

---

---

# Олимпиады

---

---

## Исследовательские задачи на олимпиадах ленинградских физматшкол. I

Д. В. Фомин

### Немного истории

Давным-давно, в славном городе на Неве, жили-были три физико-математические школы... Впрочем, нет, мы не собираемся здесь рассказывать о том, как в 1960-е годы многочисленные ленинградские математики и энтузиасты создали в северной столице несколько замечательных школ с физико-математическим уклоном. Или о том, как это повлияло на развитие и углубление школьного и внешкольного образования в Ленинграде и окрестностях. Об этом можно прочитать, например, в недавно изданной книжке [4].

И речь даже не о том, что каждая из этих физико-математических школ имела свои собственные олимпиады по математике с задачами довольно высокого (даже по ленинградским меркам) уровня. Об этом, опять-таки, можно прочитать в уже упомянутом выше сборнике.

Данная статья посвящена интересному эксперименту, проведённому на одной из этих олимпиад в самом конце 1980-х годов. Надо сказать, что к тому моменту у организаторов олимпиады 239-й школы — в то время, безусловно, сильнейшей физико-математической школы Ленинграда (а весьма возможно, что и всего Советского Союза) — накопилось много интересных и очень трудных задач, которые, по самым разным причинам, нельзя было использовать на Ленинградской городской олимпиаде.

Во-первых, более или менее полные и формальные решения этих задач использовали идеи и теоремы, не входившие на тот момент в школьную программу (даже в расширенную программу самой ФМШ № 239).

Во-вторых, они были слишком сложны для городской олимпиады — и в самом деле, какой смысл предлагать там задачу, которую решат не более одного или двух участников; ведь одна из целей городской олимпиады состояла в том, чтобы более или менее аккуратно «разделить» участников соревнования по их результатам.

И наконец, в-третьих, многие из этих задач были так называемыми *исследовательскими* проблемами — их условие состояло из нескольких пунктов постепенно увеличивающейся сложности. И тут надо упомянуть, что незадолго до того, исходя из опыта предыдущих соревнований, жюри Ленинградской городской математической олимпиады приняло решение воздержаться от использования подобных задач.

В 1987 году, на заключительном туре 53-й ЛМО, жюри рискнуло пойти на «смелый» эксперимент и включить одну исследовательскую задачу в вариант олимпиады старших классов. Несмотря на то, что предложенная задача (в нашем списке она приведена под номером 2) оказалась одной из наиболее интересных задач городской математической олимпиады того года, её использование вызвало серьёзные проблемы, связанные с награждением победителей и выбором команды Ленинграда для участия во Всесоюзной олимпиаде школьников по математике. Об этом можно прочитать, например, в книгах [2] и [5]. Вкратце, основную трудность вызвало то обстоятельство, что организаторам нужно было выбрать одного единственного восьмиклассника для участия во Всесоюзной математической олимпиаде. Увы, результаты трёх школьников были практически идентичны, с единственным отличием, которое начинало играть роль только в том случае, если полное решение задачи № 2 засчитывалось бы как решение двух или даже трёх отдельных задач вместо одной. После весьма длительных и горячих споров мнения разделились в точности пополам, и председателю жюри пришлось принять единоличное решение.

Надо сказать, что, вообще говоря, это был совсем не первый подобный эксперимент. На Всесоюзных олимпиадах 1970-х годов исследовательские задачи неоднократно предлагались финалистам этих соревнований (особенно много их было в 1976–78 годах; см. сборник [1]). При этом, однако, каждому пункту этих задач заранее присваивалось определённое количество очков — такие образом, вопросы оценки частичных решений были решены ещё до олимпиады. Жюри Всесоюзной олимпиады также не имело и другой проблемы, стоявшей перед оргкомитетом

ЛМО — формально говоря, им не нужно было заниматься вопросами отбора участников для соревнований следующего уровня (то есть, команды СССР на Международную математическую олимпиаду).

