

Решения задач из прошлых выпусков

7.4. Условие. $x, y > 0$. Доказать неравенство: $x^y + y^x > 1$.

(Фольклор)

РЕШЕНИЕ. (См. другое решение: выпуск 9, с. 229–230.) Без ограничения общности можно считать, что $x \leq y < 1$. Если $x = y$, то $x^y = x^x \geq e^{-1/e} > (1/3)^{1/2} > 1/2$, так что $x^y + y^x = 2x^x > 1$. Поэтому будем считать, что $x < y < 1$. Поскольку $x^y + y^x \geq 1$ при $x = 1$ и $y^x > x^x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$, достаточно рассмотреть точки экстремума функции $F(x, y) = x^y + y^x$. Приравнявая нулю её частные производные, получаем систему

$$\begin{cases} yx^{y-1} + \ln(y) \cdot y^x = 0, \\ \ln(x) \cdot x^y + xy^{x-1} = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^y + \frac{x}{y} \ln(y) \cdot y^x = 0, \\ x^y + \frac{x}{y} \frac{1}{\ln(x)} \cdot y^x = 0, \end{cases}$$

откуда $\ln x \ln y = 1$ и $y > e^{-1}$, ибо $y > x$.

Перейдём теперь к *принципу доказательства*, ради которого и публикуется альтернативное решение. Вначале докажем, что $t + e^{-t} > 1$ при $t \in (0, 1]$. При $t = 0$ выполнено равенство, поэтому достаточно доказать строгое возрастание функции $h(t) = t + e^{-t}$ на отрезке $[0, 1]$. Для этого достаточно заметить, что $h'(t) = 1 - e^{-t} > 0$ при $t \in (0, 1]$ и что $h'(0) = 0$.

Теперь предположим, что $x^y + y^x \leq 1$ для данных $x, y > 0$. Пусть $x < a < 1, y > b > e^{-1}$. Тогда

$$x < x^y \leq 1 - y^x < 1 - b^a < 1 - e^{-a}.$$

Решение задачи теперь следует из принципа, идейно родственного принципу сжатых отображений. Сформулируем его в виде леммы:

ЛЕММА (принцип сжатия). Пусть $G: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $G(0) = 0$, $G(z) < z$ при $z > 0$. Пусть $t \in [0, 1]$ таково, что для любого $a \in [0, 1]$ из $t \leq a$ следует $t < G(a)$. Тогда $t = 0$. \square

Положив теперь $G(z) = 1 - e^{-z}$, получаем, что $x = 0$ вопреки предположению. Задача решена.

(М. Вербицкий)

КОММЕНТАРИЙ. Это решение задачи нашёл М. Вербицкий, когда был учеником 57-й школы г. Москвы. В дополнение к уже опубликованному, мы привели это решение (через самоусиливающиеся неравенства), поскольку оно идейно связано с решением задачи 24.8 (см. выпуск 25, с. 187–189). Как утверждает Д. Пойа в своей знаменитой книге «Математика и правдоподобные рассуждения», для иллюстрации метода нужны как минимум два примера. Было бы хорошо привести ещё один, а лучше — два. Мы будем признательны за них читателям.

УПРАЖНЕНИЕ. (а) Величина $(1 - x)^{1/x}$ монотонно убывает на отрезке $[0, 1]$ и стремится к e^{-1} при $x \rightarrow 0$.

(б) Величина $(1 + x)^{1/x}$ монотонно возрастает на отрезке $[0, 1]$ и стремится к e при $x \rightarrow 0$. (А. Я. Канель-Белов)

13.6' (выпуск 27, с. 242). УСЛОВИЕ. а) Пусть A — матрица второго порядка. Тогда

$$\det(A) = \frac{(\operatorname{Tr}(A))^2 - \operatorname{Tr}(A^2)}{2}.$$

б) Пусть A — матрица n -го порядка. Тогда $\det(A)$ есть многочлен с рациональными коэффициентами от величин $\operatorname{Tr}(A)^k$, $1 \leq k < n$.

(Фольклор)

РЕШЕНИЕ. а) Пусть λ_1, λ_2 — собственные числа матрицы A . Тогда λ_1^2, λ_2^2 — собственные числа матрицы A^2 , при этом

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2, \operatorname{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2, \operatorname{Tr}(A^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2.$$

Отсюда

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{2} = \frac{(\operatorname{Tr}(A))^2 - \operatorname{Tr}(A^2)}{2}.$$

б) Имеем

$$\operatorname{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k, \quad \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A . Решение задачи вытекает теперь из классического факта (Э. Б. Винберг, «Курс алгебры», с. 134–136):

Симметрические многочлены от x_i выражаются через элементарные симметрические многочлены

$$t_k = \sum_{i=1}^n x_i^k.$$

КОММЕНТАРИЙ. Пусть

$$s_k(\vec{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}.$$

Тогда матрица A удовлетворяет уравнению Гамильтона — Кэли:

$$A^n + (-1)^k s_k(\vec{\lambda}) A^{n-k} = 0.$$

Любой симметрический многочлен выражается через s_k . Доказательство аналогично случаю элементарных симметрических многочленов. В нулевой характеристике достаточно рассматривать алгебру матриц со следами (т. е. сигнатура расширяется оператором взятия следа), а в положительной характеристике — с коэффициентами многочлена Гамильтона — Кэли.

