Задача о двухцветном графе

И. Межиров

Условие задачи. Предположим, что каждая вершина графа может находиться в одном из двух состояний. Для каждой вершины графа A дана операция PA, которая меняет состояния вершины A и всех ее соседей. Доказать, что найдется композиция этих операций, меняющая состояния всех вершин.

Решение. Проведем доказательство по индукции. Для графа из 1 вершины утверждение тривиально. Пусть утверждение верно для всех графов из n вершин. Докажем, что оно верно для всех графов из $(n+1)$-ой вершины. Пусть дан какой-нибудь граф из $(n+1)$-ой вершины. Выберем в нем произвольную вершину A. Если исключить A из графа, то останется подграф исходного графа, имеющий n вершин. По предположению индукции существует композиция операций P, изменяющая состояние всех вершин этого подграфа. Обозначим одну из таких композиций через RA. Введем это обозначение для всех A, т. е. введем операцию R, применимую к любой вершине. Если хотя бы одна операция RA изменяет состояние A, то она изменяет состояние всех вершин графа. В этом случае доказательство шага индукции закончено. Теперь разберем случай, когда все RA не изменяют состояние A. Польза от рассмотрения операции R в оставшемся случае заключается в том, что ее действие не зависит от ребер графа. Для разбора оставшегося случая достаточно найти операцию, изменяющую состояния всех вершин, кроме четного их числа. В самом деле, пусть операция T меняет состояния всех вершин, кроме вершин $A_1, A_2, \dots, A_{2k}$. Тогда операция

$$T \circ RA_1 \circ RA_2 \circ \dots \circ RA_{2k}$$

меняет состояние всех вершин, поскольку состояние вершин A_i меняется нечетным количеством операций R, а состояние всех остальных вершин меняется T и четным числом операций R. Теперь, если в графе четное число вершин, то будем считать, что T ничего не меняет. Если в графе нечетное число вершин, то найдется вершина B, имеющая четное число соседей, так как количество пар (вершина, выходящее из нее ребро) четно. Тогда положим $T = PB$ и T будет менять состояния нечетного числа вершин, т. е. всех, кроме четного числа. Доказательство закончено.

Аналогичным рассуждением доказывается следующее более общее утверждение.

Задача о включении лампочек. Пусть дано конечное число лампочек и набор переключателей, каждый из которых переключает какие-то из лампочек. Вначале лампочки не горят. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы можно было их все включить: *для любого* *подмножества из нечётного числа лампочек можно найти набор переключателей, меняющий состояние нечётного числа лампочек из этого подмножества (что этот набор делает с остальными лампочками, неважно).*

Комментарий от редакции

Эта задача дает прекрасный пример использования линейной двойственности в комбинаторике. Перескажем задачу о включении лампочек на языке линейной алгебры. Рассмотрим пространство над $\mathbb{F}_2$ со скалярным произведением, ортогональный базис которого $\{e_1, \ldots, e_n\}$ индексирован лампочками (будем складывать лампочки по модулю 2). Каждому переключателю s_i, $1 \leqslant i \leqslant m$ сопоставим сумму тех лампочек, которые он переключает. Тогда включение всех лампочек равносильно условию

$$e_1 + \ldots + e_n = \sum_{j \in J} s_j,$$

которое можно равносильным образом переписать так:

$$e_1 + \ldots + e_n \in \mathbb{F}_2(s_1, \ldots, s_m) \Leftrightarrow (e_1 + \ldots + e_n)^\perp \supset \mathbb{F}_2(s_1, \ldots, s_m)^\perp \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{F}_2^n \setminus (e_1 + \ldots + e_n)^\perp \subset \mathbb{F}_2^n \setminus \mathbb{F}_2(s_1, \ldots, s_m)^\perp.$$

В левое множество входят в точности нечетные подмножества лампочек, в правое — те наборы, в которых можно переключить нечетное число лампочек.