Тождества Ньютона и математическая индукция

З. Б. Райхштейн

Пусть многочлен $f(x) = x^n + s_1 x^{n-1} + \ldots + s_{n-1}x + s_n$ имеет корни $x_1, \ldots, x_n$. Тогда

$$s_r = (-1)^r \sum_{i_1 < \ldots < i_r} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_r} .$$

Каждый многочлен s_r симметрический и однородный степени r. Всякий симметрический многочлен от $x_1, \ldots, x_n$ можно однозначно представить как многочлен от $s_1, \ldots, s_n$, так что эти многочлены образуют базис в кольце всех симметрических многочленов. Многочлены $-s_1, s_2, \ldots, (-1)^n s_n$ называются *элементарными симметрическими многочленами.*

Суммы степеней

$$p_r(x_1, \ldots, x_n) = x_1^r + \ldots + x_n^r , \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

тоже образуют базис в пространстве всех симметрических многочленов, если коэффициенты многочленов — рациональные, действительные или комплексные числа.

Тождества Ньютона можно рассматривать как формулы перехода между этими двумя базисами. Если мы положим $s_{n+1} = s_{n+2} = \ldots = 0$, то для любых натуральных чисел n и d

$$p_d + s_1 p_{d-1} + \ldots + s_{d-1} p_1 + d s_d = 0. \tag{1}$$

Заметим, что эти тождества справедливы для многочленов с коэффициентами в любом поле, хотя суммы степеней не всегда образуют базис в кольце симметрических многочленов.

Впервые тождества (1) были опубликованы Ньютоном в книге *Arithmetica universalis*, вышедшей в свет в 1707 году. (Для $d \leqslant 4$ они были известны уже Жирарду в начале XVII века.)

Известно много доказательств тождеств Ньютона[3)]. Мы приведём ещё одно, которое годится для любого поля коэффициентов.

Обозначим многочлен, стоящий в левой части (1), через $F_n^{(d)}$ и докажем $F_n^{(d)} = 0$ индукцией по $m = n - d$.

База индукции будет состоять в доказательстве $F_n^{(d)} = 0$ для любого

[3)] См., например, *Meed D. G.* Newton's indentities // American Math. Monthly, 1992. Vol. 99, no. 8. P. 749–751; *Zeidelberg D.* A combinatorial proof of Newton's identities // Discrete Math., 1984. Vol. 49, no. 3. P. 319. (Или *Макдональд И.* Симметрические функции и многочлены Холла. М.: Мир, 1985; Прасолов В. В. Многочлены. М.: МЦНМО, 1999. — *Прим. ред.*)

$m = n - d \leqslant 0$. По определению $s_1, \ldots, s_n$, данному выше,

$$\begin{aligned} f(x_1) &= x_1^n + s_1 x_1^{n-1} + \ldots + s_n = 0, \\ &\vdots \\ f(x_n) &= x_n^n + s_1 x_n^{n-1} + \ldots + s_n = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Складывая эти уравнения, получаем

$$p_n + s_1 p_{n-1} + \ldots + s_{n-1} p_1 + n s_n = 0,$$

т. е. $F_n^{(n)} = 0$. Аналогично, если мы подставим выражения (2) в формулу

$$x_1^{d-n} f(x_1) + \ldots + x_n^{d-n} f(x_n) = 0,$$

то получим $F_n^{(d)} = 0$ для всех $d \geqslant n$ (проверьте!).

Теперь докажем, что $F_n^{(d)} = 0$ при $m = n - d \geqslant 1$. Предположение индукции состоит в том, что $F_{n'}^{(d')} = 0$ при $n' - d' \leqslant m - 1$. Заметим, что из определения s_r и p_r следует

$$F_n^{(d)}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = F_{n-1}^{(d)}(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

(Проверьте!) По предположению индукции $F_{n-1}^{(d)}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0$. Другими словами, $F_n^{(d)}$ делится на x_n, а так как $F_n^{(d)}$ — симметрический многочлен, то и на $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Итак, $F_n^{(d)}$ делится на $s_n = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$. Но степень $F_n^{(d)}$ меньше степени s_n. Поэтому $F_n^{(d)} = 0$, что и требовалось доказать.

Уточнения

К сожалению, в моей статье «О разбиении множеств на части меньшего диаметра» в вып. 3 «Математического просвещения» обнаружилась ошибка. Лемма 4 (на с. 182) неверна: диаметр d каждой из четырёх частей, на которые правильный вписанный тетраэдр разбивает шар, не равен длине ребра этого тетраэдра (d больше стороны правильного треугольника, вписанного в шар).

Таким образом, неверно и мое утверждение, что найдено новое доказательство гипотезы Борсука в трёхмерном пространстве.

М. Л. Гервер