(А. Я. Канель-Белов)

15.12. Условие. (а) Множество X вершин правильного n -угольника таково, что равна нулю сумма векторов с началом в центре многоугольника и концами в вершинах множества X . Пусть $n = p^\alpha q^\beta$, где p, q — простые числа. Докажите, что для некоторого k множество X можно разбить на непересекающиеся множества, каждое из которых является множеством вершин правильного k -угольника. Докажите, что при любом n , делящимся хотя бы на три различных простых числа, это не всегда верно. (Пара противоположных вершин рассматривается как 2-угольник).

(б) Пусть v_1, \dots, v_n — векторы из центра правильного n -угольника в его последовательные вершины, $a = (a_1, \dots, a_n)$ — такой целочисленный вектор, что $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$. Докажите, что a есть целочисленная линейная комбинация векторов вида

$$e_{d,k} = (\underbrace{0, \dots, 0}_d, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, \dots, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-d-1})$$

при k , делящих n . (По сути, $e_{d,k}$ соответствует сумме векторов в вершины некоторого правильного (n/k) -угольника.)

(И. И. Богданов, Э. Б. Винберг, Г. А. Гальперин, Г. Р. Челноков)

РЕШЕНИЕ. Начнём со второго пункта задачи.

(б) Всевозможные линейные комбинации векторов v_i с рациональными коэффициентами образуют линейное пространство V_n над \mathbb{Q} . Найдём размерность этого пространства. Как известно, корни из единицы n -й степени образуют на комплексной плоскости правильный n -угольник. Напомним, что корень d -й степени из единицы называется *неприводимым*, если он не является корнем из единицы степени меньшей, чем d . Число неприводимых корней d -й степени равно $\varphi(d)$, где функция Эйлера $\varphi(n)$ определяется как количество чисел, не превосходящих n и взаимно простых с ним. Если p_1, \dots, p_k — все простые делители числа n , то

$$\varphi(n) = \frac{p_1 - 1}{p_1} \dots \frac{p_k - 1}{p_k} n.$$

Как известно, многочлен $x^n - 1$ разлагается в произведение неприводимых над \mathbb{Q} многочленов Φ_d :

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x).$$

Корнями Φ_d являются неприводимые корни d -й степени из единицы, а его степень равна $\varphi(d)$.

Пусть $\varepsilon = e^{2i\pi/n}$ — неприводимый корень степени n из единицы. Тогда его минимальный многочлен — это $\Phi_n(x)$ степени $\varphi(n)$. Значит, никакая нетривиальная рациональная комбинация чисел $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{\varphi(n)-1}$ не равняется нулю, иначе получаем противоречие с минимальностью $\Phi_n(x)$. Поэтому векторы $v_1, \dots, v_{\varphi(n)}$ линейно независимы над \mathbb{Q} , и размерность V_n не меньше $\varphi(n)$. С другой стороны, векторы $v_1, \dots, v_{\varphi(n)+1}$ линейно зависимы над \mathbb{Q} (коэффициентами зависимости являются коэффициенты многочлена Φ_n), поэтому вектор $v_{\varphi(n)+1}$ можно выразить линейной комбинацией предыдущих с рациональными коэффициентами. По индукции можно показать, что и все остальные v_i выражаются через v_i с номерами от 1 до $\varphi(n)$, поэтому размерность пространства V_n равна $\varphi(n)$.

Рассмотрим линейный оператор $A: \mathbb{Q}^n \rightarrow V_n$, который вектору $a = (a_1, \dots, a_n)$ ставит в соответствие $\sum_{i=1}^n a_i v_i$.

Очевидно, все $e_{d,k}$ при отображении A переходят в нулевой вектор. Значит, подпространство $W \subset \mathbb{Q}^n$, порождённое векторами $e_{d,k}$, лежит в ядре A . Так как образ оператора A — всё пространство V_n , его ядро имеет размерность $n - \varphi(n)$. Если мы покажем, что W имеет размерность хотя бы $n - \varphi(n)$, из этого будет следовать, что W совпадает

с ядром A , и задача будет почти решена: мы покажем, что искомые векторы — рациональные комбинации векторов $e_{d,k}$.

В свободной абелевой группе \mathbb{Z}^n множество целых линейных комбинаций векторов $e_{d,k}$ образует подгруппу N .

