Задача об объеме симметризации выпуклого множества

Р. Н. Карасёв

Симметризацией выпуклого множества называется множество, составленное из середин отрезков, соединяющих точки множества и центрально-симметричного ему. В 1985 году английские математики Роджерс и Шепард доказали, что объем симметризации выпуклого компакта в n-мерном пространстве не превосходит $2^{-n}\binom{2n}{n}$ объема исходного компакта. В статье доказывается этот результат при $n = 3$ и обсуждаются некоторые вопросы и идеи, возникающие в процессе доказательства.

1. Формулировка основного результата

Пусть A и B — множества (фигуры) в трехмерном пространстве. *Суммой Минковского* этих множеств называется множество

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Оно состоит из объединения всех точек, образованных сдвигами множества A на векторы из B (или наоборот). Определим операцию умножения фигуры на число. Пусть A — множество, λ — число. Тогда по определению

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Это образ фигуры при гомотетии с коэффициентом λ и центром в начале координат.

Множество, составленное из середин отрезков, один из концов которых лежит на исходной фигуре, а второй — на фигуре, ей центрально-симметричной, называется *симметризацией* (*по Минковскому*) исходной фигуры. Легко понять, что симметризация фигуры X — это множество $\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}X$; заметим, что оно всегда центрально-симметрично и выпукло, если X выпукло.

Обозначим объем множества X через $|X|$. Целью работы является доказательство следующего неравенства:

Теорема 1 (Роджерс – Шепард). *Пусть X — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^3$. Тогда*

$$|X - X| \leqslant 20|X|, \tag{1}$$

причем для правильного симплекса достигается равенство.

Поскольку $|\lambda X| = |\lambda|^3|X|$, то для объема симметризации

$$|\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}X| \leqslant \frac{5}{2}|X|. \tag{2}$$

Случай равенства в (2) составляет содержание следующей задачи, предложенной на Всероссийской олимпиаде школьников по математике в 1998 году:

Задача 1 (А. Я. Канель). *Даны два центрально-симметрично расположенных правильных тетраэдра с ребром $\sqrt{2}$ — T_1 и T_2. Найдите объем фигуры, состоящей из середин отрезков с концами в T_1 и T_2 соответственно.*

Решение этой задачи в общих чертах таково. Заметим, что искомая фигура Φ при параллельных переносах одного из тетраэдров также подвергается параллельному переносу, что не влияет на ее объем. Тогда можно разместить оба тетраэдра в единичном кубе так, что каждый будет своими вершинами упираться в четыре вершины куба. С помощью несложных векторных равенств можно показать, что Φ выпукла и является выпуклой оболочкой середин ребер куба. Тем самым Φ есть кубооктаэдр, объем которого легко вычисляется и равен $5/6$, что составляет $5/2$ от объема тетраэдра.

Для пространства произвольной размерности n теорема 1 верна в следующей формулировке:

$$|X - X| \leqslant \binom{2n}{n}|X|.$$

Доказательство общего случая можно найти в [1]. Обобщение приводимого ниже доказательства на случай произвольной размерности требует доказательства оценки для *смешанных объемов*, которая в многомерном случае все еще остается гипотезой (см. [2, гл. 4, §7] и [3]).

2. Смешанные объемы

Лемма 1. *Функция $|A+tB|$ при $t \geqslant 0$ является многочленом третьей степени $c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3$ для любых двух выпуклых множеств A и B.*

Вместо доказательства леммы рассмотрим в качестве иллюстрации такой пример: A — некоторый многогранник, а B — единичный шар. В этом случае множество $A + \varepsilon B$ является ε-окрестностью многогранника (т.е. множеством точек, удаленных от A не более, чем на ε). Можно описать это множество так: это сам многогранник, слои толщиной ε на гранях многогранника (это в точности точки, для которых ближайшая точка многогранника лежит на грани), цилиндрические сектора на ребрах многогранника (для этих точек ближайшие точки — на ребрах), и куски шаров радиуса ε, ограниченные выходящими из вершин многогранными углами (это множество точек, ближайшими к которым являются вершины многогранника). Строение $A + \varepsilon B$ сразу дает формулу:

$$|A + \varepsilon B| = |A| + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3.$$

Здесь c_1 — площадь поверхности A (на самом деле *площадь* поверхности некоторой фигуры Φ *по Минковскому* определяется равенством $S(\Phi) = \dfrac{d}{d\varepsilon}|\Phi + \varepsilon B|$ при $\varepsilon = 0$).

