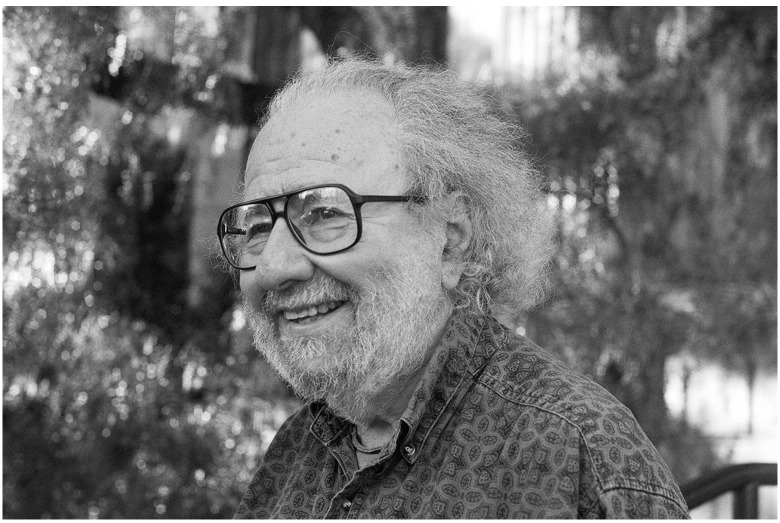
Математический мир

Мартин Дейвис: обзор его исследований по логике, информатике и философии

Э. Дж. Вейюкер, В. Зиг, Ю. В. Матиясевич,
Л. де Моль, Э. Дж. Омодео, А. Поликрити



В автобиографическом очерке 1999 г. [Davis, 1999] «От логики к информатике и обратно» (From logic to computer science and back) Мартин Дейвис (8.3.1928–1.1.2023) написал, что рассматривает себя как специалиста по логике *и* информатике. В 2016 г. он расширил этот очерк и выразил

Liesbeth De Mol, Yuri V. Matiyasevich, Eugenio Omodeo, Alberto Policriti, Wilfried Sieg, and Elaine J. Weyuker. Martin Davis: An Overview of his Work in Logic, Computer Science, and Philosophy // Philosophia Mathematica. 2025. Vol. 33, iss. 3. P. 425–450. См. также `https://arxiv.org/abs/2506.08588`. Перевод Б. Р. Френкина. Редакция благодарна Ю. В. Матиясевичу за многочисленные полезные замечания.

новую точку зрения в новом названии «Моя жизнь как специалиста по логике» (My life as a logician). Он подчёркивает, что логика — это тема, составляющая единую основу его научной карьеры. В этой статье мы пытаемся дать целостное представление о последовательных достижениях Дейвиса, которые породили его основополагающие статьи о вычислимости, неразрешимых задачах, проблемах автоматизации рассуждений, а также по истории и философии информатики.

Когда меня пригласили выступить на еженедельном коллоквиуме математического факультета Калифорнийского университета в Беркли, я воспользовался случаем выразить свои взгляды на информатику как автономную ветвь математики. Тарский, присутствовавший в аудитории, высказал в последовавшей дискуссии решительные возражения.

Мартин Дейвис [2020]

В этой статье мы пытаемся дать целостное представление о последовательных достижениях Дейвиса, которые привели его от юношеского *страстного* (passionate — выражение Дейвиса) интереса к основаниям вещественного анализа к основополагающим статьям о вычислимости, неразрешимых задачах, проблемах автоматизации рассуждений, а также по истории и философии информатики.

§ 1. Жизнь и научная деятельность

Мартин Давид Дейвис родился в 1928 г. в Бронксе, Нью-Йорк, где в то время жили в основном рабочие. Его родителями были евреи, иммигрировавшие из Польши. За несколько лет до того, как Дейвису пришла пора переходить в среднюю школу, в Нью-Йорке открылась специализированная городская средняя школа, The Bronx High School of Science, предоставлявшая существенно расширенное бесплатное образование для всех, кто показал достаточно хороший результат на приёмных экзаменах. Дейвис окончил эту школу в 1944 г. и поступил в Городской колледж Нью-Йорка, также предоставлявший бесплатное образование студентам из Нью-Йорка. Дейвис специализировался по математике, и его руководителем был Эмиль Леон Пост — человек, которым он глубоко восхищался и который в большой мере определил дело его жизни. Окончив колледж в 1948 г., Дейвис отправился в Принстон для работы над диссертацией по математической логике. Титульным руководителем диссертации был Алонзо Чёрч, другая выдающаяся фигура раннего периода теории вычислимости. Дейвис получил учёную степень в 1950 г.

Как вспоминает Дейвис в статье [2016a] (см. также [Calvert et al., 2024]), десятилетие после получения степени он провёл перемещаясь между различными академическими учреждениями: это университет Иллинойса в Урбана-Шампейн, Институт перспективных исследований в Принстоне, университет Калифорния — Дейвис, университет штата Огайо, Хартфордская аспирантура Ренсселеровского политехнического института. В 1951 г. Дейвис женился на Вирджинии Палмер[1]. У них родились два сына: Гарольд и Натан. Примерно с 1960 г. Дейвис жил в Нью-Йорке, где учредил учебную программу по логике в Иешива-университете. С 1965 г. до своей отставки в 1996 г. он преподавал в Курантовском институте математических наук при Нью-Йоркском университете, сначала как профессор математики, а позже как профессор информатики. С 1988 по 1990 г. он возглавлял кафедру информатики. Уйдя в отставку из Нью-Йоркского университета, он жил в Беркли и продолжал работать как «приглашённый специалист» в том университете, «где Альфред Тарский создал группу логиков мирового класса» [Davis, 2016a, p. 31].

§ 2. Вычислимость и неразрешимость

В дальнейшем мы уделим главное внимание тем аспектам деятельности Дейвиса, которые продвинули вперёд информатику и её основания. При этом неизбежно останутся в тени его достижения в логике как таковой (например, в статье [Davis and Fechter, 1991]) и его исследования по основаниям математики и математического анализа, не считая короткого обзора в § 5.

В мае 1950 г. диссертация Дейвиса «О теории рекурсивной неразрешимости» была принята к защите факультетом математики Принстонского университета[2]. Выражая свою благодарность «всем тем, чья помощь значила столь много при подготовке этой диссертации», Дейвис поблагодарил Алонзо Чёрча за то, что тот прочёл рукопись несколько раз и предложил «различные поправки и рекомендации».

[1] Их брак продлился 71 год вплоть до ухода их обоих из жизни 1 января 2023 года.

[2] Дейвису только что исполнилось двадцать два. Рекурсивные функции — ключевой инструмент в теории вычислимости. По сути, это функции на натуральных числах. Чёрч использовал их как формальную модель эффективной вычислимости.

За этим стандартным «Спасибо!» диссертанта руководителю следует впечатляющее признание интеллектуального долга: «Профессор Эмиль Л. Пост первым ввёл меня в теорию рекурсивных функций и в большой мере отвечает за мою нынешнюю точку зрения на этот предмет». Точка зрения Дейвиса была такой не только в 1950 г. — она сохранялась в течение всей его деятельности.

Эта диссертация — как мы сейчас покажем — была замечательным документом[3)]. В части I переформулируется и обобщается теория рекурсивных функций Клини и показано, что она эквивалентна аналогичной теории Поста. Одним из глубоких проявлений этой эквивалентности служит теорема, утверждающая, что множество рекурсивно перечислимо в точности тогда, когда оно нормально. Это означает, что любое множество натуральных чисел, являющееся областью значений рекурсивной функции, порождается нормальной системой, причём верно и обратное. Нормальные системы были введены Постом и по существу являются очень простыми системами перезаписи строк. В части II арифметическая иерархия Клини расширяется до трансфинитной по счётным конструктивным ординалам, что порождает гиперарифметическую иерархию. Главные результаты были представлены в докладе на Международном конгрессе математиков в 1950 г.; см. [Davis, 1952]. Они описаны также в последних параграфах книги [Davis, 1958] вместе с новыми на тот момент результатами. Подробное описание теории гиперарифметических множеств и основополагающей роли Дейвиса можно найти в работе Московакиса [Moschovakis, 2016]. Наконец, часть III посвящена «неодолимой» проблеме, а именно десятой проблеме Гильберта. Диссертация демонстрирует характерные черты стиля Дейвиса — замечательную ясность математических формулировок и глубокое стремление показать широкий контекст при введении математических понятий и их систематическом развитии.

Широкий контекст обрисован во введении к диссертации. Здесь Дейвис не только прослеживает развитие теории рекурсивных функций, но и описывает её «наиболее впечатляющие результаты». Они включают ряд логически равносильных результатов, относящихся к невозможности решения некоторых логико-математических задач

[3)] В своём интервью для Notices of the AMS [Jackson, 2008, p. 563] Дейвис заявил: «К тому времени, когда я окончил Городской колледж, я знал, что хочу быть логиком. Я написал курсовую работу по продвинутому курсу логики на философском факультете, и в некотором смысле это был первый набросок того, что позже стало моей диссертацией».

за конечное число шагов. Один из примеров — проблема остановки машины Тьюринга. При этом важнейшим для трактовки Дейвиса было изящное математическое описание машин Тьюринга, принадлежащее Посту. Оно позволяет дать альтернативное доказательство неразрешимости проблемы остановки, использованное затем и для доказательства неразрешимости проблемы тождества слов в полугруппах. Этот результат, в то время новый, был представлен Дейвисом в 1958 г. в учебнике «Вычислимость и неразрешимость» (Computability and Unsolvability) [Davis, 1958]; широкий спектр неразрешимых проблем можно найти в статье Дейвиса [Davis, 1977b]. В учебнике не только приведён результат Поста, но изложение теории вычислений основано на подходе Поста к определению машин Тьюринга как производящих систем. Главные результаты математической логики (теоремы о неполноте и неразрешимости) устанавливаются именно на этой основе. Следует особо подчеркнуть, что Дейвис в 1958 г. мыслил эту тематику уже не как «теорию рекурсивных функций» (как в его диссертации), а как «теорию вычислимости». В то время «Вычислимость и неразрешимость» была одним из основных источников по формирующейся новой области — информатике.