ТЕОРЕМА (Э. Б. Винберг, «Курс алгебры», глава 9, § 1, теорема 5). Для всякой подгруппы N свободной абелевой группы L ранга n существует такой базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ группы L и такие натуральные числа u_1, \dots, u_m ($m \leq n$), что $\{u_1 e_1, \dots, u_m e_m\}$ — базис группы N и $u_i | u_{i+1}$ при $i = 1, \dots, m - 1$. \square

Применим эту теорему. Если $m = n - \varphi(n)$ и все u_i равны ± 1 , то задача решена. Иначе существует такое простое число q , что если рассматривать векторы $e_{d,k}$ над полем $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, то ранг этого множества векторов меньше, чем $n - \varphi(n)$ (если $m < n - \varphi(n)$, годится любое простое, иначе возьмём простой делитель одного из u_i).

Напомним, что характеристическая функция подмножества равна 1 на элементах данного подмножества и 0 на остальных элементах множества. Далее мы будем интерпретировать 0 и 1 как элементы поля $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Нам потребуется

ЛЕММА. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$. Рассмотрим объединение

$$m = p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1}$$

клетчатых параллелепипедов размерности $p_1 \times \dots \times p_k$. Линией типа i назовём множество из p_i клеток, находящихся в одном параллелепипеде и различающихся только в i -й координате. Тогда существует биекция между клетками этих параллелепипедов и остатками по модулю n , при которой линии типа i ставятся в соответствие множествам $e_{d,n/p_i}$.

Доказательство леммы. В один параллелепипед войдут числа, дающие один и тот же остаток при делении на m . Сопоставим клетке $(0, 0, \dots, 0)$ какого-то параллелепипеда остаток $r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Тогда клетке (r_1, \dots, r_k) сопоставим остаток $r + r_1 n/p_1 + \dots + r_k n/p_k$, и понятно, что это соответствие биективно. \square

Покажем теперь, что в клетчатом параллелепипеде $d_1 \times \dots \times d_k$ характеристические функции линий порождают (над любым полем) пространство размерности $d_1 \dots d_k - (d_1 - 1) \dots (d_k - 1)$. Найдётся именно столько клеток, у которых хотя бы одна координата равна 0, назовём эти клетки *крайними*. Покажем, что линейные комбинации линий могут иметь любую расстановку чисел в крайних клетках. Это делается

индукцией по k . База очевидна, а переход осуществляется так: линиями типа 1 делается нужная расстановка в клетках с первой нулевой координатой, потом оставшееся разбивается на *слои* с одинаковой первой координатой, и в каждом из них действуем по предположению индукции.

Размерности складываются по всем параллелепипедам, получаем $n - \varphi(n)$, что и требовалось.

Для **решения основной задачи** нужно ещё показать, что любой целочисленный вектор v из \mathbb{Q}^n , являющийся рациональной линейной комбинацией векторов $e_{d,k}$, является их *целочисленной* линейной комбинацией. Пусть $v = \sum r_{d,k} e_{d,k}$, где $r_{d,k}$ — несократимые дроби с наименьшим общим знаменателем q . Можно положить $r_{d,k} = p_{d,k}/q$, где $p_{d,k}$ и q взаимно просты в совокупности. Тогда $qv = \sum p_{d,k} e_{d,k}$ — целое.

(а) Из пункта (б) следует, что характеристическая функция множества X — целочисленная линейная комбинация векторов вида $e_{d,p^{\alpha-1}q^{\beta}}$ и $e_{d,p^{\alpha}q^{\beta-1}}$.

Пользуясь интерпретацией из леммы 1, сведём задачу к такой.

Дана прямоугольная таблица и в ней подмножество X , характеристическая функция которого — целочисленная линейная комбинация линий. Докажите, что X — дизъюнктное объединение линий.

Решение. Назовём линию (строку или столбец) *однородной*, если либо все её клетки входят в X , либо все её клетки не входят в X . Если X — не объединение строк, то имеется неоднородная строка a . Если X — не объединение столбцов, то имеется неоднородный столбец b . Берём эти строку и столбец и получаем, что в пересечении некоторых двух строк и двух столбцов множество X выглядит либо так: $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}$, либо так: $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$. В обоих случаях суммы чисел на диагоналях этой маленькой таблички не равны, но разность таких сумм — инвариант при добавлении и вычитании линий.

Пункт задачи про числа n , имеющие больше двух простых делителей, может быть переформулирован так.

Дан клетчатый k -мерный ($k > 2$) параллелепипед. Найдите в нём подмножество X , характеристическая функция которого — целочисленная линейная комбинация линий, но само X не является дизъюнктным объединением линий.

Решение. Построим такое множество, которое вообще не содержит ни одной линии. При этом можно считать, что размерность равна трём. Рассмотрим в параллелепипеде $a \times b \times c$ следующие линии:

$$(*, 0, 0) \text{ с коэффициентом } 1;$$

$(i, *, 0)$ при $2 \leq i \leq a$ с коэффициентом -1 ;
 $(i, j, *)$ при $2 \leq i \leq a$ и $2 \leq j \leq b$ с коэффициентом 1 .

