е. там, где отношение  $l_1$ -нормы к  $l_2$ -норме мало) почти нет единичных  $l_1^n$ -шаров, поэтому легко показать, что подходит случайное разложение.

Третий пример — следующая теорема Рота [R].

**ТЕОРЕМА.** Для каждого  $\delta > 0$  существует такое  $N$ , что каждое подмножество из  $\{1, 2, \dots, N\}$  размера не меньше  $\delta N$  (т. е. плотности не меньше  $\delta$ ) содержит арифметическую прогрессию длины 3.

В сжатой форме доказательство следующее. Рассмотрим подмножество  $A \subset \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  и исследуем коэффициенты Фурье характеристической функции множества  $A$ . Если они маленькие (вдали от  $\hat{A}(0)$ ), то  $A$  в сущности случайно, а тогда содержит много прогрессий длины 3. В противном случае найдётся большой коэффициент, позволяющий перейти к подпрогрессии из  $\{1, 2, \dots, N\}$ , в которой плотность множества  $A$  больше.

Подытожу, о чём я говорил до сих пор. Я попытался опровергнуть представление о том, что комбинаторика мало структурирована и состоит просто из большого количества задач. Её структура менее явна, чем во многих других областях, но может быть описана в форме не вполне чётких общих утверждений, позволяющих компоновать в уме доказательства, проще их запоминать и понятнее передавать другим.

Однако есть и много других критических замечаний по поводу комбинаторики. Например, я слышал, что в ней нет направления или общих целей. Или что она не особенно глубока. Третье возражение: нет интересных связей с другими областями математики (имеется в виду «центральное ядро» математики). Четвёртое: многие её результаты не имеют приложений.

На все эти нападки можно ответить одинаково. Сначала рассмотрим представление, что в комбинаторике нет общих целей. Снова процитирую интервью Атья [A1].

Я продолжал думать о современной тенденции: люди разрабатывают целые разделы математики сами по себе, часто весьма абстрактные. Они трудятся не покладая рук, где-то там над чем-то там. Но если их спросить, для чего всё это, в чём его значение, с чем оно связано, то вы обнаружите, что они не знают.

Атья имел в виду не только комбинаторику, но он отмечает принципиальный момент: как в комбинаторике, так и повсюду важно показать, что человек делает нечто большее, нежели просто трудится не покладая рук.

Некоторые области математики по сути определяются небольшим кругом проблем общепризнанного значения. Многие результаты мотивируются тем, что они хоть в малой мере проливают свет на гипотезу Римана, гипотезу Бёрча — Свиннертона — Дайера, гипотезу геометризации Тёрстона, гипотезу Новикова или что-либо подобное. Другие области математики привлекают обилием таинственных явлений, требующих объяснения: это какие-нибудь неожиданные численные совпадения, подразумевающие глубокую связь между областями, внешне не имеющими отношения друг к другу; рассуждения, которые приво-

дят к интересным результатам прямолинейными методами и потому не дают им удовлетворительного объяснения; доказательства, явно зависящие от ряда удачных случайностей или от эвристических соображений, эффективных, но трудно формализуемых.

Трудно было бы доказать, что в комбинаторике существует много глобальных целей такого рода (единственное очень чёткое исключение — проблема  $P=NP$ ). Однако важность результата в комбинаторике очень часто не в самом результате, а в том менее явном, чему учит нас его доказательство, поэтому главные цели комбинаторики не всегда явно формулируются. В подтверждение этого позвольте вернуться к теореме Рамсея и оценкам для функции  $R(k)$ . Несмотря на простоту подхода, описанного выше, он даёт почти наилучшие известные оценки. Чтобы быть точным:

**ОТКРЫТАЯ ПРОБЛЕМА.** (i) Существует ли такая константа  $a > \sqrt{2}$ , такая, что  $R(k) \geq a^k$  для достаточно больших  $k$ ?

(ii) Существует ли такая константа  $b < 4$ , что  $R(k) \leq b^k$  для всех достаточно больших  $k$ ?

Я считаю, что это одна из главных проблем комбинаторики, и я посвятил ей много месяцев жизни, безуспешно пытаясь её решить. И всё же я пишу это с некоторым смущением, сознавая, что многие математики сочли бы этот вопрос скорее *головоломкой*, а не серьёзной математической задачей.

Причина, по которой я так высоко оцениваю эту проблему, в следующем: мне стало ясно (как и многим, кто пытался её решить), что она, скорее всего, не решается изобретательными рассуждениями, рассчитанными только на неё. (В основном я имею в виду вопрос о верхней оценке для  $R(k)$ .) Выражаясь не совсем строго, доказательство неравенства  $R(k) \leq 4^k$  носит локальный характер: мы отбрасываем почти весь граф и интересуемся только малыми окрестностями нескольких вершин. Лучшая оценка, видимо, должна учитывать более глобальные параметры, в том числе и характеристики графа в целом, и сейчас в теории графов попросту нет адекватной модели для этого. Тем самым решение этой проблемы почти сводится к введению новых мощных методов.

