Дополнение и комментарии к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство говорит о богатстве связей и о *естественности*. В том числе и поэтому оно так важно (помимо самоценности). Значение учёного есть произведение его пробивной силы на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы).

При публикации дополнения к задачнику нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут найтись как с классикой, так и с сюжетами, находящимися в процессе исследования, для которых пока не нашлось изящной формулировки.

В выпуске 3 (с. 232, решение: выпуск 4, с. 224) была опубликована

Задача 3.4. (а) Пусть $p > 3$ — простое число. Докажите, что на торической шахматной доске размера $p \times p$ можно расставить p ферзей так, чтобы они не били друг друга.

(б) Назовём *магараджей* фигуру, которая из клетки $(0, 0)$ за один ход может попасть в клетки $(0, \pm k)$, $(\pm k, 0)$, $(\pm k, \pm k)$, $(\pm k, \pm 2k)$, $(\pm 2k, \pm k)$ (k — целое положительное число). Ответьте на вопрос пункта (а) для магарадж при $p > 7$. (*А. Белов*)

В продолжение темы:

Задача 3.4′ (на исследование). *При каких n на торической шахматной доске $n \times n$ можно расставить n ферзей так, чтоб они не били друг друга? Обобщите задачу для магарадж и более общих «монстров».* (*Фольклор*)

В выпуске 6 (с. 133, решение: выпуск 9, с. 225) была опубликована

Задача 6.2. Дана матрица ортогонального преобразования (a_{ij}) размера 3×3, причём все $a_{ij} \neq 0$. Пусть $B = (b_{ij}) = (a_{ij}^{-1})$. Докажите, что $\det B = 0$. (*А. Джумадильдаев*)

В продолжение темы:

Задача 6.2$'$. *Для матрицы A обозначим величину $(I+A)^{-1}(I-A)$ через $A^{\#}$.*

(а) *Докажите, что $A^{\#\#} = A$.*

(б) *Докажите, что A ортогональна тогда и только тогда, когда $A^{\#}$ кососимметрична.* (*Фольклор*)

В выпуске 7 (с. 187, решение: выпуск 9, с. 229; выпуск 10, с. 274–275) была опубликована

Задача 7.3. Покажите, что матрицы AA^T и A^TA, где A — прямоугольная матрица, A^T — транспонированная матрица, имеют один и тот же набор ненулевых собственных чисел. (*А. К. Ковальджи*)

См. также выпуск 32, с. 185:

Задача 7.3$'$. (а) Даны две квадратные матрицы A, B. Верно ли, что матрицы AB, BA подобны?

(б) Верно ли, что матрицы A и A^T подобны?

(Матрицы X и Y *подобны*, если $X = PYP^{-1}$ для некоторой обратимой матрицы P.) (*Фольклор*)

В продолжение темы:

Задача 7.3$''$. (а) *Пусть A — матрица 4×2, B — матрица 2×4 такие, что*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите BA.

(б) *Пусть A, B — матрицы $n\times n$ такие, что $AB + A + B = 0$. Докажите, что они коммутируют.* (*Фольклор*)

В выпуске 9 (с. 224, решение: выпуск 10, с. 265–272) была опубликована

Задача 9.10. При каких α, β, γ существует непрерывная функция, определённая на отрезке длины γ, интеграл от которой по любому отрезку длины α положителен, а по любому отрезку длины β — отрицателен? (*П. Самовол*)

См. также выпуск 34, с. 173:

Задача 9.10$'$. При каких m, n существует таблица $m\times n$, заполненная числами, в которой сумма в каждом подквадрате $k\times k$ положительна, а сумма в каждом подквадрате $l\times l$ отрицательна?

(*Л. Радзивиловский, А. Я. Белов*)

В продолжение сюжета:

Задача 9.10″. (а) *При каких m, n можно покрыть прямоугольник $m \times n$ уголками из трёх клеток так, чтобы каждая клетка была покрыта одинаковое число раз*?