Здесь, например, $(i, *, j)$ обозначает линию, состоящую из всех клеток, у которых первая координата равна i , а третья j .

Получится характеристическая функция множества, состоящего из одной клетки и параллелепипеда $(a - 1) \times (b - 1) \times (c - 1)$.

Основные свойства круговых многочленов и доказательство неприводимости (весьма нетривиальное) см. Канель-Белов А. Я. О круговых многочленах // Математическое просвещение. Сер. 3. М.: МЦНМО, 2004. Вып. 8. С. 181–184.

(И. В. Митрофанов)

26.3. Условие. Пусть n — натуральное число, p — простое число. Докажите, что число способов представить n в виде суммы нескольких натуральных чисел, идущих в порядке невозрастания и не делящихся на p , равно числу способов представить n в виде суммы натуральных чисел, среди которых нет p одинаковых.

(А. Я. Канель-Белов)

Решение 1. Будем рассматривать разбиения, в которых числа упорядочены по невозрастанию. С таким разбиением числа n можно связать таблицу Юнга D . Длины её строк равны слагаемым разбиения, а количество клеток в ней равно $|D| = n$. Докажем, что количество разбиений числа n , не удовлетворяющих первому условию, равно количеству разбиений числа n , не удовлетворяющих второму условию. Будем считать утверждение задачи доказанным для всех $m < n$ (случай $n = 1$ тривиален). Справедливы следующие утверждения.

- С разбиением D , удовлетворяющим первому условию, можно проделать следующую операцию: взять разбиение E , все члены которого делятся на p , и объединить с D (классы нового разбиения — пересечения классов двух исходных разбиений). Так можно получить любое разбиение, и если E непустое, то новое разбиение $D \cup E$ не будет удовлетворять первому условию. При этом E получается из некоторого разбиения E' удлинением строк в p раз, и $|D \cup E| = |D| + p|E'|$.
- С разбиением B , удовлетворяющим второму условию, можно проделать следующую операцию: взять разбиение F , все столбцы которого делятся на p , и объединить с B . Так можно получить любое разбиение, и если F непустое, то новое разбиение $B \cup F$ не будет удовлетворять второму условию. При этом F получается из некоторого разбиения F' удлинением столбцов в p раз, и $|B \cup F| = |B| + p|F'|$.

Решение задачи вытекает из этих двух утверждений индукцией. В самом деле, пусть $|\bar{D}_1(n)|$ есть количество диаграмм, из n клеток, не удовлетворяющих первому условию, $|D_1(n)|$ — удовлетворяющих, $|D(n)| = |\bar{D}_1(n)| + |D_1(n)|$ есть количество всех диаграмм из n клеток. Пусть $|\bar{D}_2(n)|$ есть количество диаграмм из n клеток, не удовлетворяющих второму условию, $|D_2(n)|$ — удовлетворяющих, $|D(n)| = |\bar{D}_2(n)| + |D_2(n)|$. Мы установили равенства

$$|\bar{D}_1(n)| = \sum_{k=1}^n |D(k)||D_1(n-pk)|, \quad |\bar{D}_2(n)| = \sum_{k=1}^n |D(k)||D_2(n-pk)|,$$

из которых равенство $|D_1(n)| = |D_2(n)|$ следует очевидной индукцией.

РЕШЕНИЕ 2. Сократим двумя способами выражение

$$\frac{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots}{(1-x^p)(1-x^{2p})(1-x^{3p})(1-x^{4p})\dots}$$

1) Сократим равные множители в числителе и знаменателе. Остаётся

$$\prod_{k \text{ не делит } p}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} = \prod_{k \text{ не делит } p}^{\infty} (1+x^k+x^{2k}+\dots+x^{nk}+\dots)$$

и коэффициент при x^n есть число разбиений числа n на слагаемые, не делящиеся на p .

2) Для каждого m разделим $(1-x^{pm})$ в числителе на $(1-x^m)$ в знаменателе, получим $(1+x^m+\dots+x^{(p-1)m})$. Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots}{(1-x^p)(1-x^{2p})(1-x^{3p})(1-x^{4p})\dots} = \\ & = (1+x+\dots+x^{p-1})(1+x^2+\dots+x^{2(p-1)})\dots(1+x^m+\dots+x^{(p-1)m})\dots \end{aligned}$$

Коэффициент при x^n в этом выражении есть число разбиений числа n на слагаемые, среди которых нет p одинаковых.

(А. Я. Канель-Белов)

26.4' (выпуск 27, с. 249). Условие. (а) Четыре пешехода идут с постоянной скоростью. Известно, что первый и второй встретились со всеми. Докажите, что третий встретился с четвёртым либо их скорости равны. (Фольклор)

(б) Обобщите и решите задачу для случая попадания $k+1$ k -мерной птички в $(k-1)$ -мерное подпространство.