Ещё одно досадная черта этой проблемы в том, что хотя случайные раскраски не дают нижнюю оценку существенно лучше, чем  $2^{k/2}$ , дело выглядит так, словно её нельзя улучшить уходом от случайности (например, разбив вершины на 5 классов и задав различные вероятности для красного цвета рёбер, соединяющих вершины одного или двух классов). Однако если продолжать двигаться в таком направлении, то

мы увязаем в анализе всевозможных видов графов по отдельности. В каждом из них нет ничего устрашающего, но их систематический разбор провести трудно. Это побудило меня вообразить, что возможна классификация красно-синих раскрасок (или, равносильно, графов), позволяющая решить проблему путём проверки для каждого класса, что граница меньше, чем например  $3,99^k$ .

Идея классификации графов выглядит поначалу странной, но вот факт, который применяется снова и снова. Во-первых, потребуются определить псевдослучайные графы. Пусть  $G$  — граф,  $A, B$  — непересекающиеся наборы его вершин. Пара  $(A, B)$  называется  $\varepsilon$ -однородной, если существует вещественное  $\alpha > 0$  такое, что для любых  $A' \subset A, B' \subset B$ , мощностей не меньше  $\varepsilon|A|$  и  $\varepsilon|B|$  соответственно, число рёбер между  $A'$  и  $B'$  отличается от  $\alpha|A'||B'|$  не более чем на  $\varepsilon|A'||B'|$ . Если  $\varepsilon$  мало, то получается, что двудольный граф, состоящий из рёбер графа  $G$  между  $A$  и  $B$ , похож на случайный граф, где каждое ребро появляется с вероятностью  $\alpha$ . Следующий результат принадлежит Семереди [Sze] и известен как *униформизационная лемма* (или *лемма о регулярности*).

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $G$  — граф,  $\varepsilon > 0$ , а  $k$  — натуральное число. Тогда существует такая константа  $K$ , зависящая только от  $k$  и  $\varepsilon$ , что вершины графа  $G$  можно разделить на множества  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , где  $k \leq m \leq K$ , таким образом, что не менее чем  $(1 - \varepsilon)C_m^2$  из пар  $(A_i, A_j)$ ,  $i < j$ , являются  $\varepsilon$ -однородными.

Это, как заметит внимательный читатель, в точности формулировка общего принципа (ii), упомянутого ранее (но подчеркну, что не все такие принципы можно выразить строго).

К сожалению, хотя униформизационная лемма Семереди — идеальный инструмент для многих задач, существует много других, например улучшение оценок в теореме Рамсея, для которых она ничего не даёт. Поэтому одна из основных задач в теории графов — найти более подробные и тонкие классификации. Другая задача, в чём-то противоположная, — найти способы обойтись без униформизационной леммы Семереди. Существенное продвижение в любом из этих направлений окажет соответствующее значительное влияние на теорию графов. (Это почти тавтология, так как удачная мера прогресса — возможность решать интересные задачи).

Обычно тот, кто имеет опыт решения задач в определённой области, например в комбинаторике, видит, что некоторые трудности повторяются. Не всегда можно выразить эти трудности в виде точно сформулированных утверждений, поэтому обычно занимаются конкретной

задач, в которой эти трудности возникают. И задача приобретает значение, выходящее за рамки простого отыскания ответа. Это объясняет, почему столь многие задачи Эрдёша имеют скрытые глубины.

Что же с обвинениями в том, что комбинаторика — наука неглубокая? Одно из величайших удовольствий для математиков в том, что, стоя на плечах гигантов, как гласит изречение, мы достигаем высот, которые и не снились предыдущим поколениям. Однако же, большинство работ по комбинаторике самодостаточно или требуют от читателя лишь малого количества предварительных знаний. В противоположность этому, для понимания какой-нибудь теоремы из алгебраической теории чисел могут потребоваться годы, если начать с уровня типичного старшекурсника.

Эти обвинения отражают разницу приоритетов между создателями теорий и решателями задач. Создатель теорий склонен сказать, что теорема А глубока, поскольку она опирается на теорему В, которая в свою очередь опирается на теорему С и т. д., причём каждый из этих результатов по отдельности значителен. У решателя задач не будет длинной цепочки подобных логических зависимостей. Однако если мы рассмотрим более подходящий вид зависимости — опять на основе общих идей, — то картина изменится. Часто бывает, что нет формальной связи между двумя результатами, но нет надежды доказать один из них, если не известны идеи доказательства другого. Цепочки подобных зависимостей могут быть очень длинными, так что и в комбинаторике можно получить удовлетворение от решения задач, совершенно недоступных прошлым поколениям. И это позволяет ощутить, что область в целом развивается.