Коэффициент c_2 равен $\sum \frac{1}{2} l_i(\pi - \alpha_i)$, где l_i — длина i-го ребра, α_i — двугранный угол при этом ребре, сумма берется по всем ребрам. Отметим, что если мы нарисуем фиктивное ребро на грани многогранника, то оно внесет нулевой вклад в сумму, так как двугранный угол при нем будет равен π.

Коэффициент c_3 при ε^3 равен $(4/3)\pi$, так как при больших ε этот коэффициент играет главную роль в выражении, а $A + \varepsilon B$ — это почти шар εB, объем которого и есть $\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$.

Обратим внимание на то, что даже если A не является многогранником, то $|A+\varepsilon B|$ тем не менее является многочленом. В самом деле, можно найти многогранники, сколь угодно близкие к A. Объемы сумм Минковского для таких многогранников (многочлены) будут приближаться к $|A+\varepsilon B|$. Теперь достаточно проделать небольшое упражнение по анализу и понять, что если функция сколь угодно близко приближается многочленом фиксированной степени, то она сама многочлен той же или меньшей степени.

Аналогичное рассуждение показывает, что коэффициенты c_i близки для близких друг к другу многогранников, что не так уж очевидно при выражении этих коэффициентов через площади поверхностей и длины ребер.

Заметим также, что если A — гладкая выпуклая фигура, а не многогранник, то c_3 — это интеграл от гауссовой кривизны (по поверхности фигуры), а c_2 — интеграл от средней кривизны. Величины c_k иногда называют *функционалами Минковского.*

Понятие *смешанного объема* (см. [4]) возникает при рассмотрении сумм нескольких множеств. Приведем соответствующее определение.

Рассмотрим для n выпуклых компактов (т. е. ограниченных и замкнутых множеств) X_i в n-мерном пространстве объем суммы Минковского $t_1X_1+t_2X_2+\ldots+t_nX_n$, $t_i \geqslant 0$. Утверждается, что это многочлен степени n от переменных t_i, поэтому его можно записать в виде:

$$|t_1X_1+t_2X_2+\ldots+t_nX_n| = \sum_{1\leqslant i_j\leqslant n} V(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}) t_{i_1}t_{i_2}\ldots t_{i_n},$$

где коэффициенты при равных одночленах полагаем равными. Эти коэффициенты $V(X_{i_1}, \ldots, X_{i_n})$ и называются *смешанными объемами.*

Аналогично суммам двух множеств, существование смешанных объемов легче доказать для случая, когда X_i — многогранники. В этом случае объем суммы Минковского допускает явное (но довольно неудобное) выражение через объемы граней разных размерностей. Для произвольных выпуклых компактов это утверждение также будет верным, так как любой выпуклый компакт приближается многогранниками, а операция разности и функция объема в определенном смысле непрерывны. Поэтому объемы сумм Минковского компактов и приближающих многогранников будут мало различаться.