Эту глубокую связь с теоретической информатикой легко увидеть в сегодняшней перспективе; в 1983 г. она явно отмечена в написанном совместно с Элейн Вейюкер учебнике «Вычислимость, сложность и языки — основы теоретической информатики» (Computability, Complexity, and Languages — Fundamentals of Theoretical Computer Science) [Davis and Weyuker, 1983][4)]. В предисловии авторы пишут:

> Теоретическая информатика — это изучение моделей вычислений средствами математики. Она возникла как таковая в 1930-е годы, задолго до появления современных компьютеров, в работах логиков Чёрча, Гёделя, Клини, Поста и Тьюринга. Эти ранние работы имели глубокое влияние на развитие практической и теоретической информатики. Не только машина Тьюринга оказалась основой теории, но и работы этих первопроходцев предвосхитили многие аспекты практики вычислений, ставшие теперь обычными.

Для Дейвиса это, весьма драматичное, изменение концептуальной перспективы от теории рекурсивных функций к теории вычислимости

[4)] Второе, значительно расширенное издание в соавторстве с Роном Сигалом [Davis et al., 1994] появилось в 1994 г.

основывалось на том факте, что Пост полностью воспроизвёл тьюринговский метод анализа механических вычислений, выполняемых человеком, с помощью «производящих систем» [Turing, 1937]. В дальнейшем в статье [Turing 1950] Тьюринг, применив технику Поста, установил неразрешимость проблемы тождества слов для полугрупп с сокращением; затем в статье [Turing 1954] Тьюринг использовал введённое Постом понятие детерминированных производящих систем (назвав их «задачами о замене» — substitution puzzles) для двух целей: (1) обсудить методологическую проблему о математически строгой и адекватной формулировке понятия вычисления, (2) доказать основные результаты о неразрешимости. В книге Дейвиса ощущается глубинное концептуальное единство подходов Поста и Тьюринга. Оно ясно проявляется в статье Дейвиса и Зига «Концептуальное слияние в 1936 г.: Пост и Тьюринг» (Conceptual Confluence in 1936: Post and Turing) [Davis and Sieg, 2015]. Эта тема обычно обсуждается под рубриками «тезис Чёрча» и «тезис Тьюринга»[5)].

В своей диссертации Дейвис перечислил «впечатляющие результаты» в области, которую он тогда называл теорией рекурсивных функций. Он сделал реальный вклад в эту область, став редактором сборника, включавшего большинство оригинальных статей, где содержались эти результаты. Сборник [Davis, 1965] был опубликован под названием «Неразрешимое: основные статьи о неразрешимых утверждениях, неразрешимых проблемах и вычислимых функциях» (The Undecidable: Basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable functions). До сих пор это фундаментальный источник для любого, кто изучает историю, философию и теорию вычислимости. Особое внимание в сборнике уделено Посту — туда включены не только некоторые его опубликованные статьи, но также замечательная и ранее не опубликованная работа «Абсолютно неразрешимые задачи и относительно неразрешимые утверждения — обзор предвосхищения» (Absolutely unsolvable problems and relatively undecidable propositions — account of an anticipation). В этой статье Пост описывает, как в начале 1920-х он предвосхитил результаты Чёрча, Гёделя

5) Тезис Чёрча утверждает, что любая эффективно вычислимая функция является общерекурсивной (и λ-определимой). По охвату он совпадает с тезисом Тьюринга, что любая вычислимая функция вычисляется машиной Тьюринга. Суть обоих тезисов — методологический вопрос о правомерности отождествления неформального представления (вычислимость, эффективная вычислимость) со строгим математическим понятием (общерекурсивность, вычислимость на машине Тьюринга).

и Тьюринга[6]. Разумеется, в «Собрании трудов Эмиля Л. Поста» (The Collected Works of Emil L. Post) все статьи Поста по математике были опубликованы. Дейвис закончил редактирование сборника в 1993 г. и отметил в предисловии, что многие ученики Поста испытали его глубокое влияние и сделали успешную карьеру в математике. О себе Дейвис писал: «Я единственный, чьи собственные исследовательские интересы шли в направлениях, где он был первопроходцем, так что я нахожу особенно уместным, что играю роль его редактора».

Дейвис внёс вклад в историю информатики не только как редактор двух книг, описанных выше, но и как оригинальный исследователь. Поскольку он участвовал в формулировании теории вычислимости, не стало неожиданностью, что он внёс вклад и в философские аспекты этой области. Мы вернёмся к этому в § 6. Но одна математическая проблема пробуждала у него страстную увлечённость начиная с его диссертации — а именно, Десятая проблема Гильберта. Совершенно замечательные достижения, связанные с этой проблемой, составляют содержание следующего параграфа.

§ 3. Десятая проблема Гильберта

Невозможно переоценить роль Дейвиса в решении Десятой проблемы Гильберта. Это одна из 23 математических проблем, которые поставил Давид Гильберт [Hilbert, 1900; 1901–1902] в 1900 г. на втором Международном конгрессе математиков в Париже.

Среди этих 23 проблем десятая — единственная, которую можно сегодня считать относящейся к информатике (не существовавшей в 1900 году). В этой проблеме Гильберт ставил вопрос о разрешимости *диофантовых уравнений*. Это уравнения вида

$$P(x_1, \dots, x_m) = 0, \tag{1}$$

где P — многочлен с целыми коэффициентами.

Такие уравнения названы в честь греческого математика Диофанта из Александрии, жившего в третьем веке н. э. Полиномиальные

[6] Пост представил эту статью в American Journal of Mathematics в 1941 г. Однако главный редактор Герман Вейль её отклонил, сказав, что этот журнал — «*не место для исторических обзоров*» (цит. в [Davis, 1994]). При этом Вейль предложил сосредоточиться на главных математических результатах; итогом стал сокращённый вариант, который был в конце концов опубликован как [Post, 1943]. Он содержит теорему Поста о нормальной форме и формулировку первого тезиса Поста.

уравнения рассматривались греческими математиками и до Диофанта, но на геометрическом языке. Например, чтобы решить уравнение

$$x^2 = 2, \tag{2}$$

требовалось начертить квадрат с единичной стороной и взять его диагональ.

Новшество, введённое Диофантом, состояло в следующем: он искал решения полиномиальных уравнений в (положительных) рациональных числах. Для него уравнение (2) не имело решений.

Гильберт в своей Десятой проблеме спрашивает о решениях диофантовых уравнений в целых числах. После эпохи Диофанта математики нашли решения многих диофантовых уравнений и установили, что многие другие не имеют решений. Это делалось разнообразными методами, иногда разового характера (общеизвестный пример — великая теорема Ферма). Гильберт предлагал найти *универсальный метод*, применимый к любому диофантову уравнению.

В сегодняшней терминологии мы бы сказали, что Гильберт предлагал найти алгоритм. Однако он не использовал это слово — в то время не было математически строгого общего понятия алгоритма. Его лишь в тридцатые годы сформировали Курт Гёдель, Алан Тьюринг, Эмиль Пост, Алонзо Чёрч и другие логики. Они дали несколько равносильных определений, применяя различные модели вычислений, например *машины Тьюринга*, *λ-исчисление*, *рекурсивные функции* и т. д.

Интерес Дейвиса к Десятой проблеме Гильберта был пробуждён его учителем Эмилем Постом, который написал в статье [Post, 1944], что эта проблема «умоляет о доказательстве неразрешимости».

Дейвис вскоре сформулировал гипотезу, впервые высказанную в диссертации [Davis, 1950b]. Из этой гипотезы вытекало, что искомый алгоритм не существует. Формулировка этой гипотезы также не содержала слова «алгоритм». При работе с диофантовыми уравнениями удобнее иметь дело с другим понятием, которое тесно связано с алгоритмами.

Множество $\mathfrak{M}$ наборов из n натуральных чисел называется *перечислимым* (*полуразрешимым*, *рекурсивно перечислимым*), если все его элементы (и только они) могут быть напечатаны по некоторому алгоритму (компьютерной программе, которая может работать потенциально бесконечно долго). Множество $\mathfrak{M}$ наборов из n натуральных чисел называется *разрешимым*, если существует алгоритм, который для любого данного набора из n натуральных чисел сообщает за конечное число шагов, принадлежит этот набор множеству $\mathfrak{M}$ или нет.

Существование неразрешимых перечислимых множеств было крупным открытием в теории вычислимости.

Множество $\mathfrak{M}$ наборов из n натуральных чисел называется *диофантовым*, если существует такой многочлен $P(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m)$ с целыми коэффициентами, что

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathfrak{M} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x_1, \ldots, x_m [P(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) = 0]. \quad (3)$$

Эквивалентность такого вида называется *диофантовым представлением* множества $\mathfrak{M}$.

Легко видеть, что каждое диофантово множество перечислимо. Мартин Дейвис предположил, что и обратное верно.

Гипотеза Мартина Дейвиса. *Любое перечислимое множество диофантово.*

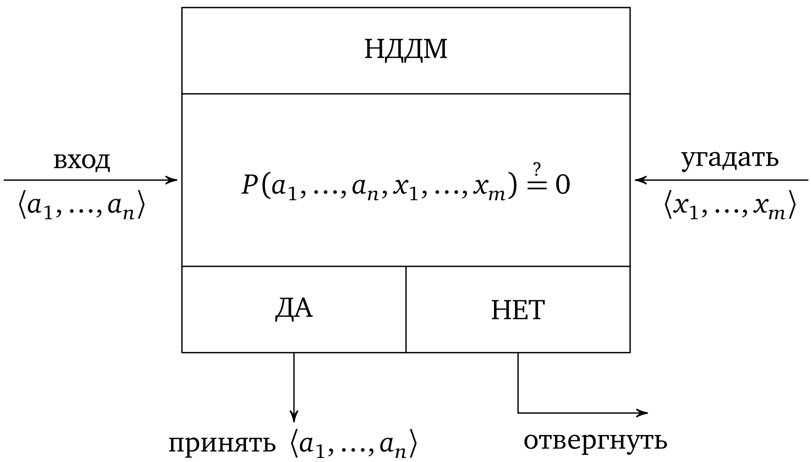
Из этой гипотезы вытекает отрицательное решение Десятой проблемы. В самом деле, достаточно взять неразрешимое перечислимое множество в качестве $\mathfrak{M}$ в соотношении (3); тогда никакой алгоритм не определит, имеет ли диофантово уравнение в правой части (3) какое-либо решение $x_1, \ldots, x_m$ при данных значениях $a_1, \ldots, a_n$.

Гипотеза Дейвиса значительно сильнее, чем требуется для доказательства неразрешимости Десятой проблемы Гильберта. А именно, было бы достаточно допустить в качестве P в определении диофантова множества любую функцию, которая становится многочленом от $x_1, \ldots, x_m$ после подстановки численных значений вместо параметров $a_1, \ldots, a_n$. В качестве примера такого обобщения можно позволить параметрам (но не неизвестным) входить в показатели степеней. Эта более слабая форма подхода Дейвиса к Десятой проблеме Гильберта была предложена А. И. Мальцевым [Maltsev, 1968] (см. тж. [Matiyasevich, 1993, комментарии к гл. 5]).

