О замощениях правильного треугольника ромбиками

М. М. Плотникова

Статья посвящена решению задачи 35.10 из задачника «Математического просвещения». Автор выражает благодарность Павлу Витальевичу Бибикову, заведующему кафедрой математики Лицея «Вторая школа» им. В. Ф. Овчинникова, за значимую помощь в написании и оформлении статьи.

Задача (IMO Shortlist, 2006, C6). Есть правильный треугольник со стороной n, разбитый на маленькие правильные треугольнички со стороной 1, причём в этом треугольнике есть n верхнетреугольных дырок размера 1. Докажите, что его можно замостить ромбиками со стороной 1, если и только если выполнено следующее условие: для любого $k \leqslant n$ каждый правильный треугольник с вершиной вверх и со стороной k содержит не более k дырок.

Решение. Для удобства введём несколько определений (рис. 1):

- будем называть треугольник *верхним*, если его вершина находится выше основания, и *нижним*, если ниже;
- треугольник со стороной 1 назовём *треугольничком*;
- будем называть верхний и нижний треугольнички *смежными*, если у них есть общая сторона; верхний треугольничек, лежащий над смежным с ним нижним, назовём *шапочкой*, а лежащий слева или справа — *боковым*;
- два нижних треугольничка назовём *соседними*, если у них есть общая вершина;
- будем называть множество нижних треугольничков *связным*, если в нём от любого треугольничка можно добраться до любого другого, переходя по соседним треугольничкам;

Статья написана в период обучения автора в Лицее «Вторая школа» им. В. Ф. Овчинникова.

Рассмотрим двудольный граф, где вершинами верхней доли являются верхние треугольнички, а вершинами нижней доли — нижние треугольнички. Рёбрами будем соединять вершины, соответствующие смежным треугольничкам. Заметим, что вершин в долях поровну, поэтому, если на этом графе существует максимальное паросочетание, то, взяв смежные треугольнички, соединённые ребром из этого паросочетания, мы получим искомый набор ромбиков замощения.

Для доказательства существования максимального паросочетания проверим условие леммы Холла. Для этого возьмём произвольное множество N из k нижних треугольничков и проверим, что с ними смежны не менее k верхних треугольничков. Прежде всего разобьём множество N на компоненты связности: $N = N_1 \cup N_2 \cup \ldots$, где множества $N_1, N_2, \ldots$ нижних треугольничков являются связными. Ясно, что верхние треугольнички не могут быть смежными с нижними треугольничками из разных множеств $N_1, N_2, \ldots$ Поэтому достаточно проверить условие леммы Холла для произвольного связного множества нижних треугольничков (рис. 1).

Итак, выберем связное множество N из k нижних треугольничков и докажем, что они смежны с не менее чем k верхними треугольничками. Для этого рассмотрим минимальный по включению верхний треугольник T, целиком содержащий множество N. Пусть этот треугольник имеет сторону длины m. Временно заклеим возможные дырки в нём и докажем, что тогда нижние треугольнички из множества N смежны не менее чем с $k+m$ верхними треугольничками из T.

Сначала найдём k смежных верхних треугольничков для множества N. Для этого просто отметим над каждым нижним треугольничком из N его шапочку. Ясно, что эти k верхних треугольничков попарно различны.