(А. Я. Канель-Белов)

РЕШЕНИЕ. (а) Рассмотрим *мировые линии* пешеходов на диаграмме «пространство-время». Они являются прямыми, и если три мировые линии попарно пересекаются, то они лежат в одной плоскости. По условию первая и вторая мировая линия пересекаются со всеми. Поэтому все мировые линии лежат в одной плоскости. Значит, мировые линии третьего и четвёртого пешеходов либо пересекаются (т. е. третий встречается с четвёртым), либо параллельны (тогда скорости 1 третьего и четвёртого равны).

(б) В случае $k + 1$ птичек в многомерном пространстве верен аналогичный факт. Пусть мировые линии всех птичек — прямые в общем положении, и пусть мировые линии любых k птичек лежат в некотором $(k - 1)$ -мерном подпространстве. Тогда все $k + 1$ мировых линий лежат в $(k - 1)$ -мерном подпространстве.

КОММЕНТАРИЙ. На родственную тему опубликована задача 26.4 (выпуск 26, с. 266; решение: выпуск 27, с. 266–269): если $k + 1$ птичек попадают в $(k - 1)$ -мерное подпространство $k + 1$ раз, то они всё время находятся в $(k - 1)$ -мерном пространстве.

Расположениям аффинных подпространств в аффинном пространстве посвящена обширная литература. В книге «Элементы математики в задачах. Через олимпиады и кружки — к профессии» (М.: МЦНМО, 2018) имеется подборка задач на фазовое пространство (А. Я. Канель-Белов, «Фазовые пространства», с. 539–540). В дальнейшем она инициировала проект на 32-й Летней конференции международного математического Турнира городов: А. Еннэ, А. Плосконосов, А. Рябичев, Е. Хинко, «Проект 5. Фазовые пространства», <https://www.turgor.ru/1ktg/2020/5/index.html>.

(А. Я. Канель-Белов)

27.1. Условие. Можно ли заполнить 99% пространства попарно непересекающимися шарами? (Имеется в виду заполненная доля объёма шара, радиус которого стремится к бесконечности.)

(А. К. Ковальджи, А. Я. Канель-Белов)

Ответ. Да, можно.

Решение. Пусть ρ — плотность упаковки пространства шарами одинакового радиуса (под плотностью понимается предел заполненной доли объёма большого шара при стремлении радиуса к бесконечности). Выберем шар B очень большого радиуса и заполним его шарами радиусом 1. Доля пустого пространства в шаре B составит $1 - \rho$. Это пустое пространство состоит из ячеек, каждая из которых ограничена конечным числом фрагментов сфер. Нам потребуется

ЛЕММА. Дана область Ω , ограниченная конечным числом гладких участков (в нашем случае — фрагментов сфер). Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в область Ω можно поместить конечную систему непересекающихся шаров одинакового радиуса так, чтобы плотность этой системы была не меньше $\rho - \varepsilon$.

Доказательство леммы. Заполним пространство шарами некоторого радиуса r , а затем оставим только шары, полностью лежащие в области Ω . Плотность этой системы в области Ω будет меньше ρ , так как удалены шары, лежащие в r -окрестности границы. При уменьшении r объём этой окрестности стремится к нулю, поэтому доля шаров, удалённых из Ω , также стремится к нулю, а плотность системы стремится к ρ , что и требовалось. \square

В силу леммы, плотность пустого пространства в некоторой ячейке Ω между шарами радиусом 1 можно сделать сколь угодно близкой к $1 - \rho$. При данном r это пустое пространство представляет собой область Ψ , граница которой вновь ограничена конечным количеством фрагментов сфер. Помещая в Ψ шары одинакового радиуса, в силу леммы можно сделать долю пустого пространства в ячейке Ω сколь угодно близкой к $(1 - \rho)^2$. Итерируя эту процедуру, можно сделать сколь угодно малой долю пустого пространства в каждой ячейке, а значит, и во всём пространстве.

(А. К. Ковальджи, А. Я. Канель-Белов)

27.8. Условие. Из $\binom{n}{2}$ правильных шестиугольников составили треугольную доску T_n со стороной n .

а) Докажите, что её нельзя разбить на ряды из троек правильных шестиугольников, стоящих в ряд.

б) Докажите, что её можно разбить на доски T_2 из троек шестиугольников тогда и только тогда, когда $n \equiv 0, 2, 9, 11 \pmod{12}$.

Допустим, что мы можем класть плитки из вещества или антивещества. Если плитка из вещества целиком лежит на плитке из антивещества или наоборот, то они аннигилируют. Можно ли замостить T_n в этом случае так, чтобы после аннигиляции каждая клетка была покрыта ровно по разу?

в) Докажите, что T_n замощается досками T_2 (с возможным использованием антивещества) в точности тогда, когда $n \not\equiv 1 \pmod{3}$.

г) Докажите, что T_n замощается палочками (с возможным использованием антивещества) в точности тогда, когда $n \equiv 0, 8 \pmod{9}$.