По определению смешанные объемы не зависят от перестановки своих аргументов и обладают некоторыми другими интересными свойствами, например, полилинейностью по своим аргументам. Еще одно важное свойство смешанных объемов — монотонность:

$$V(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant V(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \tag{3}$$

при условии, что $X_i \subseteq Y_i$. Его можно доказать, рассматривая изменение смешанного объема при замене только одного из X_i бо́льшим подмножеством. Чтобы доказать монотонность для многогранников, рассмотрим замену в смешанном объеме первого аргумента X_1 на Y_1 ($X_1 \subseteq Y_1$). Рассматривая строение $t_1X_1+\ldots+t_nX_n$, можно увидеть, что в выражении для объема этого множества линейный по t_1 член — это сумма площадей граней $t_2X_2+\ldots+t_nX_n$, умноженных на расстояние между началом координат (которое считается расположенным внутри X_1) и плоскостью, опорной к X_1 и параллельной данной грани (сравните со случаем двух множеств, одно из которых — единичный шар, его роль выполняет X_1). При замене X_1 бо́льшим множеством расстояние от начала координат до опорной к X_1 плоскости в данном направлении увеличится, а значит, увеличится и смешанный объем.

Возвращаясь к сумме двух выпуклых множеств, можно написать

$$|A+tB| = \sum \binom{n}{k} V(\underbrace{A, \ldots, A}_{n-k}, \underbrace{B, \ldots, B}_{k}) t^k.$$

Смешанные объемы с повторяющимися аргументами в дальнейшем будем обозначать $V(A, n-k; B, k)$. Для сумм двух множеств монотонность смешанного объема приводит к не такому уж тривиальному факту: при замене A на множество, в нем содержащееся, коэффициенты многочлена $|A+tB|$ уменьшаются.

3. Доказательство теоремы (1)

Обозначим для выпуклого множества X

$$X^* = -X = \{-x : x \in X\}.$$

Нас интересует значение многочлена $|X+tX^*|$ при $t=1$, поэтому нужно оценить сверху его коэффициенты, которые мы обозначили через c_i.

Так как $|X+tX^*| = |tX+X^*|$, то $c_0 = c_3 = |X|$ и $c_1 = c_2$. Значит, теорема 1 равносильна оценке:

Лемма 2. *В приведенных выше обозначениях* $c_1 = c_2 \leqslant 9|X|$.

Доказательство леммы 2 использует следующую лемму, которую мы сформулируем для множества X в $\mathbb{R}^n$ при произвольном n.

Лемма 3. *Для произвольного множества X в n-мерном пространстве множество X^* можно поместить в X, уменьшив X^* в n раз.*

Доказательство. Рассмотрим симплекс S (в трехмерном случае просто тетраэдр) наибольшего объема, который можно поместить в X, пусть его вершины — это p_0,$p_1, \ldots, p_n$. Ясно, что точки p_i лежат на поверхности X. Проведем через каждую p_i плоскость α_i, параллельную плоскости, проходящей через остальные p_j. Если хотя бы одна точка $p \in X$ лежит по другую сторону от α_i по сравнению с p_j $(j \neq i)$, то, заменив p_i на p, можно увеличить объем симплекса S. Значит, все плоскости α_i — опорные и X содержится в симплексе, ограниченном плоскостями α_i. Легко видеть, что этот симплекс подобен S с коэффициентом $-n$, значит, $S \supset X \supset -\dfrac{1}{n}X^*$.

Доказательство леммы 2. Оценка

$$c_1 = c_2 = 3V(X, X, X^*) = 3 \cdot 3V(X, X, \frac{1}{3}X^*) \leqslant 9V(X, X, X) = 9|X|$$

следует из монотонности входящих в нее смешанных объемов. Монотонность в данном случае доказывается аналогично доказательству (3).

Как и выше, достаточно рассмотреть случай многогранников. Заметим, что

$$V(A, A, B) = \frac{1}{3}\frac{d}{dt}|A+tB|\Bigg|_{t=0}.$$

Член первого порядка в $|A+tB|$ есть сумма по всем граням A произведений площади грани на расстояние между плоскостями, параллельными этой грани, одна из которых проходит через фиксированную точку внутри B, а другая — опорная к B с той же стороны, где находится соответствующая грань A. Расстояние между такими плоскостями уменьшится, если B заменить на содержащееся в нем множество, а значит, вся сумма также уменьшится.