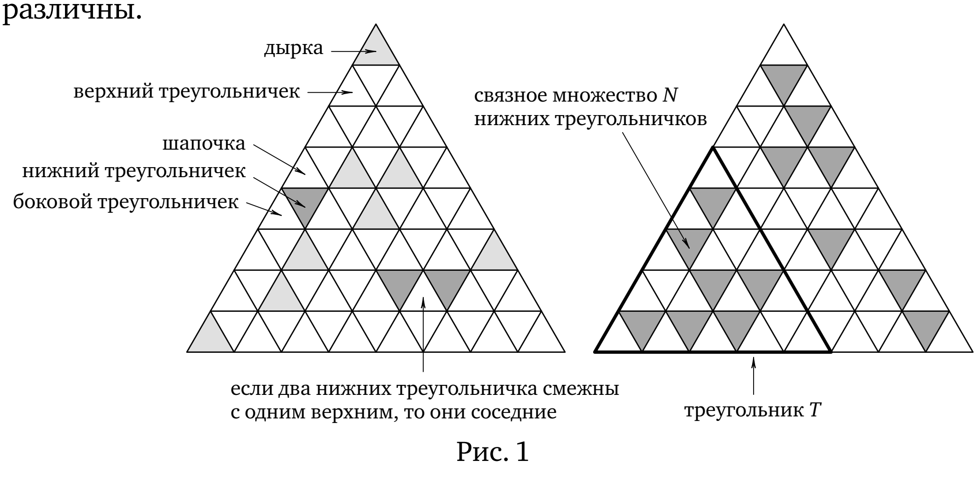

Рис. 1

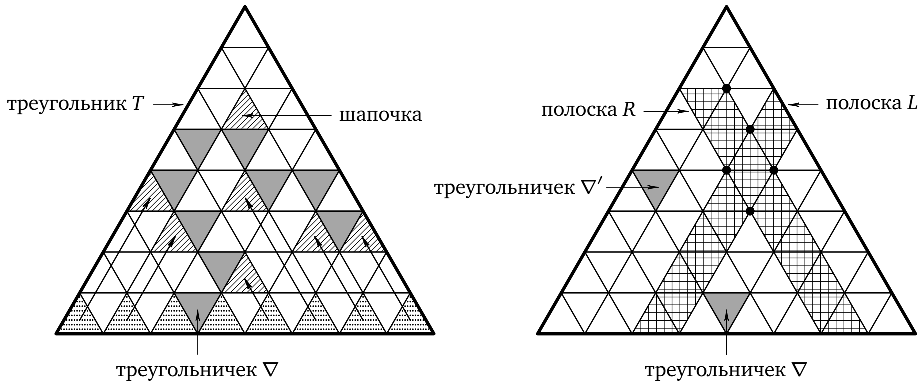

Рис. 2

Теперь найдём ещё m смежных верхних треугольничков. Для этого поступим так. Рассмотрим нижнюю строку треугольника T и будем сдвигать верхние треугольнички из этой строки по линиям, параллельным боковым сторонам T, пока каждый из них не станет смежным с каким-то нижним треугольничком из N. Сдвиги мы будем производить по следующему правилу. Выберем в нижней строке произвольный нижний треугольничек $\nabla \in N$ (такой существует, иначе треугольник T можно уменьшить, отрезав от него нижнюю сторону). Теперь все верхние треугольнички, лежащие левее ∇, будем двигать направо и вверх, а все верхние треугольнички, лежащие правее ∇, будем двигать налево и вверх. Остановим эти сдвиги в тот момент, когда сдвигаемый верхний треугольничек впервые станет смежен с каким-то нижним треугольничком из множества N (рис. 2).

Мы утверждаем следующее:

1) в результате таких сдвигов каждый верхний треугольничек станет смежен с каким-то нижним треугольничком из N;
2) эти верхние треугольнички не совпадают с уже выбранными нами k шапочками;
3) эти верхние треугольнички не совпадают между собой.

Если мы докажем эти три факта, то отсюда будет следовать существование $k+m$ смежных верхних треугольничков для k нижних треугольничков из связного множества N. Докажем последовательно эти факты.

1) Предположим, что существует полоска L, лежащая левее треугольничка ∇, в которой нет треугольничков из N. Если эта полоска является левой стороной треугольника T, то её можно отрезать, уменьшив треугольник T, что противоречит его минимальности. Значит, полоска L разделяет левую сторону треугольника T, в которой лежит

некоторый треугольничек $\nabla' \in N$, и данный треугольничек ∇. Получается, что множество N разделяется полоской L на две не связанные части — противоречие. Таким образом, в любой полоске, лежащей левее ∇, найдётся нижний треугольничек из N. Поэтому можно так сдвинуть верхний треугольничек, являющийся основанием этой полоски, чтобы он стал смежным с этим нижним треугольничком. Аналогично проводится доказательство для полосок, лежащих правее ∇ (рис. 2).

2) Из конструкции п. 1) ясно, что в результате сдвига верхние треугольнички, смежные с нижними треугольничками из N, станут боковыми, а значит, поскольку остановка сдвига происходит в самый первый момент смежности, они никогда не смогут стать шапочками.

3) Ясно, что верхние треугольнички, лежащие слева от ∇, не смогут совпасть, поскольку сдвигаются по параллельным направлениям. Аналогично не смогут совпасть два верхних треугольничка, лежащие правее ∇. Предположим, что совпали два верхних треугольничка, которые двигались навстречу друг другу. Тогда полоски L и R, по которым двигались верхние треугольнички до своего совпадения, не содержали в себе нижних треугольничков из N и не совпадали с боковыми сторонами треугольника T. Значит, ломаная LR также разделяет множество N на две не связанные компоненты: одна содержит треугольничек ∇ и находится внутри области, которая ограничена ломаной LR, а другая находится снаружи от этой области и содержит треугольничек ∇', лежащий на левой или правой боковой стороне треугольника T (рис. 1). Мы вновь получаем противоречие со связностью множества N.

Таким образом, мы доказали, что каждое связное множество из k нижних треугольничков смежно не менее чем с $k+m$ верхними треугольничками, где m — размер минимального верхнего треугольника T, содержащего N. Значит, поскольку в T есть не более m дырок, на самом деле множество N смежно не менее чем с k верхними невырезанными треугольничками. Поскольку у разных связных компонент — разные наборы смежных верхних треугольничков, аналогичное утверждение верно и для множества всех нижних треугольничков. Значит, мы проверили условие леммы Холла, поэтому верхние и нижние треугольнички разбиваются на пары смежных и таким образом порождают разбиение на ромбики, что и требовалось доказать.

Мария Михайловна Плотникова, 1 курс ФКН ВШЭ
mmplotnikova2007@gmail.com