(б) *Докажите, что прямоугольник нельзя покрыть фигурками Φ_i так, чтобы каждая клетка была покрыта в одинаковое число слоёв, тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие*: *в клетках можно расставить числа с положительной суммой, но так, что сумма чисел, покрывающих фигуру Φ_i, отрицательна.* (*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 13 (с. 179, решение: выпуск 14, с. 270–271, 281) была опубликована

Задача 13.2. К чему стремится объём n-мерного шара радиусом 2008 при $n \to \infty$? (*А. Я. Белов*)

В продолжение темы:

Задача 13.2″. *Какую часть объёма занимает мякоть в стомерном арбузе диаметра* 1 *метр, если толщина корки* 1 *см*? (*В. И. Арнольд*)

В выпуске 15 (с. 233, решение: выпуск 24, с. 193–195) была опубликована

Задача 15.9. (а) Дана 2×2-матрица A с вещественными коэффициентами. Докажите, что её можно представить как сумму квадратов двух матриц второго порядка с вещественными коэффициентами. (*SEEMOUS 2010*)

(б)* Можно ли матрицу размера $n \times n$ с вещественными коэффициентами представить в виде суммы квадратов нескольких матриц размера $n \times n$ с вещественными коэффициентами? Если «да», то каково минимальное число квадратов? (*Охад Ливне Бар-Он, Шахар Кармиели*)

В продолжение темы:

Задача 15.9′. (а) *Докажите, что если вещественнозначная матрица достаточно близка к единичной матрице, то она — квадрат вещественнозначной матрицы. При этом вместо единичной матрицы можно взять произвольную диагональную матрицу с положительными коэффициентами. Любая ли комплекснозначная матрица есть квадрат комплекснозначной матрицы*?

(б) *Определитель вещественнозначной* 2×2 *матрицы* A *положителен. Верно ли, что* A *есть квадрат вещественнозначной матрицы*?

(в) *Пусть E — единичная матрица порядка 3. Верно ли, что $-E$ есть сумма двух квадратов вещественнозначных матриц?*

(*Л. Радзивиловский*)

В выпуске 16 (с. 231, решение: выпуск 19, с. 260–262) была опубликована

Задача 16.9. В алфавите анчурского языка есть лишь три буквы: A, B и C. Два разных слова обозначают одно и то же понятие, если одно из них может быть получено из другого с помощью следующих операций, которые можно проводить в любой последовательности и в любых количествах.

1. В любом месте слова можно заменять друг на друга следующие комбинации букв: ABA на BAB, ACA на CAC или BC на CB (и наоборот).
2. Из любого места можно выкидывать две одинаковые буквы, идущие подряд, а также в любое место можно вставлять две одинаковые буквы.

(а) Конечное или бесконечное количество понятий можно выразить с помощью этого языка? Если конечное, то сколько?

(б) Тот же вопрос, если замена BC на CB запрещена, однако разрешена замена BCB на CBC.

(в) Тот же вопрос, если в алфавите две буквы A и B, свойство 2 сохраняется и из любого места можно выкидывать $(AB)^n$ и в любое место это вставлять. (*В. О. Бугаенко*)

Неожиданным образом теоретико-групповую интерпретацию использует

Задача 16.9′. *На окружности имеются синие и красные точки. Разрешается добавить красную точку и поменять цвета её соседей, а также убрать красную точку и изменить цвета её бывших соседей. Пусть первоначально было всего две красные точки (менее двух точек оставлять не разрешается). Докажите, что за несколько разрешённых операций нельзя получить картину, состоящую из двух синих точек.* (*К. Казарновский, первый Турнир городов. Задача 1*)

В выпуске 19 (с. 258) была опубликована

Задача 19.11. Плоскость раскрашена в несколько цветов. Докажите, что существует треугольник единичной площади с одноцветными вершинами. (*А. Я. Канель-Белов*)

Вариации на эту тему (выпуск 35, с. 247):

Задача 19.11′. (а) Плоскость раскрашена в несколько цветов. Докажите, что существует прямоугольный треугольник единичной площади с одноцветными вершинами. (*А. Я. Канель-Белов*)

(б) Каждую точку в пространстве закрасили в один из трёх цветов. Докажите, что найдётся треугольник с углами 30, 60 и 90 градусов, у которого все вершины одного цвета. (*М. Бона* (*Венгрия*))

(в) А что если число цветов произвольное и мы дополнительно требуем единичность площади?