Матиясевич (один из авторов настоящей статьи) однажды назвал гипотезу Дейвиса «дерзкой». В самом деле, у Дейвиса было лишь немного неформальных аргументов в её поддержку. С другой стороны, гипотеза имела, в дополнение к неразрешимости Десятой проблемы Гильберта, много следствий, иногда совершенно поразительных. Например, из гипотезы следует, что (очевидно перечислимое) множество всех простых чисел — это в точности множество всех неотрицательных значений некоторого многочлена при всевозможных целых значениях его переменных.

Теорию вычислимости можно развивать либо в терминах алгоритмов, либо в двойственной форме — в терминах перечислимых множеств. Второй подход применяли учитель Дейвиса Эмиль Пост [Post, 1943] и позднее Г. С. Цейтин [Tseitin, 1964] и П. Мартин-Лёф [Martin-Löf, 1970].

В 1976 г. Л. Адлеман и К. Мандерс [Adleman, Manders, 1976] выразили связь между обоими понятиями, введя в рассмотрение *недетерминированные диофантовы машины*, сокращённо НДДМ (NDDM). Каждая такая машина задаётся параметрическим диофантовым уравнением и работает следующим образом: получив на вход $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, она наугад выбирает числа $x_1, \ldots, x_m$ и вычисляет значение многочлена; если оно равно нулю, то n-ка $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ принимается (т. е. опознаётся как принадлежащая данному множеству).



Гипотезу Дейвиса можно переформулировать следующим образом.

Гипотеза Дейвиса. *Недетерминированные диофантовы машины имеют те же вычислительные возможности, как, например, машины Тьюринга.*

Смысл во введении ещё одной модели вычислений состоял в следующем. Диофантовы машины недетерминированны по существу, и в них явно отделена недетерминированная часть (выбор значений $x_1, \ldots, x_m$) от крайне простых детерминированных действий (состоящих в вычислении многочлена). Была надежда, что диофантовы машины могут стать орудием атаки на пресловутую проблему тысячелетия $P \stackrel{?}{=} NP$ о детерминированных и недетерминированных вычислениях.

Дейвис осуществил первый шаг к доказательству своей гипотезы, анонсировав в статье [Davis, 1950a], доказав в диссертации [Davis, 1950b] и опубликовав в статье [Davis, 1953] следующий результат.

Теорема (Дейвис). *Для каждого перечислимого множества $\mathfrak{M}$ существует такой многочлен Q с целыми коэффициентами, что*

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathfrak{M} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \exists z \;\; \forall y \leqslant z \;\; \exists x_1, \ldots, x_m [Q(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m, y, z) = 0]. \quad (4)$$

Представления такого типа стали известны как *нормальные формы Дейвиса*. Их можно рассматривать как усовершенствование гёделевской техники арифметизации. Эта техника позволяет задать любое перечислимое множество арифметической формулой, содержащей (возможно, многие) кванторы общности. Таким образом, нормальную форму Дейвиса можно рассматривать как устранение всех, кроме одного, кванторов общности из арифметических представлений общего вида. На самом деле доказательство в статье [Davis, 1953] — не устранение, а «сжатие» произвольно многих кванторов общности в один ограниченный[7)]. Первоначальное доказательство, приведённое в диссертации [Davis, 1950b] и воспроизведённое в книге [Davis, 1958], было совершенно другим: Мартин Дейвис арифметизировал нормальные системы (введённые Э. Постом [Post, 1943]) весьма экономным способом — используя лишь один квантор общности.

Дейвис продолжал работать над доказательством своей гипотезы совместно с Хилари Патнемом. В своих воспоминаниях [Davis, 1993a] об этом сотрудничестве в летние периоды 1957–1960 гг. Дейвис цитирует письмо от Патнема: «Об этом лете я вспоминаю не столько математические подробности, сколько предельную *интенсивность*, с которой мы работали. Никогда в жизни я не был так увлечён математической проблемой, и наверняка то же верно для тебя».

После ряда промежуточных результатов Дейвис и Патнем [Davis, Putnam, 1958a] «почти доказали» гипотезу. Недоставало двух звеньев.

Во-первых, Дейвис и Патнем были вынуждены работать с более широким классом *экспоненциальных диофантовых представлений*. Они похожи на диофантовы, но при построении P в формуле (3) допускается возведение в степень (наряду со сложением и умножением).

Во-вторых, доказательство Дейвиса и Патнема было условным: они предполагали, что *для каждого k существует арифметическая прогрессия длины k, состоящая из различных простых чисел*.

[7)] Сноска в статье [Davis, 1953] сообщает, что это доказательство принадлежит анонимному рецензенту статьи. Предположительно это был Рафаэль Робинсон, который вскоре [Robinson, 1956] количественно улучшил результат Дейвиса, показав, что в формуле (4) всегда можно взять $m = 4$.

В 1959 г. эта гипотеза считалась правдоподобной, но доказали её лишь много позже, в 2004 г., Бен Грин и Теренс Тао [Green, Tao, 2008]. К счастью, Дейвису и Патнему не пришлось так долго ждать для дальнейшего продвижения. Помощь пришла от Джулии Робинсон. Она начала изучать диофантовы представления примерно тогда же, когда Дейвис высказал свою гипотезу. Однако её собственные исследования были направлены на доказательство противоположного. По предложению своего профессора Альфреда Тарского, Робинсон попыталась доказать, что (очевидно перечислимое) множество всех степеней двойки *не* диофантово. После безуспешных попыток доказать это, она переключилась на поиск диофантовых представлений этого множества и более общего множества

$$\{\langle a, b, c\rangle \mid a = b^c\}. \tag{5}$$

Робинсон нашла достаточное условие (Дейвис позже назвал его JR) для существования такого представления.

Дейвис и Робинсон встретились в 1950 г. на Международном конгрессе математиков в Кембридже, Массачусетс. Оба они доложили свои результаты, относящиеся к диофантовым представлениям. Робинсон вспоминает [Reid, 1996]: «Помню, что он [Дейвис] сказал, что он не видит, как моя работа может помочь в решении проблемы Гильберта, поскольку это лишь ряд примеров. Я сказала: ну, я сделала что смогла». Позже Дейвис признал [Davis, 1993a]: «Говорят, что я ей сказал, что сомневаюсь в перспективности её подхода — несомненно, это одно из глупейших высказываний в моей жизни».

В 1959 г. Дейвис и Патнем послали Джулии Робинсон свой новый и ещё не опубликованный результат. Она сумела избавиться от гипотезы об арифметических прогрессиях простых чисел. Задним числом можно сказать, что Дейвис, Патнем и Робинсон были «околдованы» Гёделем: они пытались воспроизвести его технику средствами диофантовых уравнений. Дейвис пишет [Davis, 1993a]: «Позже Юрий Матиясевич показал, что на самом деле можно использовать любые достаточно большие взаимно простые модули, так что наши усилия по поводу простых множителей были в действительности излишни».

Дейвис и Патнем отозвали свою статью и опубликовали совместную работу с Робинсон [Davis, Putnam, Robinson, 1961b]. Её главный результат таков.

ДПР-теорема. *Любое перечислимое множество $\mathfrak{M}$ имеет экспоненциальное диофантово представление.*

После этого, чтобы доказать гипотезу Дейвиса для *всех* перечислимых множеств, было достаточно найти диофантово представление для *единственного* специального множества (5). В свою очередь, для этого достаточно обеспечить выполнение вышеописанного условия JR (найденного Джулией Робинсон), и Дейвис попытался сделать это. Статья Дейвиса [Davis, 1968] имеет интригующее название «Одно уравнение, чтобы справиться со всеми» (One equation to rule them all). В ней он доказал, что если определённое уравнение (подразумеваемое в названии) имеет лишь тривиальное решение, то условие JR выполняется. Отношение Джулии Робинсон к этому результату можно видеть из следующего фрагмента её письма к Дейвису, процитированного им в [Davis, 1993a]:

> Мне доставило удовольствие изучить его, но моя вера в условие JR всё же не восстановлена. Однако я впервые смогла увидеть, как оно могло бы быть доказано. Возможно, ваше уравнение в самом деле годится, но похоже, что потребуется бесконечно много удачи!

Позже, к сожалению, несколько авторов нашли нетривиальные решения этого уравнения. Однако это не обесценило полностью идею Дейвиса. Было достаточно установить, что множество решений конечно. При этом оказалось, что отсюда вытекали бы и другие интересные следствия.

Первый пример диофантова уравнения с условием JR был построен одним из авторов настоящей статьи в работе [Matiyasevich, 1970] (см. также [Davis, 1973a]). В феврале 1970 г. Дейвис получил от Робинсон рукописные заметки, которые сделал Джон Маккарти на лекции Григория Цейтина в Новосибирске об этом примере. Дейвис вспоминает [Davis, 1993a]: «Я сумел получить большое удовольствие, восстановив доказательство. Но я не был удовлетворён, пока не создал свой собственный вариант доказательства Матиясевича и не представил его (10 марта) на семинаре в университете Рокфеллера по приглашению Хао Вана». Это доказательство было опубликовано в статье [Davis, 1971].

Будучи доказанной, гипотеза Дейвиса теперь известна под двумя сокращёнными названиями.

ДПРМ-теорема ($\equiv$ МРДП-теорема). *Любое перечислимое множество имеет диофантово представление.*

Таким образом, два понятия, происходящие из очень разных областей науки (диофантовы уравнения — из теории чисел, а перечислимые множества — из информатики), определяют один и тот же класс множеств натуральных чисел. Отсюда следует, что понятие вычислимости может быть определено в чисто математических терминах.

В статье [Davis, 1972] Дейвис обобщил отрицательное решение Десятой проблемы Гильберта следующим образом: *Не существует алгоритма, решающего, принадлежит ли определённому множеству мощность совокупности решений данного диофантова уравнения, если это множество и его дополнение непусты*.

В статье [Davis, 1973b] Дейвис распространил на диофантовы уравнения так называемую *теорему об ускорении* Мануэля Блюма [Blum, 1967].