Примерно в те же годы одна подобная задача (она приведена в нашем списке под номером 1) была предложена на олимпиаде одной из ленинградских ФМШ — более конкретно, это произошло в 1978 году, на заключительном туре олимпиады физико-математического интерната № 45 при ЛГУ. Эксперимент, увы, не был особенно удачным, так как первые три пункта задачи № 1 оказались относительно несложными, а остальные пункты не поддались ни одному из участников. Плюс к этому, начиная с того года, изменились правила отбора участников Всесоюзной олимпиады. В результате, ФМШ № 45 получила собственную отдельную команду — однако при этом школьникам интерната было необходимо сначала пройти через «сито» Всероссийской олимпиады. Так как использование исследовательских задач затрудняло выбор одного единственного кандидата в каждой из трёх параллелей старших классов, было опять-таки принято решение не включать подобные задачи в списки будущих соревнований.

Перед организаторами олимпиады ФМШ № 239 такие проблемы, к счастью, не стояли. Это было совершенно неформальное *открытое*<sup>1)</sup> соревнование, практически не обременённое никакими официальными требованиями.

Всё эти отдельные и разнообразные причины привели к тому, что в декабре 1987 года по инициативе организаторов<sup>2)</sup> был проведён ещё один, «экстраординарный» тур<sup>3)</sup> олимпиады 239-й школы, состоявший из четырёх многопунктных, «исследовательских» задач. Это была устная олимпиада, длившаяся пять часов, и в ней приняли участие около двадцати сильнейших старшеклассников Ленинграда. Задачи этого экспериментального соревнования включены в наш список под номерами 3–6.

Каждому пункту каждой из четырёх задач было заранее присвоено определённое число баллов в соответствии с приведённой ниже таблицей:

---

<sup>1)</sup> В том смысле, что в ней могли принимать участие учащиеся и других школ Ленинграда или Ленинградской области.

<sup>2)</sup> В 1986–1990 годы ядро оргкомитета олимпиады 239-й школы состояло из молодых ленинградских математиков Фёдора Назарова, Григория Перельмана и Дмитрия Фомина.

<sup>3)</sup> Этой новой олимпиаде было дано несколько претенциозное название Гран-При (Grand Prix или «Большой Приз»).

	(а)	(б)	(в)	(г)	(д)
№ 3	15	15	30	40	—
№ 4	5	15	30	50	100
№ 5	15	5	50	70	—
№ 6	10	10	30	45	—

В продолжение эксперимента всем участникам Гран-При было выделено дополнительное время (одна неделя) для того, чтобы они продолжили работу в более спокойной домашней обстановке и затем представили полученные дома результаты в письменном виде. После этого окончательные баллы каждого участника были вычислены по формуле  $T = \frac{3}{2}X + Y$ , где  $X$  и  $Y$  — это баллы, набранные соответственно в устной и в письменной половинах олимпиады. Три лучших результата: 355, 315 и 198 баллов<sup>4)</sup>.

После проверки письменных работ и окончательного подведения итогов наиболее «популярной» оказалась задача № 6 («**Вычисление степени**») — четверо участников решили все её пункты, и ещё двое школьников решили три пункта из четырёх. Каждая из задач № 3 («**Случайные последовательности**») и № 5 («**Красное и чёрное**») была полностью решена одним из участников. Лучший результат по задаче № 4 («**Восстановление набора чисел**») состоял в решении первых трёх пунктов (получен также лишь одним участником).

Было решено считать эксперимент относительно успешным, и, хотя отдельного «призового» тура больше никогда не проводили, на двух следующих олимпиадах ФМШ № 239 жюри предложило участникам для решения ещё несколько исследовательских задач. В 1988 году ими стали задачи №№ 7–11, а в 1989 году — задачи №№ 12–15.

\* \* \*

Для каждой задачи из нижеследующего списка указан год соответствующей олимпиады. Особенно трудные задачи помечены одной или двумя звёздочками. Единственный пункт, решение которого до сих пор неизвестно — задача № 4 (д), так называемая *обобщённая проблема Мёзера*, см. [3] — помечен специальным значком ®.

Условия задач, равно как и их решения, с небольшими редакционными поправками позаимствованы из книг, указанных в списке лите-

<sup>4)</sup> Победителями Гран-При стали, соответственно, Сергей Иванов, Сергей Берлов и Мария Рогинская (все трое — участники ММО в составе команды СССР, и в будущем известные профессиональные математики).