(Дж. Х. Конвей, Дж. К. Лагариас [1])

РЕШЕНИЕ (см. [2, 3]). Фигуру, которую нужно разбить на другие фигуры поменьше, будем называть *доской*, а фигуры, на которые разбиваем доску, — *плитками*. Плитки можно поворачивать. Сам процесс разбиения будем называть *замощением*.

Разбиению фигуры T_n на фигуры T_2 и палочки сопоставим разбиение лесенки (рис. 1) на трёхклеточные уголки (рис. 2), палочки из трёх клеток и диагональки (рис. 3).

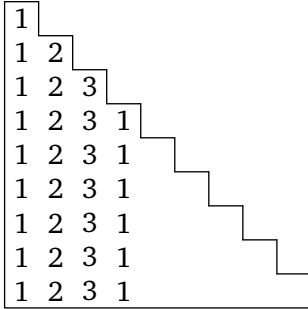


Рис. 1. Лесенка

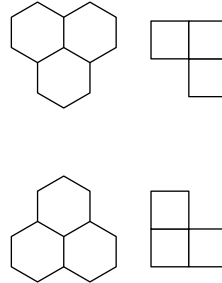


Рис. 2. Соответствие уголков

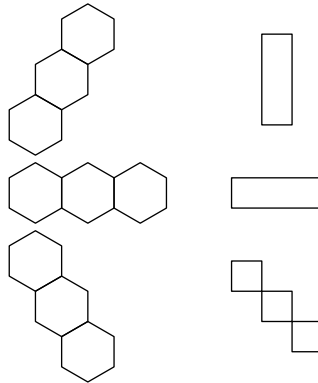


Рис. 3. Соответствие палочек

Решение пункта (а). Первое, что логично проверить, — делимость. Фигура T_n состоит из $n(n + 1)/2$ клеток, и количество клеток в T_n делится на 3 тогда и только тогда, когда $n \equiv 0 \pmod{3}$ или $n \equiv 2 \pmod{3}$. Значит, при $n \equiv 1 \pmod{3}$ ответ отрицательный.

Раскрасим столбцы нашей лесенки в 3 цвета, чередуя их циклически (рис. 1). Будем покрывать доску палочками. Заметим, что каждая палочка покрывает или 3 клетки одного цвета, или по одной клетке каждого цвета. На каждом шаге разность между количествами покрытых клеток любых двух цветов кратна 3.

Рассмотрим остатки при делении n на 9. При $n \equiv 2, 3, 5, 6 \pmod{9}$ разница между количествами клеток цвета 1 и цвета 2 на всей доске не кратна 3. Но при остатках 0 и 8 разница для любых двух цветов кратна 3 и противоречие не получается. Будем использовать более мощный метод — определяющие соотношения в группах.

Рассмотрим группу, порождённую элементами U и R . Сопоставим каждой плитке определяющее соотношение: для горизонтальной палочки $R^{-3}U^{-1}R^3U = 1$, для вертикальной $U^3R^{-1}U^{-3}R = 1$, для диагональной $(UR^{-1})^3(U^{-1}R)^3 = 1$, а для лесенки $R^n(UR^{-1})^nU^{-n}$.

Система образующих $S = \{U, U^{-1}, R, R^{-1}\}$ удовлетворяет условию $S = S^{-1}$. Графом Кэли по такой системе образующих называется граф, вершинами которого являются элементы группы, а элемент g соединён ребром в точности с теми элементами, которые получаются домножением элемента g на элемент из S . Каждому определяющему соотношению соответствует замкнутый контур на этом графе. На рис. 4 изображены контуры, соответствующие лесенке при различных остатках

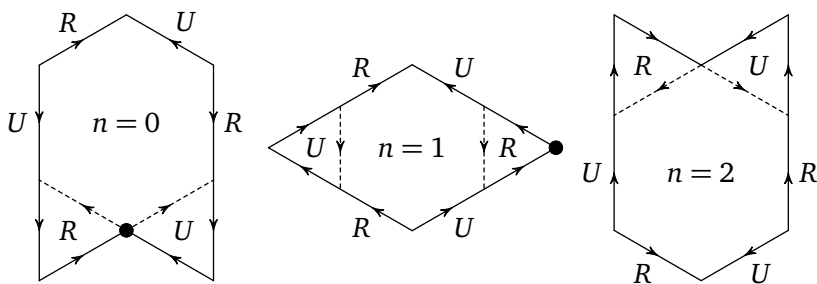


Рис. 4. Контур лесенок

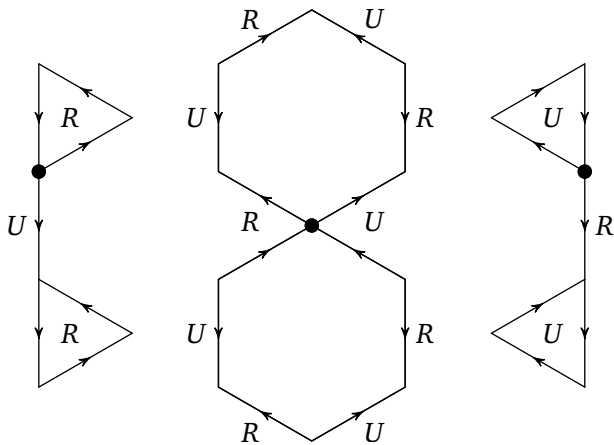


Рис. 5. Контур палочек

ках от деления n на 3, а на рис. 5 — контуры палочек горизонтальной, диагональной и вертикальной соответственно слева направо.