Дейвис сделал решение Десятой проблемы Гильберта доступным широкой математической аудитории в своей статье [Davis, 1973a] в The American Mathematical Monthly. Полное доказательство можно найти также в книге [Matiyasevich, 1993]; Дейвис был редактором её английского перевода и написал к ней предисловие. Недавно М. Рам Мурти и Брэндон Фодден опубликовали другую книгу с полным подробным доказательством [Murty, Fodden, 2019].

ДПРМ-теорема нашла многочисленные применения. Некоторые из них представлены в совместной статье [Davis et al., 1976], которую написали Дейвис, Робинсон и Матиясевич. О многих других применениях ДПРМ-теоремы см. библиографию в книге [Matiyasevich, 1993] (расширенную в греческом переводе) и в [Murty, Fodden, 2019].

ДПРМ-теорема не стала последней точкой в исследовании Десятой проблемы Гильберта. Напротив, она открыла путь к изучению двух естественных обобщений этой проблемы.

Q1: *Существует ли алгоритм для решения диофантовых уравнений в поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел*?

Q2: *Существует ли алгоритм для решения диофантовых уравнений в алгебраических числах из данного конечного расширения поля $\mathbb{Q}$*?

Из положительного решения Десятой проблемы Гильберта вытекал бы утвердительный ответ на оба вопроса, но из отрицательного решения ничего для них непосредственно не следует.

После многочисленных частичных результатов многих авторов в вопросе Q2 (для некоторых полей и классов полей) недавно отрицательный ответ анонсировали Петер Койманс и Карло Пагано [Koymans, Pagano, 2024], а также Левент Альпёге, Манджул Бхаргава, Вей Хо и Ари Шнидман [Alpöge, Bhargava, Wei Ho, Shnidman, 2025].

Что касается вопроса Q1, он в 2025 г. остаётся открытым. В статье [Davis, 2010a] Дейвис предложил свежий подход к этой проблеме, выдвинув новую гипотезу. Она использует не просто существование неразрешимых перечислимых множеств, но существование так называемых *простых множеств*. Последние ввёл Эмиль Пост [Post, 1944].

§ 4. Автоматические рассуждения

> *Мы будем заниматься проблемой проверки формул в конъюнктивной нормальной форме на непротиворечивость; или, двойственно, проблемой проверки формул в дизъюнктивной нормальной форме на общезначимость.*
>
> Мартин Дейвис и Хилари Патнем [Davis, Putnam, 1958b]

Дейвис был первопроходцем также в области, которая сегодня называется «вычислительной логикой». Он вступил в эту область после краткого знакомства с некоторыми из первых компьютеров. Это путешествие в конкретное компьютерное программирование началось в 1951 г., когда Дейвис вошёл в группу по разработке программ для машины ORDVAC, обслуживавшей военные задачи во время Корейской войны. Покинув должность руководителя исследований в Иллинойсском университете в Урбана-Шампейн, он перешёл в Лабораторию систем управления, которую возглавлял Фредерик Зейтц. Этот шаг, вместе с последовавшим двухгодичным грантом Управления морских исследований в принстонском Институте передовых исследований, избавил его от призыва в армию.

За год интенсивной тренировки в программировании Дейвис достиг достаточного признания своих вычислительных возможностей, чтобы обеспечить финансирование проекта по реализации разрешающей процедуры для арифметики Пресбургера, которая описывает натуральные числа и операцию их сложения. Процедура была реализована летом 1954 г. в Институте передовых исследований на машине JOHNNIAC. «Её великий триумф состоял в доказательстве того, что сумма двух чётных чисел чётна» [Davis, 1983]. Каким бы скромным ни казалось сегодня это достижение, оно часто считается первым математическим доказательством, сгенерированным на компьютере (ср. [Siekmann and Wrightson, 1983]) и ознаменовавшим наступление эры автоматических доказательств. Принципиальное отличие этой программы от другого достижения середины 50-х в автоматизации рассуждений, а именно программы Logic Theorist (которую создали

Аллен Ньюэлл, нобелевский лауреат Герберт А. Саймон и Клифф Шоу), Дейвис кратко выражает в статье [Davis, 1983] лозунгами соответственно «Применяй математическую логику» и «Имитируй людей».

Дейвис время от времени вносил эпизодический, однако существенный вклад в автоматизацию рассуждений. Он также придумал ряд терминов, ставших стандартными в этой области[8].

Отчёт [Davis, Putnam, 1958], который совместно написали Мартин Дейвис и Хилари Патнем в 1958 г., развился в статьи [Davis and Putnam, 1960], [Chinlund et al., 1964] и др., расширившие его большое влияние на позднейшие исследования. Это отчёт возник из проекта, который предложили Дейвис и Патнем Агентству национальной безопасности, первоначально намереваясь рассмотреть автоматизацию доказательств в самом широком контексте (как неразрешимую, но полуразрешимую)[9]. «Когда мы говорили о нашем предложении, — вспоминает Дейвис в статье [Davis, 2020], — нам дали понять, что процедуры доказательства в логике первого порядка не интересны, но интересна SAT[10]. Меня предупредили, что это трудная проблема, усомнившись, что мы сможем сильно продвинуться за одно лето. Однако если мы хотим работать только по SAT, то наш проект готовы финансировать».

В итоге вышеупомянутый отчёт 1958 г. [Davis and Putnam, 1958b] рассматривает исчисление высказываний под широким углом зрения. В его первой части обсуждаются преимущества приведения формул к некоторому стандартному формату; авторы отмечают, что не все такие формы имеют одинаковые свойства, и показывают, что конъ-

[8] См., в частности, [Davis, 1963]: Дейвис признаёт [Davis, 1983; Davis and Fechter, 1991], что в этой работе он назвал «универсумом Эрбрана» то, что, по его словам, правильнее было бы назвать «универсумом Скулема»: совокупность всех замкнутых термов, построенных над непустым множеством констант и множеством функциональных символов.

[9] Если дано формальное утверждение, то разрешающий алгоритм должен сказать, доказуемо ли оно как теорема; полуразрешающая процедура может, столкнувшись с ложным или недоказуемым утверждением, работать без остановки.

[10] Примечание авторов. Проблема SAT (от satisfiability) состоит в следующем: существует ли способ присвоить истинностные значения переменным в формуле логики высказываний так, чтобы формула получила значение „истина“. Импульс, который дали Дейвис и Патнем разработке тестеров выполнимости пропозициональных формул, а также их конкретный вклад в виде алгоритмов, будет ясен из дальнейшего. Наше обсуждение вскоре переключится на более общее понятие выполнимости, которое относится к формулам логики первого порядка.

юнкции дизъюнкций пропозициональных переменных и их отрицаний (сокращённо, КНФ-формулы) — удобный формат для методов проверки выполнимости. Использование КНФ-тестера в процедуре доказательства для логики с кванторами позже позволило программе Дейвиса и Патнема превзойти тогдашних конкурентов (см. [Davis and Putnam, 1960]), в частности программы для доказательства теорем, авторами которых были Пол К. Гилмор [Gilmore, 1960], Хао Ван [Hao Wan, 1960], Даг Правиц и др. [Prawitz et al., 1960].

Два тестера КНФ-выполнимости (см. [Davis and Putnam, 1960]; [Davis et al., 1962]), которые обозначаются DP и DPLL от «Дейвис — Патнем — Лоджмен — Лавленд», возникли из того же плодотворного исследования [Davis and Putnam, 1958b]. Интересно, что и спустя десятилетия разрешающая процедура DPLL сохраняется в ядре программ для быстрой проверки булевой выполнимости (см. [Loveland et al., 2016] и [Biere et al., 2021]). Более того, проблема установления КНФ-выполнимости стала стандартной для оценки трудности решения сложных комбинаторных проблем определённого класса (одной из Задач тысячелетия)[11].

Чтобы кратко описать функционирование программы DPLL, будем считать, что анализируемая КНФ-формула вводится как множество $\mathscr{S}_0$, элементы которого — множества ненулевых целых чисел: положительные числа кодируют пропозициональные переменные, а отрицательные — их отрицания. Множество $\mathscr{S}_0$, как и его элементы, далее именуемые *клаузами*, конечны; элементы клауз называются *литералами*. Клаузы соответствуют дизъюнкциям, составляющим данную формулу. В качестве крайних случаев, пустое множество клауз представляет значение «истина», а любое множество, содержащее пустую клаузу, представляет значение «ложь».

Упростить множество клауз $\mathscr{S}$ относительно некоторого числа ℓ — значит, удалить из $\mathscr{S}$ все клаузы, содержащие ℓ, а из остальных клауз удалить противоположное число $-\ell$. Выполнение такого упрощения соответствует присвоению значения «истина» литералу, представленному числом ℓ; в результате все клаузы, содержавшие ℓ, становятся истинными, тогда как $-\ell$ уже не сможет обеспечить истинность никакой клаузы.

В начале работы программа DPLL полагает $\mathscr{S} = \mathscr{S}_0$ и многократно упрощает множество $\mathscr{S}$, пока оно не станет пустым. В этом случае исходное $\mathscr{S}_0$ объявляется выполнимым и алгоритм останавливается.

---

[11] См. `https://www.claymath.org/millennium/p-vs-np/`.

Каждый шаг упрощения расширяет множество литералов, объявленных истинными, с целью сделать истинным $\mathscr{S}_0$. А именно, при упрощении относительно литерала ℓ он объявляется истинным, а выбор $-\ell$ в дальнейшем становится невозможен. Таким образом, DPLL не только устанавливает выполнимость, но и строит модель для $\mathscr{S}_0$, — если такая модель существует.

Случай, когда $\mathscr{S}$ становится ложным (поскольку одна из его клауз становится пустой) асимметричен: алгоритм возвращается к *точке выбора* — а именно к ситуации, когда был предпочтён литерал ℓ, запустивший упрощение, и отвергнут противоположный $-\ell$. В этой точке запускается альтернативное упрощение. Если не остаётся точек выбора, а $\mathscr{S}$ ещё не пусто, то $\mathscr{S}_0$ объявляется невыполнимым.

Рассмотрим это подробнее. В программе DPLL применяются следующие три правила, причём первые два имеют приоритет перед третьим[12)].

— *Правило отдельного литерала* (Unit rule). Если в множестве $\mathscr{S}$ найдено одноэлементное подмножество, содержащее только литерал ℓ, то упростить $\mathscr{S}$ относительно ℓ.

— *Правило чистого литерала* (Pure-literal rule). Если найден литерал ℓ, принадлежащий клаузе из $\mathscr{S}$, причём $-\ell$ не принадлежит никакой клаузе из $\mathscr{S}$, — упростить $\mathscr{S}$ относительно ℓ.