ратуры. Задачи № № 1, 3–15 взяты из сборника [4], а задача № 2 — из сборника [2] (и из его более поздней, существенно обновлённой версии [5]).

Авторство каждой задачи (кроме № 1, автор которой нам на данный момент неизвестен) указано в конце её условия. Это же сделано и для тех решений, которые были любезно сообщены составителю друзьями и коллегами. Отдельной благодарности за бескорыстную помощь на этом интеллектуальном «фронте» заслуживают Е. В. Абакумов, С. Л. Берлов, И. Захаревич, М. П. Иванов, И. В. Итенберг, А. В. Лапунов, А. С. Меркурьев, М. А. Туревский, С. В. Фомин и В. В. Шувалов.

### Задачи

**1. [1978] («Многочлены и суперпозиции»)** Если нам дана функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , то через  $f^{(n)}$  мы обозначим функцию  $f(f(f(\dots f(x) \dots)))$  ( $n$  пар скобок<sup>5)</sup>). Если

$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

— это некий многочлен с вещественными коэффициентами, то через  $P(f)$  мы обозначим функцию

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 f^{(1)}(x) + a_0 x.$$

(а) Пусть  $P(t) = t^2 - t + 1$ ,  $P(f) = 0$ . Докажите, что  $f^{(7)} = f$ .

(б) Пусть  $P, Q, R$  — многочлены,  $Q = P \cdot R$ ,  $P(f) = 0$ . Докажите, что  $Q(f) = 0$ .

(в) Докажите, что для многочлена  $P$  из пункта (а) существует такая функция  $f$ , что  $P(f) = 0$ .

(г)\*\* Верно ли это для любого (непостоянного) многочлена?<sup>6)</sup>

(д)\*\* Пусть  $Q, P$  — многочлены, причём  $\{f: P(f) = 0\} \subset \{f: Q(f) = 0\}$ . Докажите, что для некоторого многочлена  $R$  верно равенство  $Q = P \cdot R$ . В частности, попробуйте доказать это, если  $Q(t) = t^n - 1$ .

(Жюри олимпиады ФМШ № 45)

**2. [1987] («Держи вора!»)** Стража ловит забравшегося во дворец к султану Багдадского вора. Чтобы поймать вора, стражнику нужно оказаться с ним в одной комнате. Дворец состоит из 1000 комнат, соединённых дверьми. Планировка дворца такова, что из комнаты

<sup>5)</sup> Иначе говоря,  $f^{(n)}$  — это  $n$ -кратная суперпозиция функции  $f$ .

<sup>6)</sup> То есть верно ли, что у любого многочлена ненулевой степени есть хотя бы один «функциональный» корень?

в соседнюю комнату нельзя пройти иначе, как через соединяющую их (всегда единственную) дверь.

(а) Докажите, что при любой планировке дворца 10 стражников могут составить план действий, гарантирующий поимку вора.

(б) Докажите, что 5 стражникам это может не удасться.

(в)\* Докажите, что для поимки заведомо достаточно 6 стражников.  
(Н. Ю. Нецветаев)

**3. [1987]** («Случайные последовательности») Задан некоторый набор  $U$  строго возрастающих функций, отображающих  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{N}$ . Будем говорить, что последовательность  $(a_n)$  нулей и единиц  $U$ -случайна, если для любой функции  $f \in U$  в подпоследовательности  $(a_{f(n)})$  плотность единицы существует и равна  $1/2$ .

Плотностью единицы в последовательности нулей и единиц  $(x_n)$  называется предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

(а) Докажите, что если  $U$  — конечный набор функций, то существует хотя бы одна  $U$ -случайная последовательность.

(б) Постройте  $U$ -случайную последовательность, если  $U$  — это набор всех линейных функций  $y = ax + b$ , где  $a$  и  $b$  — натуральные числа.

(в)\*\* Постройте  $U$ -случайную последовательность, если  $U$  — это набор всех многочленов с натуральными коэффициентами.

