Задача Герко о чемпионах

М. Н. Вялый

Все пункты этой задачи решаются по индукции, причем сложность рассуждений резко растет.

Начнем с решения пункта а). База индукции очевидна: один победитель единственного соревнования из двоих — это уже половина.

Пусть есть пример 2^n спортсменов, упорядоченных по силе в n видах спорта так, что среди них 2^{n-1} возможных победителей, обозначим такой пример C_n.

Опишем пример C_{n+1} из 2^{n+1} спортсменов, упорядоченных по силе в $(n+1)$-м виде спорта так, что среди них 2^n возможных победителей. Разделим спортсменов на две равные группы A и A'. Будем считать, что в видах спорта с 2-го по $(n+1)$-й спортсмены в каждой из групп упорядочены как в примере C_n, в 1-м виде спорта любой из A' сильнее любого из A, а в остальных видах — наоборот.

Если первым провести соревнование по 1-му виду спорта, то останется группа A', если любое другое — останется группа A. Учитывая, что в примере C_n есть 2^{n-1} возможных победителей, получаем $2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$ возможных победителей в примере C_{n+1}.

б) Укажем для каждого вида спорта спортсмена, который при любом порядке проведения соревнований выбывает в этом виде или раньше (независимо от того, каким по очереди проводится этот вид спорта). Построение индуктивное.

Для 1-го вида соревнований — это самый слабый в 1-м виде.

Пусть уже построено множество $A_k=\{a_1,\ldots,a_k\}$ спортсменов такое, что a_i выбывает в i-м виде спорта или раньше.

Из спортсменов, не входящих в множество A_k, выберем самого слабого в $(k+1)$-м виде спорта, обозначим его через a_{k+1}. Докажем, что a_{k+1} выбывает в $(k+1)$-м виде спорта или раньше при любом порядке соревнований. Пусть $(k+1)$-й вид спорта проходит r-м по порядку, а из множества A_k за первые $r-1$ соревнований выбыло w человек. В r-м соревновании выбывает 2^{n-r} человек. Поэтому a_{k+1} проходит в следующий тур только при выполнении условия $2^{n-r}\leqslant k-w$. Но после $(k+1)$-го вида спорта должны пройти соревнования по не менее чем $k-w$ видам спорта с номерами из множества $\{1,\ldots,k\}$. Поэтому $k-w\leqslant n-r<2^{n-r}$. Таким образом, a_{k+1} выбывает в $(k+1)$-виде спорта или раньше.

в) Обратим внимание на то, что в конструкции, описанной в пункте а), есть произвол в выборе соревнования, отбирающего группу A. Оказывается, что *максимальное число возможных победителей из* 2^n

спортсменов, соревнующихся в ***каких-то*** *n видах спорта из $(n+1)$-го возможного, равно 2^n-1.*

Прежде чем доказывать это утверждение, поясним коротко, как использовать его для решения пункта в). База индукции по-прежнему очевидна. Для индуктивного перехода повторим рассуждение пункта а) и заметим, что из группы A' победителями можно сделать 2^n-n человек, а из A — 2^n-1 человек. Итого получаем $2^n-n+2^n-1=2^{n+1}-(n+1)$ возможных победителей.

Нужную оценку для числа возможных победителей в соревнованиях по n видам спорта из $(n+1)$-го возможного мы получим, доказав более сильное утверждение: *существует такой пример E_n из 2^n спортсменов, упорядоченных в $(n+1)$-м виде спорта, что выбором n видов спорта и порядка их проведения можно сделать победителями 2^n-1 участников, а единственному исключительному участнику (будем называть его* ***аутсайдером****) можно обеспечить выход в финал.*

База при $n=1$ очевидна (два соревнования, в каждом из которых спортсмены упорядочены одинаково).

Индуктивный переход. Строим пример E_{n+1}, исходя из существования примера E_n. Опять разделим 2^{n+1} спортсменов на равные группы B и B'. Будем считать, что в 1-виде спорта любой из B' сильнее любого из B, в остальных видах — наоборот, а в видах со 2-го по $(n+2)$-й спортсмены внутри B и B' упорядочены, как в примере E_n. Дополнительно предположим, что аутсайдер в B — самый сильный среди B в 1-м виде спорта.

Проводя первым 1-й вид спорта, получим 2^n-1 возможных победителей из B', причем при некотором порядке проведения соревнований аутсайдер из B' выйдет в финал (индуктивное предположение).

Если вообще не проводить соревнования по 1-му виду спорта, то в первом соревновании выбывают все из B', а далее проводится $n-1$ соревнование. По индуктивному предположению выбором вида спорта для первого соревнования и порядка проведения соревнований по остальным видам спорта можно сделать победителями 2^n-1 спортсменов из B.

Осталось объяснить, как сделать победителем аутсайдера в B. Для этого *первым проводим тот вид соревнований, который является последним при порядке соревнований, обеспечивающем выход аутсайдера в финал.* После этого останутся только спортсмены из B. Далее проводим соревнования в таком порядке, который обеспечивает выход аутсайдера из B в финал, а завершаем — 1-м видом спорта. В нем аутсайдер побеждает.