— *Правило раздвоения* (Splitting rule). Выберем такой литерал ℓ, что и ℓ, и $-\ell$ принадлежат некоторым клаузам из $\mathscr{S}$; установим здесь точку выбора. Временно упростим $\mathscr{S}$ относительно ℓ и продолжим процесс. Если последующие упрощения не приведут к выполнимости $\mathscr{S}$, то отменим их и упростим $\mathscr{S}$ относительно $-\ell$.

Заслуживает упоминания, что первоначальный алгоритм DP вместо правила раздвоения включал правило, основанное на следующем замечании (которое как бы предвосхищает правило резолюций — см. ниже).

> *Правило устранения атомных формул.* Пусть данная формула F приведена к виду $(A \vee p)\&(B \vee \bar{p})\&R$, где A, B и R свободны от вхождений p. (Для этого достаточно сгруппировать клаузы, содержащие p, и «стереть» вхождения p, получив A; сгруппировать клаузы, содержащие $\bar{p}$, и «стереть» вхождения $\bar{p}$, получив B; сгруппировать остальные клаузы, получив R.) В этом

12) В первоначальной реализации присутствовали дополнительные эвристики.

случае формула F не выполнима в точности тогда, когда не выполнима формула $(A \vee B)\&R$. (Мартин Дейвис и Хилари Патнем [Davis and Putnam, 1960].)

В отчёте [Davis et al., 1961a] сообщается, что после создания DP с использованием этого правила было решено заменить его правилом раздвоения: они взаимозаменимы, но первое оказалось «нереализуемым (prohibitive), когда оперативная память компьютера ограниченна».

Что касается логики первого порядка, Дейвис разработал метод *Linked Conjunct* для автоматической генерации доказательства предложения путём поиска контрпримеров к его отрицанию. Этот метод был реализован в Лабораториях Белла в программе доказательства теорем, использующей язык LISP, — см. [Davis, 1963; Chinlund et al., 1964]. Она заимствовала из вышеупомянутой программы Правитца идею «скрещивания» — посредством подходящего алгоритма, основанного на т. н. *унификации*[13] — атомарных формул, имеющих противоположные знаки в разных конъюнктах. Хотя метод Linked Conjunct и утратил отчасти популярность, когда правило резолюций Джона Алана Робинсона получило большее признание, некоторые усовершенствованные варианты этого правила можно лучше объяснить с точки зрения прежнего метода (ср. [Yarmush, 1976; Omodeo, 1982]). Осветим этот вопрос подробнее.

Процедуры автоматического доказательства теорем обычно предполагают, что аксиомы данной теории вместе с отрицанием утверждения теоремы преобразуются в *невыполнимое* утверждение в конъюнктивной форме[14]. Действительно, главная задача этих процедур — най-

[13] Задача алгоритма унификации — найти подстановку термов вместо предметных переменных, которая делает два данных терма или две атомарные формулы синтаксически идентичными. Если такой подстановки не существует, алгоритм просто не даёт результата; в противном случае он даёт результат максимальной общности. Инструменты для этой цели были независимо разработаны около 1960 г. различными авторами (включая команду Дейвиса в Лабораториях Белла), не знавшими, что Жак Эрбран уже дал набросок алгоритма унификации в своей диссертации 1930 г. Во вводной статье Дейвиса [Davis, 1994] к собранию трудов Поста отмечено, что у Поста алгоритм унификации также был, но остался неопубликованным.

[14] В данном контексте мы используем термин «конъюнктивная форма» вместо КНФ, чтобы подчеркнуть, что мы имеем дело с логикой первого порядка. В её формулах «атомы» вида $R(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ — где R обозначает $(n+1)$-местный предикатный символ, а каждое t_i представляет терм, — аналогичны по своей роли переменным со значениями «истина» и «ложь» в логике высказываний.

ти *опровержение* множества (дизъюнктивных) клауз, составляющих эту конъюнктивную форму, где отсутствуют кванторы, но по умолчанию предполагается, что каждая предметная переменнная связана квантором общности. Возможен выбор из нескольких понятий опровержения. Например, отдельные шаги, составляющие опровержение, могут порождать клаузы или их конъюнкции; соответственно, завершающий шаг опровержения приводит к пустой клаузе или же к невыполнимому множеству клауз. В последнем случае можно потребовать — как делал Дейвис, без потери общности, — чтобы каждый литерал появлялся на завершающем шаге опровержения и как утверждаемый, и как отрицаемый (это и есть свойство «связанности» (linkedness), отражённое в названии метода Дейвиса).

Если шаги опровержения порождают клаузы (как происходит в строгих методах, основанных на правиле резолюций), любое применение какого-либо правила вывода исключает одно или несколько вхождений литералов из множества унифицируемых вхождений. Вызванная этим потеря информации — одна из причин возникновения необозримого количества бесполезных клауз во время поисков опровержения. Этот «комбинаторный взрыв» оказывается главным изъяном методов резолюций для автоматического доказательства теорем.

С другой стороны, в методе Linked Conjunct обнаружение пары дополнительно унифицируемых литералов ведёт не к их удалению, а к их «скрещиванию». Таким образом, если уточнить вышеприведённое описание, каждый шаг опровержения оперирует множеством клауз с накладывающимися скрещиваниями между парами вхождений литералов (не считая замен термов предметными переменными). При таких операциях можно для удобства представлять множество клауз структурами типа графов. Метод Linked Conjunct использует такие графы в явном виде, в основном как инструмент для концептуального подтверждения полноты в случае сложных усовершенствований метода резолюций Робинсона.

За несколько десятилетий произошёл заметный сдвиг в ожиданиях относительно систем человеко-машинного доказательства. Они развились из систем доказательства отдельных теорем в платформы для проверки доказательств — от высоко интерактивных систем доказательства до простых верификаторов записи. Дейвис сыграл роль катализатора этого сдвига в перспективе.

В статье [Davis, Schwartz, 1979] Дейвис и Джейкоб Т. Шварц ратовали за включение механизмов *метаматематической расширимости* в развитые технологии проверки доказательств, что позволило бы соответствующим программам подвергаться существенным усовершенствованиям без потери надёжности.

Около 1980 г. Дейвис некоторое время работал в Стэнфордской лаборатории искусственного интеллекта Джона Маккарти (SAIL). В этой лаборатории он имел дело и с системой проверки доказательств FOL (от First Order Logic — логика первого порядка), которую разработал Ричард Вейраух. На основании этого опыта Дейвис сказал, что ему понравилось качество взаимодействия с человек-машинной системой, но раздражала необходимость множества кропотливых мелких шагов по проверке совершенно очевидных выводов. В итоге, используя исходный LISP-код системы доказательства Linked-Conjunct, один стэнфордский старшекурсник успешно реализовал обработку «очевидностей» как расширение системы FOL, см. [Davis, 1981]. Статья [Davis, 1980] также была написана Дейвисом в тогдашнем окружении, которое он нашёл очень стимулирующим.

§ 5. Нестандартный анализ

> *Возможно, энтузиазм насчёт нестандартных методов на самом деле не лишён связи с общеизвестным удовольствием от запретного.*
>
> Мартин Дейвис [Davis, 1977a]

Дейвис вспоминал в статье [Davis, 2016a]:

> На старших курсах я попробовал восстановить подход Лейбница к бесконечно малым величинам как основу анализа… Поэтому я с огромным волнением и радостью услышал выступление Абрахама Робинсона в Ассоциации символической логики […], когда он предложил изящное решение этой проблемы с помощью метода, который он назвал *нестандартным анализом*.

После того как Дейвис и Рубен Херш написали на эту тему популярную статью [Davis, Hersch, 1972] для журнала «The Scientific American», Дейвис опубликовал монографию [Davis, 1977a], вышедшую из печати одновременно с двумя другими важнейшими книгами по исчислению бесконечно малых (ср. [Blass, 1978]).

Во введении к книге [Davis, 1977a] Дейвис заявил:

> Эта тематика может считаться важной только в той мере, в какой она ведёт к более простым и доступным изложениям или

> (что более важно) к математическим открытиям. Что касается первого, пусть судит читатель. Лучшее свидетельство второго — теория Бернстейна — Робинсона […], которая разрешила вопрос, остававшийся открытым много лет.

Действительно, книгу завершает доказательство — нестандартными методами — важных теорем о гильбертовых пространствах, включая теорему Бернстейна — Робинсона.

Подход, которым воспользовался Дейвис в начальной части своей монографии, даёт блестящий пример скрытия информации как руководящего принципа при создании конструкций и методов доказательства широкого назначения. Как отмечено в статье [Cantone et al., 2016], концепция устранения подробностей, сформулированная там, рассматривается в другой публикации 1977 года — цитированной выше статье «Метаматематическая расширимость систем доказательства теорем и проверки доказательств» (Metamathematical extensibility for theorem provers and proof-checkers) [Davis, Schwartz, 1979], имеющей большее отношение к технологии доказательств, чем к основаниям анализа.

На самом деле первая глава книги [Davis, 1977a] посвящена тому, как расширить стандартный «универсум» (это слово имеет специфический технический смысл) до нестандартного. Подводя итог в конце этой главы, Дейвис замечает, что очень многое из техники, развитой к этому моменту, не играет роли в остальной части книги; и подытоживая, какие ключевые моменты должен иметь в виду читатель, Дейвис выделяет три основных инструмента нестандартного анализа: *принцип переноса*, *принцип согласованности* и *внутренние множества*. Рассматривая тщательно разработанную конструкцию, стоявшую в центре его внимания на более чем сорока страницах — конструкцию так называемых *ультрафильтров*, — он заключает: «Читатель, помнящий эти ключевые пункты, справится с последующим. В частности, теперь будет вполне правильно забыть полностью, как определялся нестандартный универсум, и изгнать ультрафильтры из нашего сознания».

§ 6. История и философия информатики

Дейвис не только прожил значительную часть ранней истории компьютеров и информатики, ведя исследования вместе с Постом и Чёрчем, — он был глубоко озабочен тем, чтобы сохранить эту историю и сделать её доступной студентам с разным уровнем математической подготовки. Книга «Неразрешимое» (The Undecidable) [Davis, 1965], упомянутая выше, содержала две неопубликованные статьи, а именно принстонские лекции Гёделя «О неразрешимых предложениях в формальных математических системах» (On undecidable propositions of formal mathematical systems) и статью Поста «Обзор предвосхищения». Кроме того, книга включала пятнадцать других опубликованных ранее статей, принадлежавших первопроходцам теории вычислимости: их авторами были Алонзо Чёрч, Стивен К. Клини, Дж. Баркли Россер и Алан М. Тьюринг, публиковались также другие статьи Гёделя и Поста. Каждый из семнадцати текстов сопровождался краткой вводной заметкой, вписывавшей его в ландшафт ранней теории вычислений. Такие вводные заметки успешно освещали этот интеллектуальный ландшафт для широкой аудитории. Как отмечено выше, Дейвис позже редактировал собрание трудов Поста, для которого написал расширенное биографическое введение — свидетельство уважения и восхищения Дейвиса по отношению к своему учителю.