Рассмотрим количество треугольников из букв U в контуре слова с учётом знака (рис. 4 и рис. 5). Будем засчитывать треугольник с плюсом, если обходим его против часовой стрелки, и с минусом в противном случае. В слове любой палочки либо нет треугольников, либо имеется два треугольника из букв U , причём они пройдены в противоположных направлениях. Поэтому значение инварианта для одной палочки равно 0. При умножении двух путей значения инвариантов складываются, поэтому если плитка T_n состоит из палочек, то инвариант её контура равен 0.

Но в контуре фигуры T_n могут быть только такие треугольники, которые мы обходим против часовой стрелки. Поэтому инвариант фигуры T_n не равен 0, что противоречит предположению, что T_n можно разбить на палочки.

Решение пункта (б). Покажем, что при $n \equiv 0, 2, 9, 11 \pmod{12}$ разрезание возможно.

Пусть $n = 12k + r$, где $r = 0, 2, 9, 11$. Проведём индукцию по параметру k для каждого из остатков по отдельности. База для $n = 2$ очевидна, а для $r = 9, 11, 0$ представлена на рис. 6 (при $r = 11, 0$ берём базу для $r = 9$ и дорисовываем снизу нужные плитки).

Чтобы провести переход индукции, нужно к лесенке со стороной $n = 12k + r$ дорисовать внизу слева направо прямоугольник $r \times 12$, а также $k - 2$ квадрата 12×12 и фигуру T_9 . Разрезание прямоугольников $r \times 12$ и квадрата 12×12 представлено на рис. 7, фигура T_9 разрезана в базе индукции.

Докажем невозможность замощения для оставшихся n . При $n \equiv 1, 4, 7, 10 \pmod{12}$ замощение невозможно по соображениям делимости. Рассмотрим случаи $n \equiv 3, 5, 6, 8 \pmod{12}$.