(г) (Открытый вопрос.) Плоскость раскрашена в несколько цветов. Докажите, что существует прямоугольник единичной площади с одноцветными вершинами. Подумайте над пространственным обобщением. (*Фольклор*)

В продолжение темы:

Задача 19.11″ (на исследование). *Исследуйте игровую версию предыдущих задач.* (*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 21 (с. 271, решение: выпуск 22, с. 248–249) была опубликована

Задача 21.1. Какая из двух кривых длиннее:
эллипс

$$\left\{(x, y)\colon \frac{x^2}{2} + y^2 = 1\right\}$$

или синусоида

$$\{(x, \sin x)\colon 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}?$$

(*Л. Радзивиловский*)

В продолжение темы:

Задача 21.1′. *Окружность C вращается с постоянной скоростью и при этом её центр движется прямолинейно и равномерно. Каков пройденный путь точки $A \in C$, когда она сделает один оборот*?

(*Л. Радзивиловский*)

В выпуске 21 (с. 273–274) была опубликована

Задача 21.12. (а) Область между двумя параллельными прямыми раскрашена в 2 цвета. Докажите, что найдётся отрезок длины 1 с вершинами одного цвета. (*Л. А. Емельянов*)

(б) Область между двумя параллельными плоскостями раскрашена в 4 цвета. Докажите, что найдётся отрезок длины 1 с вершинами одного цвета. (*А. Я. Канель-Белов, Д. Черкашин, В. Воронов*)

В продолжение темы:

Задача 21.12$'$. (а) *Пусть P — плоскость. Область $P \times [0, \varepsilon]$ раскрашена в 5 цветов. Докажите, что найдётся отрезок с одноцветными вершинами.*

(б) *Рассмотрите n-мерные обобщения для раскраски в $2+3+\ldots+n+1$ цветов.* (*А. Я. Белов, Д. Черкашин, В. Воронов*)

В выпуске 23 (с. 216) была опубликована

Задача 23.6. Все вершины выпуклого 10^9-угольника имеют целые координаты. Докажите, что его диаметр не меньше 10^{12}.

(*А. Я. Канель-Белов*)

В продолжение темы:

Задача 23.6(4). *Рассмотрите n-мерные обобщения. Дайте также оценки на объём, площадь поверхности, функционалы Минковского.*

(*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 23 (с. 217) была опубликована

Задача 23.11. Найдите предел

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{(a,b)\in D_R} \frac{(-1)^{a+b}}{a^2+b^2},$$

если D_R есть множество целочисленных точек (x, y), находящихся от нуля на положительном расстоянии, не превосходящем R.

(*IMC-2018, предложил R. Angelo*)

В продолжение темы:

Задача 23.11$'$. (а) *Пусть S_N равно количеству пар (a, b), $1 \leqslant a, b \leqslant N$, таких, что $a(a+1)b(b+1)$ есть точный квадрат. Найдите предел*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_N}{N}.$$

(*IMC 2025, предложил Besfort Shala*)

(б) *Докажите, что число целых точек в круге радиусом $r = \sqrt{R}$ с центром в нуле равно*

$$1 + 4\Big(R - \frac{R}{3} + \frac{R}{5} - \frac{R}{7} + \frac{R}{9} - \frac{R}{11} + \frac{R}{13} - \ldots\Big).$$

(*Фольклор*)

(в) *Решётка образована правильными треугольниками с единичной стороной, причём начало координат является её узлом. Докажите, что число узлов решётки в круге радиусом $r = \sqrt{R}$ с центром в начале* *координат равно*

$$1+6\left(R-\frac{R}{2}+\frac{R}{4}-\frac{R}{5}+\frac{R}{7}-\frac{R}{8}+\frac{R}{10}-\frac{R}{11}+\ldots\right). \quad (\textit{Фольклор})$$

В выпуске 35 (с. 242) была предложена

Задача 35.7. В школе учатся n мальчиков и n девочек. Каждый мальчик знаком ровно с k девочками и каждая девочка знакома ровно с k мальчиками. При этом у любых двух девочек ровно c знакомых мальчиков. Докажите, что у любых двух мальчиков есть ровно c знакомых девочек. (*Л. Радзивиловский*)

В продолжение темы:

Задача 35.7$'$. *Докажите, что в группе из* 50 *человек найдутся двое, имеющие чётное число общих друзей* (*возможно* 0, *дружба взаимна*).
(*Фольклор*)