Вклад Дейвиса в историю информатики не ограничивался «лишь» редактированием важных документов, но включал и научные статьи на темы, отражавшие его глубокий интерес к логическим основаниям и становлению информатики. Получившийся ряд статей включает в том числе «Почему у Гёделя не было тезиса Чёрча» (Why Gödel didn't have Church's thesis) [Davis, 1982]. Сердцевину этого исследования составляют важнейшие вопросы, относящиеся к ранней истории так называемого «тезиса Чёрча — Тьюринга»[15]. Как объясняет Дейвис, мотивом этого исследования послужила работа Клини [Kleene, 1981] о происхождении понятия рекурсивной функции, а также более философская работа Уэбба [Webb, 1980] о следствиях «тезиса Чёрча — Тьюринга» для вопросов, связанных с механицизмом и ментализмом. С помощью исторических документов и личных писем Дейвис выяснил, почему Гёдель колебался относительно тезиса, подобного тезису Чёрча, тогда как Чёрч «хотел идти вперёд»[16]. При этом Дейвис тщательно различает тезисы Чёрча, Гёделя, Клини, Поста и Тьюринга и проводит весьма нужные разграничения, исторические и концептуальные, которые касаются так называемого «тезиса Чёрча — Тьюринга». Реконструируя формулировки этих различающихся тезисов,

[15] Мы говорим «так называемого», поскольку в истории нет такого объекта, как тезис Чёрча — Тьюринга, ср. сноску 5. В своей книге [Kleene, 1952] Клини посвятил два параграфа глубокому обсуждению тезиса Чёрча и тезиса Тьюринга по отдельности.

[16] Зиг в статье [Sieg 1997], имея доступ к дополнительным документам, показал, что Чёрч вначале также сильно колебался.

Дейвис также описывает, как Пост предвосхитил результаты Чёрча, Гёделя и Тьюринга в начале 1920-х годов[17]. Эта статья остаётся классикой для каждого, кто занимается ранней историей «тезиса Чёрча — Тьюринга».

Работая над историей «чистой» теории вычислимости, Дейвис активно писал о значении логики для появления информатики и современных компьютеров. Первая публикация на эти темы — его статья «Математическая логика и появление современных компьютеров» (Mathematical logic and the origin of modern computers) [Davis, 1991]. Пожалуй, наиболее известна его книга «Универсальный компьютер: дорога от Лейбница к Тьюрингу» (The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing) [Davis, 2000], опубликованная в 2000 г. Новый вариант вышел из печати в 2012 г., к столетию Тьюринга. В этой книге Дейвис вписывает историю современных компьютеров в гораздо более долгую историю логики и математики, возвращаясь к идеям Лейбница о *characteristica universalis* и *calculus ratiocinator* (о «всеобщей характеристике» и «рационализаторе вычислений»). Исходя из этого, он излагает историю логики и математики, приводящую к работам Гёделя и Тьюринга, и показывает, что логика и информатика — *две стороны одной медали* (two sides of the same coin) [Davis, 2000, p. 200]. Затем Дейвис показывает, что этот исторический путь от Лейбница до Тьюринга создал основу для современной вычислительной техники. Тема влияния логики на вычисления, включая значение работ Тьюринга в этом контексте, трудна и весьма дискуссионна для специалистов по информатике и её истории; издание Дейвиса 2012 г. тоже не избежало этих дебатов[18].

Однако работа Дейвиса должна рассматриваться и в её специфическом контексте: когда Дейвис начал писать на эти темы, это была

[17] Читатель может сравнить эту статью со статьёй Р. Ганди «Слияние идей в 1936 г». (The confluence of ideas in 1936) [Gandy, 1988]. Дейвис и Зиг отсылали к её заглавию, подчёркивая в своей статье [Davis, Sieg, 2015] замечательную концептуальную близость работ Поста и Тьюринга.

[18] Значение работы Тьюринга 1936 г. для реального проектирования и постройки первых компьютеров спорно; в основном историки согласны, что Тьюринг, самое большее, — один из многих, внёсших вклад в этот процесс. Как показано в статье [de Mol et al., 2018], понятие машины Тьюринга было принято в качестве модели современных компьютеров лишь в начале 1950-х годов. — В статье [Mahoney, 1988] тесные связи логики с информатикой отошли на задний план за счёт подчёркивания других важных аспектов. Описание этих связей Дейвисом критиковалось, например, в заметке [Daylight, 2014].

одна из немногих публикаций по истории вопроса. На работу Дейвиса сильно повлиял его собственный опыт логика, рано познакомившегося с программированием, причём его работы по автоматическому доказательству теорем позже считались в информатике фундаментальными. Эта работа даёт пример подхода специалиста по информатике, который обучался как логик и обнаружил, что его работу можно отнести к области, не существовавшей во время его обучения.

Мы уже обсуждали в § 2, что Дейвис был твёрдо уверен в правильности анализа вычислимости, проведённого Тьюрингом и Постом. Действительно, Дейвис открыто признавал, что является механицистом и соответственно убеждён, что человеческий мозг не может преодолеть неполноту [Jackson, 2008; Davis, 2016b]. Такая методологическая и философская позиция сделала его откровенным критиком «сверхвычислимости» (hypercomputability), как её формулировали, в частности, Коупленд [Copeland, 2000] и Зигельманн [Siegelmann, 1999]. Они считали различные варианты тезиса Чёрча — Тьюринга ложными, поскольку строили «физически реализуемые» модели, которые могут «вычислить» больше, чем машины Тьюринга. Дейвис критиковал эти работы по многим поводам, приводя концептуальные и исторические аргументы, но избегая догматизма[19)]. Среди прочего он отмечал, что такой «результат» можно получить лишь при нарушении условий конечности, существенных в анализе Тьюринга. Ясно понимая это ограничение, Дейвис был открыт к возможности другого, расширенного понятия «вычислимости». В одной из своих заметок о сверхвычислениях он пишет: «Можно ли полностью исключить возможность дальнейшего развития, ведущего к физической реализации невычислимой величины? Разумеется, нет […]» [Davis, 2004, p. 206].

Когда были подняты вопросы типа «является ли мозг компьютером» и «алгоритмично ли человеческое мышление», Дейвис занял столь же открытую позицию. Например, Роджер Пенроуз доказывал в двух книгах [Penrose, 1989; 1994], что из теоремы Гёделя о неполноте вытекает, что человеческий разум не может быть компьютером. Дейвис опроверг утверждения Пенроуза ясными техническими аргументами. Он сделал это в двух коротких статьях [Davis, 1990; 1993b]. В первой он заключает: «Несомненно, есть место для разногласий, алгоритмичны ли процессы развития и признания математических (и физических) теорий. Но теорема Гёделя не может внести в эту дискуссию ничего решающего». Дейвис в этих статьях раскрывается

[19)] См., например, [Davis, 2004; Davis, 2006].

как автор, который не может поддержать утверждения, по его мнению ложные или плохо обоснованные, но также и как мыслитель, осторожный в вопросах, которые не решаются только доказательством. В таком контексте он часто упоминал эмпирический или индуктивный подход. Такой подход развивается в, быть может, самой философской работе Дейвиса. Там становится ясно, как антидогматизм Дейвиса переплетается с этим более эмпирическим взглядом на математическую практику, — например, когда он пишет [Davis, 2016b]:

> Мы изучаем простые, чёткие миры, которые отличаются от населённого нами как своей разительной простотой, так и своей открытостью в бесконечность. Это лишь эмпирический факт, что мы способны получать, по-видимому, достоверную и объективную информацию о таких мирах. И потому надо отбросить всякие иллюзии, что это знание бесспорно. [...] Если появится доказательство, что арифметика Пеано противоречива или даже что некое огромное натуральное число не является суммой четырёх квадратов, я буду очень и очень скептичен. Но я не скажу, что знаю, что такое доказательство обязательно неверно.

Именно антидогматизм Дейвиса определил его более «неконвенционалистскую» позицию по проблеме P–NP. Он не раз заявлял[20], что с его точки зрения нет *убедительных* эвристических свидетельств, что $P \neq NP$.

В книге «Универсальный компьютер» (The Universal Computer) [Davis, 2000] история теории вычислимости более не сводится к истории теории рекурсии. Напротив, эта тема связывается с проницательными вопросами и утверждениями Лейбница, с проблемами оснований математики XIX – начала XX столетий, а также с современными вопросами компьютерных технологий, когнитивной психологии и психологии сознания. Цель Дейвиса была не только в том, чтобы дать ясное нетехническое изложение развития теории вычислимости и её главных результатов, но и в описании их широкого влияния на современную мысль. Быть может, ещё важнее, что Дейвис хотел выявить, как логика, глубоко погружённая в философию, формулирует проблемы оснований и рассматривает их в поистине революционной перспективе. В конце введения к книге Дейвис писал: «Ныне, когда компьютерные технологии развиваются с такой захватывающей скоростью, когда мы восхищаемся поистине замечательными достижениями инженеров,

[20] См., например, [Jackson, 2008].

слишком легко забыть о логиках, чьи идеи сделали всё это возможным. Эта книга рассказывает их историю». Нам ясно, что работы Дейвиса сделали его неотъемлемой частью «их истории» — глубоко укоренённой в пересечении философии, математики и информатики.

Список литературы

Adleman, L., and K. Manders [1976]: ‘Diophantine complexity’. В кн.: 17th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, pp. 81–88. New York: IEEE.
DOI: https://doi.org/10.1109/SFCS.1976.13.

Alpöge, L., M. Bhargava, W. Ho, and A. Shnidman [2025]: ’Rank stability in quadratic extensions and Hilbert’s tenth problem for the ring of integers of a number field’.
DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2501.18774.

A. Biere, M. Heule, H. van Maaren, and T. Walsh, eds [2021]: Handbook of Satisfiability. Frontiers in Artificial Intelligence and Applications; 336. 2nd ed. Amsterdam: IOS Press. DOI: https://doi.org/10.3233/FAIA336.