(г)\*\* Докажите, что если  $U$  является счётным набором функций, то существует хотя бы одна  $U$ -случайная последовательность.

(Д. В. Фомин)

**4. [1987]** («Восстановление набора чисел») Некто задумал  $n$  чисел, после чего написал на  $n(n-1)/2$  карточках все их попарные суммы и перетасовал получившуюся колоду. Можно ли по этому набору карточек однозначно восстановить исходный набор чисел?

(а)  $n = 3, 4$ .

(б) Докажите, что это, вообще говоря, невозможно, если  $n$  является степенью двойки.

(в)\* Докажите, что это всегда можно сделать, если  $n$  не является степенью двойки.

(г)\*\* Можно ли восстановить исходный набор<sup>7)</sup> по набору всех  $n(n-1)(n-2)/6$  сумм по три разных числа?

<sup>7)</sup> Под набором чисел здесь, конечно, понимается *мульти-множество*, т. е. разрешены кратные вхождения одного и того же числа в набор.

(д)<sup>®</sup> Можно ли восстановить исходный набор по набору  $\binom{n}{k}$  всех сумм по  $k$  разным чисел?

(L. Moser, Д. В. Фомин).

**5. [1987] («Красное и чёрное»)** На плоскости дано  $a$  точек общего положения,  $a = 3n + 1$ . Докажите, что их можно раскрасить в красный и чёрный цвет так, что при выкидывании любых  $n - 1$  точек набора выпуклые оболочки оставшихся красных и оставшихся чёрных точек будут пересекаться.

(а) Докажите это утверждение при  $n = 1, 2$ .

(б) Докажите, что при  $n = 2$  число  $a$  в условии нельзя заменить на  $3n$ .

(в)<sup>\*\*</sup> Докажите утверждение задачи для произвольного  $n$ .

(г)<sup>\*\*</sup> Верно ли, что при любом  $n$  число  $a$  в условии нельзя заменить на  $3n$ ? Попробуйте дать какую-то оценку снизу для числа  $a$ .

(Г. Я. Перельман)

**6. [1987] («Вычисление степени»)** Есть автомат, который по двум карточкам с числами  $x$  и  $y$  выдаёт карточку с числом  $xy$  и возвращает заложенные в него карточки. Другой автомат по карточке с числом  $x$  выдаёт карточку с числом  $x^2$ , а также возвращает исходную карточку.

В начале имеется одна карточка с числом  $a$ . Через  $P(n)$  обозначим наименьшее число операций автоматов, которое необходимо для получения карточки с числом  $a^n$ .

(а) Вычислите  $P(n)$  для  $n = 1, 2, 3, \dots, 16$ .

(б) Докажите неравенства  $\log_2 n \leq P(n) \leq 2 \log_2 n$ .

(в) Докажите, что  $P(n) \leq \frac{3}{2} \log_2 n + c$  для некоторой константы  $c$ .

(г)<sup>\*</sup> Докажите, что  $P(n) = \log_2 n + o(\log_2 n)$ .

(Ф. Л. Назаров)

**7. [1988] («Разбиения и покрытия»)** Когда подвели итоги конкурса решения задач, оказалось, что каждую задачу решило не менее  $n$  участников. Обозначим через  $P(n)$  наибольшее количество задач в конкурсе, при котором всех участников конкурса заведомо можно разбить на две группы, в каждой из которых решены все задачи. Докажите, что

(а)  $P(3) = 6$ ; (б)  $P(n) < 4^n$ ; (в)  $P(n) \geq 2^{n-1}$ ;

(г)<sup>\*\*</sup>  $P(n) < c \cdot 3^n$  для некоторой константы  $c$ .

(Ф. Л. Назаров)

**8. [1988] («Ожерелья Фурье»)** Из красных и синих бусин составляют ожерелья. Два ожерелья называются похожими, если их можно повернуть одно относительно другого так, чтобы у них совпадал цвет бусин более чем на половине мест. Сколько попарно непохожих ожерелий из  $n$  бусин можно составить, если

- (а)  $n = 2k + 1$ ; (б)  $n = 4k + 2$ ; (в)\*  $n = 8k + 4$ ;  
 (г)\*\*  $n$  — произвольное натуральное число?