До сих пор мои рассуждения относились только к комбинаторике. Я попробовал показать, что эта область обладает внутренней согласованностью и направленностью, что не видно извне, но тем не менее важно. Однако я ничего не сказал о том, какая польза может быть для математики в целом от прогресса в комбинаторике. Давайте снова посмотрим, что сказал по этому поводу Атья [АЗ, § 6].

...в конечном счёте, основания для занятий математикой тесно связаны с её единством. Если мы признаём, подходя чисто практически, что математика оправдывает себя посредством приложений, то и вся математика приобретает смысл постольку, поскольку остаётся связным целым. И если какая-то часть отходит от основного корпуса математики, то ей необходимо оправдать своё существование более непосредственно.

Как обеспечить существование комбинаторики, признавая необходимость подобного обоснования? Сразу понятно, что существование комбинаторики можно оправдать непосредственно, поскольку она глубоко связана с информатикой, польза которой очевидна. (Странно, но программный комитет Международного математического конгресса в 1998 году, перечисляя связи между его различными секциями, эту не отметил.) Что касается связей с другими областями, имеются приложения комбинаторики к теории вероятностей, теории множеств, криптографии, теории коммуникаций, геометрии банаховых пространств, гармоническому анализу, теории чисел... список можно продолжать. Однако я знаю, как уже писал, что многие из этих приложений отнюдь не впечатляют, например, дифференциального геометра, который посмотрит на эти приложения как на принадлежащие какой-то далёкой области математики, которую можно не замечать. Даже приложения комбинаторики к теории чисел считаются «вторым сортом» теории чисел.

Пожалуй, полезно обсудить различные другие способы, которыми одна область математики может помогать другой. Ниже приведён (не исчерпывающий) список возможных полезных влияний области А на область В (в порядке убывающей прямоты влияния).

- (i) Теорема из области А имеет немедленные и полезные следствия в области В.
- (ii) Теорема из А имеет некоторые следствия в области В, но нужно поработать, чтобы доказать это.
- (iii) Теорема из А похожа на вопрос из области В в достаточной степени, чтобы можно было воспроизвести или адаптировать А-доказательство к В-вопросу.
- (iv) Чтобы решить задачу из А, разрабатываются методы в области В, представляющие самостоятельный интерес.
- (v) Область В содержит определения, для которых существуют схожие в области А. (Пример: можно придумать определение независимости событий, которое похоже, но не совсем, на определение линейной независимости векторов.) Область А, таким образом, оказывается плодотворной для работы с задачами и результатами в области В.
- (vi) Опыт, приобретённый в области А, даёт полезные навыки для того, чтобы сделать важный вклад в область В.
- (vii) Область А по духу достаточно близка к области В, так что любой, кто хорош в первой области, скорее всего хорош и во второй. При этом многие математики вносят вклад в обе области.

Менее прямые связи, такие как (iv) или (vii), соответственно не так заметны. Тем не менее, их вклад в единство математики не следует недооценивать. Я почувствовал это особенно остро после нескольких лет работы в геометрии банаховых пространств. Исходная причина моей работы в этой области была просто в том, что меня восхитила теорема Дворецкого, а также несколько очень естественных открытых проблем. Позже я обнаружил, что выбранная мною ветвь математики сильно критиковалась за то, что оторвалась от своих классических корней в дифференциальных уравнениях и тем самым потеряла свои цели. Я бы согласился, что между чистой теорией банаховых пространств и другими областями мало связей типа (i) и (ii), хотя здесь есть некоторые глубокие идеи, по мнению многих недостаточно использованные. Но как только кто-то начинает искать потерянные связи, он находит их в избытке. Использование концентрации меры предоставляет хороший пример связей типа (iii) (или (iv) — классификация несколько искусственна). Что касается связей типа (vi) и (vii), то могу говорить на основании собственного опыта — в недавнем прошлом я работал над вопросами, не относящимися к теории банаховых пространств. Хотя я и не применял теоремы о банаховых пространствах, мой опыт в них помог подойти к этим вопросам так, как иначе было бы для меня невозможно. И я далеко не одинок в этом: многие математики, раньше работавшие с банаховыми пространствами, затем успешно работали в других областях, таких как гармонический анализ, уравнения в частных производных,  $C^*$ -алгебры, теория вероятностей и комбинаторика.