Blass, A. [1978]: Review of Martin Davis, Applied Nonstandard Analysis, K. D. Stroyan and W. A. J. Luxemburg, Introduction to the Theory of Infinitesimals, and H. Jerome Keisler, Foundations of Infinitesimal Calculus, Bull. AMS 84, 34–41. Available at https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183540371. Accessed June 2025.

Blum, M. [1967]: ‘A machine-independent theory of the complexity of recursive functions’, Journal ACM 14, 322–336.
DOI: https://doi.org/10.1145/321386.321395. Русский перевод: *Блюм М.* Машинно-независимая теория сложности рекурсивных функций // Проблемы математической логики. М.: Мир, 1970. С. 401–422.

Calvert, W., V. Harizanov, E. G. Omodeo, A. Policriti, and A. Shlapentokh [2024]: ‘In memory of Martin Davis’, Notices AMS 71. (Препринт с обширной библиографией доступен на
https://arxiv.org/pdf/2401.10154.) DOI: https://doi.org/10.1090/noti2982.

Cantone, D., E. G. Omodeo, and A. Policriti [2016]: ‘Banishing ultrafilters from our consciousness’, in [Omodeo and Policriti, 2016], pp. 255–283.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-41842-1 10.

Chinlund, T. J., M. Davis, P. G. Hinman, and M. D. McIlroy [1964]: ‘Theorem-proving by matching’, Technical report, Murray Hill, N.J.: Bell Telephone Laboratories, Inc.

Copeland, B. J. [2000]: ‘Narrow versus wide mechanism: Including a re-examination of Turing’s views on the mind-machine issue’, Journal of Philosophy

97, 5–32. Доступно на https://www.jstor.org/stable/2678472. Доступ с июня 2025.

Davis, M. [1950a]: 'Arithmetical problems and recursively enumerable predicates' (abstract), J. Symbolic Logic 15, 77–78.

Davis, M. [1950b]: On the Theory of Recursive Unsolvability. PhD thesis, Princeton University.

Davis, M. [1952]: 'Relatively recursive functions and the extended Kleene hierarchy' (abstract). В кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, (Harvard University, Cambridge, MA, August 30-September 6, 1950), Vol. 1, p. 723. Providence, R.I.: AMS.

Davis, M. [1953]: 'Arithmetical problems and recursively enumerable predicates', J. Symbolic Logic 18, 33–41. Русский перевод: Математика, 1964, с. 15–22.

Davis, M. [1958]: Computability and Unsolvability. New York: McGraw-Hill. Reprinted with an additional appendix, Dover, 1983. Итальянский перевод: [Davis, 1975]. Японский перевод: [Davis, 1966].

Davis, M. [1963]: 'Eliminating the irrelevant from mechanical proofs', Proc. Symp. Appl. Math. 15, 15–30. (Перепечатка: [Siekmann and Wrightson, 1983], pp. 315–330; Русский перевод: [Kib, 1970], с. 160–179.)

Davis, M., ed. [1965]: The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions. Hewlett, N.Y.: Raven Press.

Davis, M. [1966]: Theory of Computation. Iwanami, Tokio: Modern Science Selection. Японский перевод книги [Davis, 1958]. Shigeru Watanabe, trans.

Davis, M. [1968]: 'One equation to rule them all', Transactions of the New York Academy of Sciences (2) 30, 766–773.

Davis, M. [1971]: 'An explicit Diophantine definition of the exponential function', Comm. Pure Appl. Math. 24, 137–145.

Davis, M. [1972]: 'On the number of solutions of Diophantine equations', Proc. AMS 35, 552–554.

Davis, M. [1973a]: 'Hilbert's tenth problem is unsolvable', Amer. Math. Monthly 80, 233–269. Перепечатано с исправлениями как Appendix 2 в издательстве Dover в книге Computability and Unsolvability [Davis, 1958], pp. 199–235 (1983 ed.).

Davis, M. [1973b]: 'Speed-up theorems and Diophantine equations'. В кн.: R. Rustin, ed., Courant Computer Science Symposium 7: Computational Complexity, pp. 87–95. New York: Algorithmics Press.

Davis, M. [1975]: Computabilit'a e Insolubilit'a Introduzione alla teoria della computabilit' a e alla teoria delle funzioni ricorsive. Rome: Collana di Epistemologia diretta da Evandro Agazzi. Edizioni Abete. Итальянский перевод книги [Davis, 1958]; предисловие Mariano Bianca, ed.

Davis, M. [1977a]: Applied Nonstandard Analysis. John Wiley & Sons, Inc. Reprinted with corrections, Dover, 2005. Русский перевод: М.: Мир, 1980. Японский перевод: 1977.

Davis, M. [1977b]: 'Unsolvable problems'. В кн.: J. Barwise, ed., Handbook of Mathematical Logic, pp. 567–594. Amsterdam: North-Holland.

Davis, M. [1980]: 'The mathematics of non-monotonic reasoning', Artif. Intell. 13, 73–80.

Davis, M. [1981]: 'Obvious logical inferences'. В кн.: Proceedings of the 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence. Vol. 1, pp. 530–531. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers Inc.

Davis, M. [1982]: 'Why Gödel didn't have Church's thesis', Information and Control 54, 3–24.

Davis, M. [1983]: 'The prehistory and early history of Automated Deduction'. В кн.: [Siekmann and Wrightson, 1983], pp. 1–28.

Davis, M. [1990]: 'Is mathematical insight algorithmic?', Behavioral and Brain Sciences 13, 659–660. DOI: https://doi.org/10.1017/S0140525X00031915.

Davis, M. [1991]: 'Mathematical logic and the origin of modern computers'. В кн.: R. Herken, ed., The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey, pp. 149–175. Oxford University Press.
DOI: https://doi.org/10.1093/oso/9780198537748.003.0005.

Davis, M. [1993a]: Foreword to the English translation of [Matiyasevich, 1993], pp. xiii–xvii. Cambridge, Mass.: MIT Press. Воспроизведено с небольшими изменениями под названием 'The collaboration in the United States': [Reid, 1996], pp. 91–97. В русском переводе: [Rid, 2023], с. 109–115.

Davis, M. [1993b]: 'How subtle is Gödel's theorem? More on Roger Penrose', Behavioral and Brain Sciences 16, 611–612.
DOI: https://doi.org/10.1017/S0140525X00031915.

Davis, M. [1994]: 'Emil L. Post: His life and work'. В кн.: M. Davis, ed., Solvability, Provability, Definability: The Collected Works of Emil L. Post, pp. xi-xxviii. Birkhäuser.

Davis, M. [1999]: 'From logic to computer science and back'. В кн.: C. S. Calude, ed., People and Ideas in Theoretical Computer Science: Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, pp. 53–85. Springer.

Davis, M. [2000]: The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing. Первое издание, New York: Norton. Turing Centenary Edition, CRC Press, 2012. Третье издание, 2018, DOI: https://doi.org/10.1201/9781315144726.

Davis, M. [2004]: 'The myth of hypercomputation'. В кн.: C. Teuscher, ed., Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker, pp. 195–211. Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-05642-4 8.

Davis, M. [2006]: ‘Why there is no such discipline as hypercomputation’, Appl. Math. Comput. 178, 4–7. (Special issue on Hypercomputation, F. A. Doria and J. F. Costa, eds). DOI: https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.09.066.

Davis, M. [2010a]: ‘Representation theorems for r.e. sets and a conjecture related to Poonen’s large subring of Q’. Записки научных семинаров Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ) 377, 50–54. Воспроизведено как [Davis, 2010b].

Davis, M. [2010b]: ‘Representation theorems for recursively enumerable sets and a conjecture related to Poonen’s large subring of Q’, J. Math. Sci. (N.Y.) 171, 728–730. Перепечатка статьи [Davis, 2010a].

Davis, M. [2016a]: ‘My life as a logician. В кн.: [Omodeo and Policriti, 2016], pp. 1–33. (Пересмотренная и расширенная версия статьи [Davis, 1999]). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-41842-1 1.

Davis, M. [2016b]: ‘Pragmatic Platonism’. В кн.: [Omodeo and Policriti, 2016], pp. 349–356. (Originally published at: https://foundationaladventures.files.wordpress.com/ 2012/01/platonic.pdf.) DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-41842-1 14.

Davis, M. [2020]: ‘Seventy years of computer science’. В кн.: A. Blass, P. Cégielski, N. Dershowitz, M. Droste, and B. Finkbeiner, eds, Fields of Logic and Computation III — Essays Dedicated to Yuri Gurevich on the Occasion of His 80th Birthday, pp. 105–117. Lecture Notes in Computer Science; 12180. Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-48006-6 8.

Davis, M., and R. Fechter [1991]: ‘A free variable version of the first-order predicate calculus’, J. Logic Comput. 1, 431–451.

Davis, M., and R. Hersh [1972]: ‘Nonstandard analysis’, Scientific American 226, 78–86.

Davis, M., and H. Putnam [1958a]: ‘Reductions of Hilbert’s tenth problem’, J. Symbolic Logic 23, 183–187. Русский перевод: Математика, 1964, с. 49–53.

Davis, M., and H. Putnam [1958b]: ‘Feasible computational methods in the propositional calculus’, Technical report. Troy, N.Y.: Rensselaer Polytechnic Institute, Research Division. Перепечатка: [Omodeo and Policriti, 2016], pp. 373–408. Доступно на https://link.springer.com/content/pdf/bbm:978-3-319-41842-1/1. Доступ с июля 2025.

Davis, M., and H. Putnam [1959]: ‘A computational proof procedure; Axioms for number theory; Research on Hilbert’s Tenth Problem’, Technical Report AFOSR TR59–124. U.S. Air Force. Reprinted in [Omodeo and Policriti, 2016], pp. 411–430. Доступно на https://link. springer.com/content/pdf/bbm:978-3-319-41842-1/1. Доступ с июля 2025.

Davis, M., and H. Putnam [1960]: ‘A computing procedure for quantification theory’, Journal ACM 7, 201–215. Препринт: [Davis and Putnam, 1959], Part I; перепечатка: [Siekmann and Wrightson, 1983], pp. 125–139.

Davis, M., and J. T. Schwartz [1979]: 'Metamathematical extensibility for theorem verifiers and proof-checkers', Comput. Math. Appl. 5, 217–230.

Davis, M., and W. Sieg [2015]: 'Conceptual confluence in 1936: Post and Turing'. В кн.: G. Sommaruga and T. Strahm, eds, Turing's Revolution: The Impact of His Ideas about Computability, pp. 3–27. Birkhäuser.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-22156-4 1.

