# Задачник

(составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

## Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

Обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

Лёгкие задачи имеют методическое значение. Цель трудных задач иная. В них могут ставиться открытые вопросы. На базе решения такой задачи неоднократно появлялась научная статья (в том числе у школьника), а также доклад на конференции (школьной или взрослой). Так что призываем присылать решения опубликованных задач. Составители задачника помогут с публикациями и докладами на конференциях.

1. Докажите, что
$$\lim_{j\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{j}\frac{k^{j-k}}{(j-k)!}e^{-k}\right)=\frac{1}{2}.$$
(*Я. Г. Гайнельянова, К. Э. Каибханов*)

2. В $n$-мерном пространстве дан выпуклый многогранник с $n+2$ вершинами. Докажите, что для некоторых $k, m$, где $k+m=n+2$, $k, m \geqslant 1$, их можно разбить на две группы из $k$ и $m$ вершин так, чтобы $(k-1)$-мерный и $(m-1)$-мерный симплексы, натянутые соответственно на эти две группы вершин, пересекались.
(*А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи*)

3. Дана функция $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$. Докажите, что найдутся точки $a < b < c \in \mathbb{Q}$ такие, что $f(a) \leqslant f(b) \leqslant f(c)$.

(*IMC-2024, предложили M. Golafshan, M. A. Whiteland*)

4. Население деревни состоит из 100 человек. Некоторые дружат, некоторые враждуют. Дружба и вражда взаимны. Каждый человек может начать новую жизнь: разойтись со всеми друзьями и подружиться со всеми врагами. Такое может происходить (вообще говоря с разными людьми) несколько раз подряд. Всегда ли можно добиться того, чтобы по меньшей мере

а) 50,5 % пар были дружескими?

б) 51 % пар были дружескими?

(*Л. Радзиវиловский, А. Я. Канель-Белов*)

5. Для фиксированного числа $0 < t < 1$ операция $S$ переводит набор $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ точек евклидова пространства в такой набор точек $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$, что

$$\overrightarrow{A_iB_i} = t \cdot \overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad (A_{n+1} = A_1).$$

Затем операция $S$ применяется к полученному набору и т. д. Докажите, что любой исходный набор точек после достаточно большого количества последовательных применений операции $S$ перейдёт в набор, содержащийся в шаре заранее заданного произвольного радиуса. (*В. С. Панфёров, П. В. Семенов*)

6. В матрице $n \times n$ стоят числа от 1 до $n^2$. Каков её

а) максимально возможный; б) минимально возможный ранг?

(*Л. Радзивиловский*)

7. На сфере даны две окружности, пересекающиеся в двух различных точках. Два конуса касаются сферы вдоль данных окружностей. Докажите, что конусы пересекаются по двумареконикам, проходящим через точки пересечения окружностей, причём в каждой из точек пересечения касательные, проведённые к коникам, перпендикулярны. (*В. Мокин*)

8. Двое играют на бесконечной клетчатой доске. Один ходит крестиком, другой отвечает ноликом. Начинают крестики.

а) Первый, кто поставит 4 своих значка в ряд, выигрывает. Докажите, что выигрывают крестики.

б) Пусть выигрывает тот, кто первым поставит 6 своих значков в ряд. Докажите, что будет ничья.

(*А. Я. Канель-Белов*)

9. Пусть $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_n\}$ и $B = \{b_1 > b_2 > \ldots > b_n\}$ — разбиение множества $C = \{c_1 < c_2 < \ldots c_{2n}\}$ на непересекающиеся подмножества. Тогда $\sum_i |a_i - b_i|$ инвариантно относительно разбиения $(A, B)$.
(*G. Nicollier, обобщение тождества В. В. Произволова*)

10. а) Площадь поверхности эллипсоида
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
равна $S$. Докажите, что
$$\frac{4}{3}\pi \leqslant \frac{S}{ab + bc + ca} \leqslant 2\pi.$$
б) Докажите неравенство
$$\sqrt{a^2+b^2+\frac{2}{3}ab} \cdot \sqrt{c^2+d^2+\frac{2}{3}cd} + \sqrt{b^2+c^2+\frac{2}{3}bc} + \sqrt{c^2+a^2+\frac{2}{3}ca} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{a^2+c^2+\frac{2}{3}ac} \cdot \sqrt{d^2+b^2+\frac{2}{3}db}.$$
(*Л. Радзивиловский*)