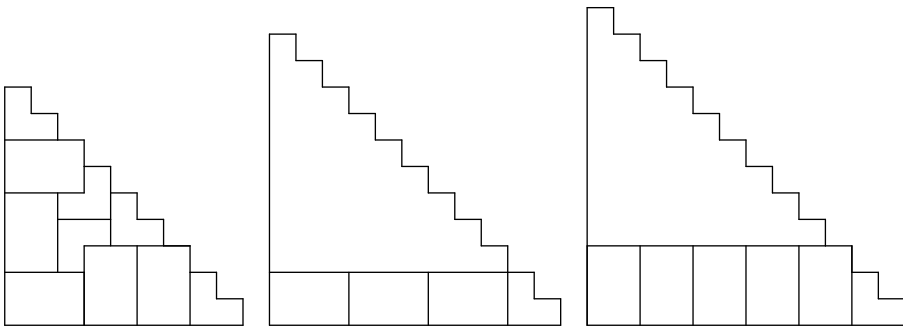


Рис. 6. База

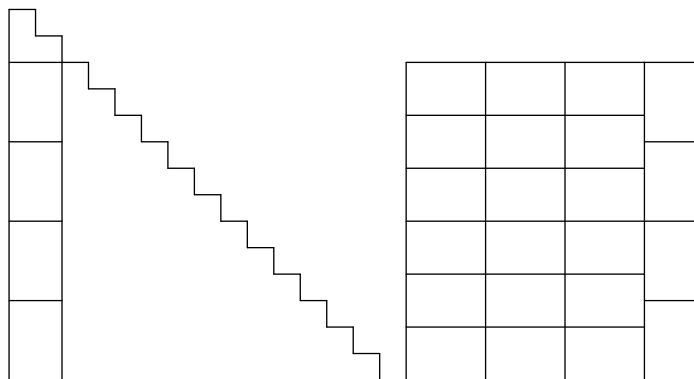


Рис. 7. Переход

Заметим, что определяющие соотношения на плитки T_2

$$R^2(UR^{-1})^2U^{-2} \quad \text{и} \quad R^{-2}(U^{-1}R)^2U^2$$

выполняются. Контуры уголков выглядят так же, как контуры лесенок при $n \equiv 0, 2 \pmod{3}$. Рассмотрим следующий инвариант: количество треугольников без основания (двузвенных ломанных U^2) с учётом знака. Для T_2 инвариант равен 1 или -1 . Для T_n при $n \equiv 0 \pmod{3}$ инвариант равен $\frac{n}{3}$, а при $n \equiv 2 \pmod{3}$ инвариант равен $\left[\frac{n+1}{3}\right]$. (У нас есть $\left[\frac{n}{3}\right]$ треугольников, у которых пропадает основание, когда мы обходим шестиугольник $(RU^{-1})^n$; при $n \equiv 2 \pmod{3}$ кроме $\left[\frac{n}{3}\right]$ треугольников остаётся ещё U^2 , что даёт ещё один треугольник без основания.) В общем случае инвариант для T_n равен $\left[\frac{n+1}{3}\right]$. Так как инвариант для T_2 равен 1 или -1 , т. е. нечётному числу, то количество плиток T_2 сравнимо по модулю 2 с суммарным инвариантом для всех этих плиток. Количество плиток T_2 равно $\frac{n(n+1)}{2 \cdot 3}$. Так как 2 и 3 взаимно просты, получаем соотношение

$$\left[\frac{n+1}{3}\right] \equiv \frac{n(n+1)}{2} \pmod{2}.$$

При $n \equiv 3, 8 \pmod{12}$ левая часть сравнима с 1, а правая с 0. При $n \equiv 5, 6 \pmod{12}$ левая часть сравнима с 0, а правая с 1. Это доказывает невозможность разбиения для указанных n , т. е. для $n \equiv 3, 5, 6, 8 \pmod{12}$.

Решение пункта (в). Покажем, что при $n \not\equiv 1 \pmod{3}$ разбиение с использованием антивещества возможно. Будем вести доказательство аналогично предыдущему пункту. Пусть $n = 3k + r$. База для $r = 0$

1		
13	12	
3	32	2

Рис. 8. Замощение

1	4	4
1,3	1,2	4
3	3,2	2

Рис. 9. Замощение с использованием антивещества

представлена на рис. 8, для $r = 2$ это сама плитка T_2 . Для перехода индукции нужно ещё научиться замощать квадрат 3×3 и прямоугольник 2×3 . Последний замощается очевидным образом, а замощение первого представлено на рис. 9.

Решение пункта (г). Для $n \equiv 1, 4, 7 \pmod{9}$ замощение невозможно по соображениям делимости. Для $n \equiv 2, 3, 5, 6 \pmod{9}$ мы доказали невозможность разбиения в пункте (а) при помощи раскраски. Остались $n \equiv 0, 8 \pmod{9}$. При таких n разбиение возможно с использованием антивещества. Пусть $n = 9k + r$. На рис. 10 представлено разбиение фигуры T_9 в качестве базы индукции. Для перехода нужны прямоугольники 8×9 и 9×9 , которые легко замощаются без использования антивещества.

1								
	1							
	4	1						
	4	3	2					
7	74	75	63	2				
		5	6	3	2			
		5	6					

Рис. 10. Замощение палочками

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Conway J. H., Lagarias J. C. Tilings with polyominoes and combinatorial group theory // J. Combin. Theory Ser. A. 1990. Vol. 53, № 2. P. 183–208.

2. Thurston W. P. Conway's tiling groups // Amer. Math. Monthly. 1990. Vol. 97, № 8. P. 757–773.

3. Табачников С., Фукс Д. Невозможные замощения // Квант. 2011. № 2. С. 19–26.

(Т. Приходько)

35.11. Условие. Прямая пересекает плоскости граней $B_0C_0D_0$, $C_0D_0A_0$, $D_0A_0B_0$, $A_0B_0C_0$ тетраэдра $ABCD$ в точках A_0 , B_0 , C_0 , D_0 соответственно. Докажите, что середины отрезков AA_0 , BB_0 , CC_0 , DD_0 лежат в одной плоскости.
(С. В. Маркелов, предложил А. А. Заславский)

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим многомерный аналог задачи. Пусть прямая пересекает плоскости граней n -мерного симплекса $A_0A_1 \dots A_n$ в точках B_0, B_1, \dots, B_n (точка B_0 лежит в плоскости $A_1 \dots A_n$ и т. д.). Докажем, что середины отрезков A_iB_i лежат в одной гиперплоскости.

Составим из нормированных барицентрических координат точек B_0, B_1, \dots, B_n матрицу B порядка $n + 1$. Она обладает следующими свойствами.

1. Диагональные элементы равны нулю, поэтому след матрицы равен нулю.
2. Ранг равен 2.
3. Вектор, все координаты которого равны 1, — собственный, и соответствующее собственное число равно 1.

Из этих свойств следует, что собственными числами матрицы B будут 0 (с кратностью $n - 1$), 1 и -1 . Поэтому у матрицы $(E + B)/2$, составленной из барицентрических координат середин отрезков A_iB_i , одно из собственных чисел равно нулю. Значит, середины этих отрезков лежат в одной гиперплоскости.
(А. Заславский)