Davis, M., and E. J. Weyuker [1983]: Computability, Complexity, and Languages. Fundamentals of Theoretical Computer Science. Computer science and applied mathematics. Academic Press.

Davis, M., G. Logemann, and D. W. Loveland [1961a]: 'A machine program for theorem-proving', Technical Report AFOSR 819, IMM-NYU288. New York: Institute of Mathematical Sciences, New York University.

Davis, M., G. Logemann, and D. W. Loveland [1962]: 'A machine program for theorem-proving', Commun. ACM 5, 394–397. (Перепечатка: [Siekmann and Wrightson, 1983], pp. 267–270.) DOI: https://doi.org/10.1145/368273.368557.

Davis, M., H. Putnam, and J. Robinson [1961b]: 'The decision problem for exponential Diophantine equations', Ann. of Math. (2) 74, 425–436. (Перепечатка: [Robinson, 1996], pp. 77–88. Russian transl. in [Matematika, 1964], pp. 69–79.) DOI: https://doi.org/10.2307/1970289.

Davis, M., Y. Matijasevič, and J. Robinson [1976]: 'Hilbert's tenth problem. Diophantine equations: positive aspects of a negative solution', in F. E. Browder, ed., Mathematical Developments Arising From Hilbert Problems, pp. 323–354, 357–358, 355–356, 359–378 (читать в таком порядке). Proc. Sympos. Pure Math.; 28. Providence, R.I.: AMS. Перепечатка: [Robinson, 1996], pp. 269 ff.

Davis, M., R. Sigal, and E. J. Weyuker [1994]: Computability, Complexity, and Languages. Fundamentals of Theoretical Computer Science. Computer Science and Scientific Computing. 2nd ed. Academic Press.

Daylight, E. G. [2014]: 'A Turing tale', Commun. ACM 57, No. 10, 36–38. DOI: https://doi.org/10.1145/2629499.

De Mol, L., B. Maarten, and E. G. Daylight [2018]: 'Less is more in the fifties: Encounters between logical minimalism and computer design during the 1950s', IEEE Ann. of the Hist. of Comput. 40, 19–45.
DOI: https://doi.org/10.1109/MAHC.2018.012171265.

Gandy, R. [1988]: 'The confluence of ideas in 1936', in R. Herken, ed., The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey, pp. 55–111. Oxford University Press. DOI: https://doi.org/10.1093/oso/9780198537748.003.0003. Gilmore, P.C. [1960]: 'A proof method for quantification theory: Its justification and realization', IBM Journal of Research and Development 4, 28–35.
DOI: https://doi.org/10.1147/rd.41.0028.

Green, B., and T. Tao [2008]: 'The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions', Ann. of Math. (2) 167, 481–547.
DOI: https://doi.org/10.4007/annals.2008.167.481.

Hilbert, D. [1900]: ‘Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900’, Nachrichten von der Konigliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 253–297. (Английский перевод: [Hilbert, 1901–1902]). Русский перевод: Гильберт Д. ‘Математические проблемы. Доклад, прочитанный 8 августа 1900 г. на II Международном Конгрессе математиков в Париже’. В кн.: Проблемы Гильберта. М.: Наука. 1969.

Hilbert, D. [1901-1902]: ‘Mathematical Problems. Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900’, Bull. AMS 8, 437–479.

Jackson, A. [2008]: ‘Interview with Martin Davis’, Notices AMS 55, 560–571. DOI: https://doi.org/10.1090/noti457.

Kib [1970]: Кибернетический сборник (н.с.) 7. М.: Мир.

Kleene, S. C. [1952]: Introduction to Metamathematics. Groningen: Noordhoff N. V. Русский перевод: Клини С. К. Введение в метаматематику. М.: Мир. 1973.

Kleene, S. C. [1981]: ‘Origins of recursive function theory’, IEEE Ann. Hist. Comput. 3, 52–67. DOI: https://doi.org/10.1109/MAHC.1981.10004.

Koymans, P., and C. Pagano [2024]: ‘Hilbert’s tenth problem via additive combinatorics’. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2412.01768.

Loveland, D., S. Ashish, and B. Selman [2016]: ‘DPLL: The core of modern satisfiability solvers’, in [Omodeo and Policriti, 2016], pp. 315–335.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-41842-1 12.

Mahoney, M. S. [1988]: ‘The history of computing in the history of technology’, Ann. Hist. Comput. 10, 113–125.

Maltsev [1968]: Мальцев А. И. ‘О некоторых пограничных вопросах алгебры и логики’. — В кн.: Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966). М.: Мир, 1968, с. 217–231.

Martin-Löf, P. [1970]: Notes on Constructive Mathematics. Stockholm: Almqvist & Wikseil.

Matematika [1964]: Математика 8. Moscow: Mir.

Matiyasevich [1970]: Матиясевич Ю. В. ‘Диофантовость перечислимых множеств’, Доклады Академии наук СССР 191, 279–282. Английский перевод А. Духовского: Ju. V. Matijasevič, ‘Enumerable sets are Diophantine’, Soviet Math. Doklady 11, 354–358; Correction, ibid. 11, vi (for 1970, pub. 1971). (Перепечатка перевода: [Sacks, 2003], pp. 269–273).

Matiyasevich [1993]: Матиясевич Ю. В. Десятая проблема Гильберта. М.: Наука. Английский перевод: Hilbert’s Tenth Problem. Cambridge, Mass.: MIT Press. Французский перевод: Le dixième Problème de Hilbert: Son indécidabilité, Paris: Masson. Греческий перевод: To dekato provlima tou Hilbert, Athens: Euryalos, 2022. https://logic.pdmi.ras.ru/ yumat/H10Pbook/. Доступ с июля 2025.

Moschovakis, Y. N. [2016]: ‘Hyperarithmetical sets’. В кн.: [Omodeo and Policriti, 2016], pp. 107–149. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-41842-15.

Murty, M. R., and B. Fodden [2019]: Hilbert’s Tenth Problem. An Introduction to Logic, Number Theory, and Computability. Stud. Math. Libr.; 88 Providence, R.I.: AMS. DOI: https://doi.org/10.1090/stml/088.

Omodeo, E. G. [1982]: ‘The linked conjunct method for automatic deduction and related search techniques’, Comput. Math. Appl. 8, 185–203.

Omodeo, E. G., and A. Policriti, eds. Martin Davis on Computability, Computational Logic, and Mathematical Foundations. Outstanding Contributions to Logic; 10. Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-41842-1.

Penrose, R. [1989]: The Emperor’s New Mind: Concerning Computers, Minds and the Laws of Physics. Oxford University Press. Русский перевод: *Пенроуз Р.* Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики / Пер. с англ. под общ. ред. В. О. Малышенко. 4-е изд. М.: УРСС, ЛКИ, 2011. (Синергетика: от прошлого к будущему).

Penrose, R. [1994]: Shadows of the Mind: A Search for the Missing Science of Consciousness. Oxford University Press. Русский перевод: *Пенроуз Р.* Тени разума. В поисках науки о сознании / Пер. с англ. А. Р. Логунова, Н. А. Зубченко. М.; Ижевск: ИКИ, 2011.

Post, E. L. [1943]: ‘Formal reductions of the general combinatorial decision problem’, Amer. J. Math. 65, 197–215.

Post, E. L. + [1944]: ‘Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems’, Bull. AMS 50, 284–316.

Prawitz, D., H. Prawitz, and N. Voghera [1960]: ‘A mechanical proof procedure and its realization in an electronic computer’, Journal ACM 7, 102–128.

Reid, C. [1996]: Julia: A Life in Mathematics. Washington, D.C.: Mathematical Association of America. With contributions by L. Gaal, M. Davis, and Yu. Matijasevich. Русский перевод: [Rid, 2023].

Rid, K. [2023]: Джулия. Жизнь в математике. СПб: Образовательные проекты. Перевод книги [Reid, 1996].

Robinson, J. [1996]: The Collected Works of Julia Robinson. Vol. 6. With an introduction by Constance Reid. Edited and with a foreword by Solomon Feferman. Providence, R.I.: AMS.

Robinson, R. M. [1956]: ‘Arithmetical representation of recursively enumerable sets’, J. Symbolic Logic 21, 162–186. DOI: https://doi.org/10.2307/2269027.

G. E., Sacks, ed. [2003]: Mathematical Logic in the 20th Century. Singapore: Singapore University Press. River Edge, N.J.: World Scientific Publishing Co.

Sieg, W. [1997]: Step by recursive step: Church’s analysis of effective calculability’, Bull. Symbolic Logic 3, 154–180. DOI: https://doi.org/10.2307/421012.

Siegelmann, H. T. [1999]: Neural networks and analog computation: Beyond the Turing limit. Progress in theoretical computer science. Birkhäuser.

Siekmann, J., and G. Wrightson, eds. [1983]: Automation of Reasoning 1: Classical Papers on Computational Logic 1957–1966. Springer.

Tseitin [1964]: Цейтин Г. С. ‘Один способ изложения теории алгорифмов и перечислимых множеств’, Тр. МИАН СССР, 72 (1964), 69–98. Английский перевод В кн.: Five Papers on Logic and Foundations by G. S. Ceitin, N. N. Vorob’ev, A. V. Idel’son, I. D. Zaslavskii, and N. A. Sanin, pp. 1–39. AMS Translations, Series II; 99. Providence, R.I.: AMS, 1972.
DOI: https://doi.org/10.1090/trans2/099.

Turing, A. M. [1937]: ‘On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem’, Proc. London Math. Soc. (2) 42, 230–265.
DOI: https://doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.230. Correction, ibid. 43 (1938), 544–546. DOI: https://doi.org/10.1112/plms/s2-43.6.544.

Turing, A. M. [1950]: ‘The word problem in semi-groups with cancellation’, Ann. of Math. (2) 52, 491–505. DOI: https://doi.org/10.2307/1969481.

Turing, A. M. [1954]: ‘Solvable and unsolvable problems’, Science News (Penguin Press) 31, 7–23. Перепечатка с введением:
DOI: https://doi.org/10.1093/oso/9780198250791.003.0024.

Wang, H. [1960]: ‘Toward mechanical mathematics’, IBM Journal of Research and Development 4, 2–22. DOI: https://doi.org/10.1147/rd.41.0002.

Webb, J. C. [1980]: Mechanism, Mentalism and Metamathematics. Dordecht: Reidel.

Yarmush, D. L. [1976]: ‘The linked conjunct and other algorithms for mechanical theorem-proving’. Technical Report IMM 412. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University.