11. Опишите все автоморфизмы группы матриц порядка $n$ над полем из $q = p^k$ элементов. Каково максимально возможное число попарно коммутирующих матриц?
(*А. Я. Канель-Белов, А. М. Елишев, Л. Радзивиловский*)

12. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим случайный процесс, порождающий последовательность $n$ различных натуральных чисел $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Для начала выберем случайным образом величину $X_1$ так, что $P(X_1 = i) = 2^{-i}$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Далее, пусть $1 \leqslant j \leqslant n-1$ и величины $X_1, \ldots, X_j$ уже выбраны. Упорядочим оставшиеся натуральные числа в порядке возрастания: $n_1 < n_2 < \ldots$, а затем выберем $X_{j+1}$ случайно с вероятностями
$$P(X_{j+1} = n_i) = 2^{-i} \quad \text{для каждого} \quad i \in \mathbb{N}.$$
Пусть $Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Докажите, что матожидание $\mathbb{E}(Y_n)$ равно
$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{2^i - 1}.$$
(*IMC-2025, предложили Jan Kuś, Jun Yan*)

13. *Надстройкой* $SX$ над топологическим пространством $X$ называется факторпространство пространства $X \times [0,1]$, полученное стягиванием подмножества $X \times 0$ в одну точку, а $X \times 1$ — в другую.

Если отображение $f\colon SX\to SY$ имеет вид $f(x,a)=(g(x),a)$, $x\in X$, $a\in[0,1]$, то такое отображение называется *надстроечным* (т. е. оно осуществляется по слоям и одинаково в каждом слое). Отображения $f,g\colon X\to Y$ называются *гомотопными* ($g\sim f$), если существует такая гомотопия $\Phi\colon(X,[0,1])\to Y$, что $\Phi(X,0)=f$ и $\Phi(X,1)=g$.
а) Пусть $\mathbb{S}^k$ есть $k$-мерная сфера и $f\colon\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^m$ — непрерывное отображение. Тогда если $2(n-m)+1\leqslant n$, то оно гомотопно надстроечному.
б) Если $2(n-m+1)+1\leqslant n+1$ и при этом отображения $f\sim g\colon\mathbb{S}^n\to\to\mathbb{S}^m$ — надстроечные отображения, то гомотопия $\sim$ также может быть выбрана надстроечной.

(*Теорема Фройденталя*)

14. а) Число $p$ — простое, $k_0,\ldots,k_{p-1}$ — неотрицательные целые, сумма которых меньше чем $p-1$. Докажите, что делится на $p$ величина

$$\sum_{\sigma\in S_p}\prod_{i=1}^{p-1}\binom{i-\sum_{j=0}^{i-1}k_{\sigma(j)}}{k_i}.$$

б) Дана перестановка $\sigma\in S_n$. Её *смещение* $D(\sigma)$ есть величина

$$D(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}|n-\sigma(n)|.$$

При каких $n$ сумма смещений чётных перестановок больше, чем нечётных?

(*Л. Радзивиловский*)

15. а) Пусть $T$ — равносторонний треугольник на евклидовой плоскости $E^2$. Обозначим через $X(T)$ множество всех точек $P\in E^2$, для которых существуют такие аффинные преобразования $f_P\colon E^2\to E^2$, что точка $f_P(P)$ является центром вписанной окружности треугольника $f_P(T)$. Докажите, что $X(T)$ совпадает с множеством всех внутренних точек серединного треугольника для треугольника $T$.
б) (Открытая проблема.) В определении множества $X(T)$ замените термин «центр вписанной окружности» любым из следующих терминов по своему выбору: «центр вневписанной окружности», «центр описанной окружности», «точка пересечения высот», «точка Жергонна», «точка Нагеля», «точка Наполеона», «точка Брокара», «точка Лемуана». Как устроено новое множество $X(T)$ в каждом из этих случаев?

(*В. А. Александров, Е. П. Волокитин, С. А. Малюгин*)