(Г. Я. Перельман)

**9. [1988]** («Функционально-дифференциальное уравнение») Рассматривается функциональное уравнение

$$f(x) + f^{-1}(x) = g(x). \quad (*)$$

Здесь  $f(x)$  — заданная на  $\mathbb{R}_+$ , строго возрастающая от 0 до  $\infty$  неизвестная функция,  $g(x)$  — такая же непрерывно дифференцируемая известная функция. При каких  $g(x)$  уравнение (\*) имеет решения и сколько их?

(а) Докажите, что если уравнение (\*) имеет решение, то при любом неотрицательном  $x$  верно неравенство

$$\int_0^x g(t) dt \geq x^2.$$

(б) Найдите все решения уравнения (\*) при  $g(x) \equiv cx$ .

(в) Докажите, что если  $g'(0) > 2$ , а также при любом положительном  $x$  выполнено условие

$$\int_0^x g(t) dt > x^2,$$

то у уравнения (\*) существует не более двух решений.

(г)\* Докажите, что если  $g'(x) \geq 2$  при всех  $x \geq 0$  и  $g(x)$  линейна в окрестности нуля, то решение уравнения (\*) существует.

(д)\*\* Докажите, что для существования решения достаточно условия  $g'(x) \geq 2$ .

(е) Приведите пример функции  $g(x)$  такой, что для любого  $x$  имеет место неравенство  $g(x) \geq 10x$ , но при этом уравнение (\*) не имеет решения.

(Ф. Л. Назаров)

**10. [1988]** («Последовательности нулей и единиц») По окружности расставлены нули и единицы. Одновременно между одинаковыми цифрами вставляют нули, а между разными — единицы, после чего старые цифры стирают. Оказалось, что новая расстановка отличается от старой лишь поворотом на  $n - \frac{1}{2}$  «делений». Что можно сказать о количестве знаков на окружности и об их расстановке?

(а) Укажите все такие расстановки для  $n \leq 5$ .

(б) Докажите, что количество таких расстановок при фиксированном количестве цифр и фиксированном  $n$  является степенью двойки.

(в)\*\* Докажите, что если количество цифр — степень пятёрки, то нетривиальных (ненулевых) расстановок с указанным свойством не существует.

(г)\* Докажите, что если количество цифр — чётно, то все такие расстановки центрально симметричны.

(Г. Я. Перельман)

**11. [1988]** («Гармонические таблицы») Квадратную таблицу, заполненную вещественными числами, назовём *гармонической*, если каждое число внутри таблицы равно среднему арифметическому своих четырёх соседей<sup>8)</sup>.

(а) Укажите все многочлены от двух переменных степени не более 3, такие, что если в качестве переменных подставлять номера строки и столбца таблицы, а полученное значение записывать в соответствующую клетку, то получится гармоническая таблица.

(б) Пусть в первой строке и в первом столбце таблицы  $n \times n$  стоят нули, а в клетке  $(2, 2)$  — единица. Докажите, что если таблица гармонична, то одно из чисел в таблице не меньше  $n - 1$ .

(в) Пусть гармоническая таблица имеет размеры  $2n \times 2n$  и в центральном квадрате  $2 \times 2$  стоят числа, указанные на рисунке. Докажите, что одно из чисел таблицы по абсолютной величине не меньше  $n$ .

1	-1
-1	1

(г)\*\* Пусть гармоническая таблица имеет размеры  $2n \times (2n - 1)$  и в центральном прямоугольнике  $2 \times 1$  стоят числа 1,  $-1$ . Можно ли утверждать, что в таблице обязательно найдётся число по абсолютной величине не меньшее  $cn$ , где  $c$  есть фиксированная положительная константа?

(д)\*\* Можно ли в пунктах (б) и (в) получить оценку порядка  $cn^2$ ?