Единственный способ не замечать этих связей, мне кажется, — считать, что всё это связи между двумя неинтересными и несущественными областями. Это довольно радикальная точка зрения, которая игнорирует столь много современной математики, включая результаты с прямым практическим применением, так что сложно поверить, что кто-то всерьёз так считает. Однако похоже, что такие люди есть, и это возвращает меня к мысли, что в фундаментальной математике существуют две культуры. Наверно, *внутри* каждой из двух частей математики имеется больше связей, чем *между* ними, вот почему эпитет «две культуры» мне кажется подходящим. (Я ещё раз повторюсь, что эти термины — лишь полезные упрощения, и что я прекрасно понимаю: многих людей привлекает построение концептуальных теорий потому, что в конечном счёте их интересует решение конкретных задач.)

Если в самом деле можно разделить математику на две большие культуры, между которыми не очень много связей, то можно задаться

вопросом, важно ли это. По моему мнению — да. Во-первых, эта ситуация имеет много нежелательных практических следствий. Например, может оказаться, что математики одной культуры принимают решения, влияющие на карьеру математиков другой культуры. Если между этими культурами мало взаимопонимания, то достичь справедливости в таких решениях, что бывает даже в лучшем случае трудно, становится ещё труднее. (У меня лично никаких претензий нет, но моя карьера сложилась весьма удачно.) Второй эффект состоит в том, что студенты, которые потенциально подходят для работы в одной культуре, попадают под пресс работы в другой культуре и в итоге растрачивают свой талант. Это особенно опасно там, где количество тем для работы мало.

Это эффекты, возможно, неизбежны в качестве побочного продукта академической жизни, и они не главная причина, по которой я призываю к лучшему взаимодействию вопреки глубокому разделению. Главный вред нынешней нехватки взаимодействия в том, что она означает множество упущенных возможностей. Мне приходилось слышать, как математики теоретической направленности жалуются, что задача была атакована всеми известными методами, но остаётся неподдающееся ядро, «по существу комбинаторное». Это способ сказать, что задача очень трудная, но, более конкретно, трудная именно в том роде, какой привлекает математиков, склонных к решению задач. К сожалению, трудно также достичь такого уровня понимания, чтобы по достоинству оценить задачу комбинаторной природы. Эта ситуация как будто скроена для межкультурного сотрудничества, но сотрудничество такого рода требует большего усилия со стороны решателей задач по изучению теории и большей благожелательности со стороны теоретиков к тем математикам, которые не знают, что такое кохомологии. Такие усилия не могут не обогатить обе математические культуры.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [A1] *Atiyah M. F.* An interview with Michael Atiyah // *Math. Intelligencer*. 1984. Vol. 6. P. 9–19.
- [A2] *Atiyah M. F.* How research is carried out // *Bull. IMA*. 1974. Vol. 10. P. 232–234.
- [A3] *Atiyah M. F.* Identifying progress in mathematics // *The identification of progress in learning* (Colmar, 1983). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. P. 24–41.
- [CGW] *Chung F., Graham R. L., Wilson R. M.* Quasi-random graphs // *Combinatorica*. 1989. Vol. 9, № 4. P. 345–362.

- [D] *Dvoretzky A.* Some results on convex bodies and Banach spaces // Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960). Jerusalem: Jerusalem Academic Press, 1961. P. 123–160.
- [E] *Erdős P.* Some remarks on the theory of graphs // Bull. Amer. Math. Soc. 1947. Vol. 53. P. 292–294.
- [EL] *Erdős P., Lovász L.* Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions // Infinite and finite sets. Amsterdam: North-Holland, 1975. (Colloq. Math. Soc. János Bolyai; Vol. 10). P. 609–627.
- [J] *Janson S.* Poisson approximation for large deviations // Random Structures and Algorithms. 1990. Vol. 1, № 2. P. 221–230.
- [K] *Кашин Б. С.* Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41, № 2. С. 334–351.
- [M] *Мильтман В. Д.* Новое доказательство теоремы А. Дворецкого о сечениях выпуклых тел // Функц. анализ и его прил. 1971. Т. 5, вып. 4. С. 28–37.
- [R] *Roth K.* On certain sets of integers // J. London Math. Soc. 1953. Vol. 28. P. 104–109.
- [Sza] *Szarek S. J.* On Kashin's almost Euclidean orthogonal decomposition of  $\ell_1^n$  // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 1978. Vol. 26, № 8. P. 691–694.
- [Sze] *Szemerédi E.* Regular partitions of graphs // Problèmes combinatoires et théorie des graphes. Paris: CNRS, 1978. (Colloq. Internat. CNRS; Vol. 260). P. 399–401.
- [T] *Thomason A.* Pseudo-random graphs // Proceedings of Random Graphs, Poznań 1985. Amsterdam: North Holland, 1987. (Annals of Discrete Mathematics; Vol. 33). P. 307–331.