4. Замечания и дополнения

1. Метод, использующий лемму 3, допускает обобщение на многомерный случай, приводя к оценке
$$c_i \leqslant n^{\min\{i,n-i\}} \binom{n}{k},$$
которая приведена в [5]. Правда, для симплекса в n-мерном пространстве эти коэффициенты, видимо, имеют меньшие значения. Есть гипотеза, что $c_i \leqslant \binom{n}{i}^2 |X|$ (см. [4]), т. е. случай симплекса является экстремальным. В терминах смешанных объемов
$$V(X, i; X^*, n-i) \leqslant \binom{n}{i} |X|$$
и тогда, в силу равенства
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n},$$
суммированием получается следующее соотношение
$$|X + X^*| \leqslant \binom{2n}{n} |X|.$$

К сожалению, провести доказательство для $n > 3$ пока не удается, так как полученная нами оценка и оценка в гипотезе совпадают только при $i = 1, n-1$.

Было бы интересно также получить оценки сверху для смешанных объемов, в которых фигурируют два или более выпуклых тела, в отличие от случая X и X^*.

2. Изучая выражение $|A+\varepsilon B|$, где A — параллелепипед, а B — единичный шар, можно решить следующую интересную задачу (Турнир Городов 1998 года):

Задача 2 (А.Шень). *Можно ли поместить параллелепипед с бóльшим периметром в параллелепипед с меньшим периметром?* (*Периметр — сумма длин ребер.*)

Ответ на вопрос этой задачи отрицателен, так как сумма двугранных углов при параллельных ребрах параллелепипеда равна 2π и, следовательно, коэффициент c_2 равен $\pi/4$, умноженному на периметр. В самом деле, предположим противное. Учитывая

$$|A_1 + \varepsilon B| \leqslant |A_2 + \varepsilon B| \qquad (A_1 + \varepsilon B \subseteq A_2 + \varepsilon B)$$

и равенство коэффициентов c_3 в этих выражениях, легко выводим, что первый периметр не более второго.

Еще одно, более идейное, решение этой задачи получается применением монотонности смешанных объемов.

3. Есть много других интересных вопросов о суммах Минковского. Например, характеризация множеств, являющихся суммами Минковского отрезков. Если два отрезка на плоскости не параллельны, то их сумма Минковского — параллелограмм. Если три отрезка в $\mathbb{R}^3$ некомпланарны, то их сумма Минковского — параллелепипед. Однако, если взять больше отрезков (для определенности будем рассматривать трехмерное пространство), то получаются менее тривиальные примеры. Оказывается, что многогранник является суммой Минковского отрезков, или *зоноэдром*, если все его грани имеют центр симметрии (это нетрудно доказать). Иначе можно сказать, что зоноэдры — это проекции многомерных параллелотопов. Это также в точности те многогранники, которые можно разрезать на параллелепипеды. Если рассматривать произвольные выпуклые фигуры, то те из них, которые можно сколь угодно приблизить зоноэдрами, называются *зоноидами*. В качестве упражнения можно ответить на вопрос: какими свойствами характеризуются зоноиды среди остальных выпуклых фигур?

Список литературы

[1] *Rogers C. A., Shephard G. C.* Some extremal problems for convex bodies // Mathematika, 1985. Vol. 5. No 2. P. 93–102.

[2] *Бураго Д. М., Залгаллер И. А.* Геометрические неравенства. Ленинград: Наука, 1980.

[3] *Makai E.* Research problem // Period. Math. Hung., 1974. Vol. 5. No 4. P. 352–354.

[4] *Minkowsky H.* Theorie der konvexer Körper, insbesondere Begründing ihres Oberflächenbegriffs. Ges. Abh., 2. Leipzig — Berlin, 1911, S. 131–229.

[5] *Bonnesen T., Fenchel W.* Theorie der konvexen Körper. Berlin, 1934.