(Г. Я. Перельман)

**12. [1989]** («Квадратичное неравенство») Все числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  находятся в отрезке  $[0; 1]$ . Рассмотрим число

$$S = x_1 + x_2 + \dots + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 - \dots - x_{n-1}x_n - x_nx_1.$$

(а) Докажите, что  $S \leq 1$  при  $n = 3$ .

(б) Докажите, что  $S \leq [n/2]$  при любом  $n > 3$ .

(в)\* Докажите, что существует такое положительное число  $\alpha$  (зависящее только от  $n$ ), что при любых  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0; 1]$  верно нера-

---

<sup>8)</sup> Соседями называются числа, стоящие в клетках, имеющих общую сторону с данной клеткой. Слово «внутри» означает здесь, что число не находится на краю таблицы.

ВЕНСТВО

$$S \geq \alpha \sum_{i>j} |x_i - x_j|^3. \quad (*)$$

(г)\* Найдите наибольшее  $\alpha$ , для которого выполнено соответствующее неравенство (\*).

(Д. В. Фомин)

**13. [1989]** («Трёхцветные шары») В ряд выложено 100 шариков, каждый из которых окрашен в красный, синий или зелёный цвет. Решается заменить два лежащих рядом шара, имеющих разный цвет, на два шара третьего цвета (например, если рядом лежат шары красного и зелёного цвета, то их можно заменить на два шара синего цвета).

(а) Первые 50 шариков ряда — красные, остальные — синие. Докажите, что описанными выше операциями можно добиться того, чтобы все 100 шариков в ряду стали зелёными.

(б) Докажите то же самое, если известно лишь, что какие-то 50 шариков в ряду — красные, а остальные — синие.

(в) Можно ли из ряда СККК...ККК получить ряд ККК...ККК?

(г)\* Назовём ряд шариков *правильным*, если не все его шары одного цвета, но в нём при этом есть два соседних шара одного цвета. Верно ли, что если из правильного ряда  $A$  можно получить правильный ряд  $B$ , то и из ряда  $B$  можно получить ряд  $A$ ?

(Д. В. Фомин)

**14. [1989]** («Многочлены с кратными корнями») Обозначим через  $d_n$  минимальную степень многочлена, имеющего своими коэффициентами только числа  $-1, 0, +1$ , и делящегося на многочлен  $(x-1)^n$ .

(а) Докажите, что  $d_n < 2^n$ .

(б) Докажите, что  $d_n \geq 2n$  при  $n \geq 3$ .

(в)\* Пусть  $P(x)$  — некоторый многочлен с произвольными коэффициентами, делящийся на  $(x-1)^n$  и имеющий при этом старший коэффициент, равный 1. Докажите, что сумма модулей его коэффициентов может быть сколь угодно близка к 2.

(г)\*\* Если  $m$  — степень такого<sup>9)</sup> многочлена  $P$ , то докажите, что выполнено неравенство  $S^m \geq (1,01)^{n^2}$ , где  $S$  — сумма модулей коэффициентов многочлена  $P$ .

(Ф. Л. Назаров, Д. В. Фомин)

**15. [1989]** («По порядку, становись!») Урфин Джюс каждый день строит в колонну армию своих деревянных солдат (их у него ровно  $n$ ).

<sup>9)</sup> Имеется в виду «такого, как описано в условии пункта (в)».

Через  $n$  дней оказалось, что каждый дуболом ровно один раз смотрел в затылок каждому другому дуболому. Могло ли это случиться, если

(а)  $n = 3$ ; (б)  $n = 6$ ; (в)  $n$  — чётное число; (г)  $n = 7$ ; (д)\*\*  $n = 101$ ?

(Д. В. Фомин)

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988.
- [2] Фомин Д. В. Петербургские математические олимпиады. СПб.: Политехника, 1994.
- [3] Фомин Д. В. Определение набора чисел по набору его кратных сумм // Математическое просвещение. Сер. 3. М.: МЦНМО, 2018. Вып. 22. С. 179–206.
- [4] Фомин Д. В. Олимпиады ленинградских физико-математических школ. 1965–1991. М.: МЦНМО, 2025.
- [5] Фомин Д. В., Кохась К. П. Ленинградские математические олимпиады. 1961–1991. М.: МЦНМО, 2022.