

Наш семинар: математические сюжеты

Теория препятствий для начинающих*

Д. Реповш

А. Скопенков

*I should say it meant something simple
and obvious, but then I am no philosopher!*

I. Murdoch *The sea, the sea*

ВВЕДЕНИЕ

Теория препятствий является важной частью алгебраической топологии и имеет многочисленные применения в других областях математики. А раз так, основные идеи этой теории наверняка можно доступно изложить человеку, не имеющему специальных познаний в топологии. К сожалению, изучение теории препятствий по существующей литературе возможно только после длительного освоения немотивированных абстрактных понятий и теорий. Настоящая же статья, напротив, посвящена изложению идей теории препятствий на простейших частных случаях. Она предназначена в первую очередь для читателей, не владеющих топологией, но мы смеем надеяться, что она будет интересна и специалистам.

В школьных (в частности, олимпиадных) задачах *невозможность* реализовать некоторую конструкцию часто доказывается путем построения

* Работа Д. Реповша частично поддержана исследовательским грантом Министерства Науки и Технологии Республики Словения No. J1-0885-0101-98. Работа А. Скопенкова частично поддержана грантом Российского Фонда Фундаментальных Исследований №96-01-00009.

алгебраического *препятствия*, или *инварианта* (например, из соображений четности). Точно так же *неэквивалентность* конструкций часто доказывается путем построения алгебраического *инварианта*, их различающего (этот инвариант является *препятствием* к эквивалентности). Многие непохожие друг на друга задачи топологии аналогичным образом естественно приводят к похожим друг на друга *препятствиям*. В настоящей статье этот процесс продемонстрирован на примере наиболее наглядных топологических задач.

Для чтения статьи (кроме §3.C,D) достаточно геометрической интуиции (используемые начальные понятия теории графов приведены в конце введения, а используемое в §3 понятие двумерного многообразия там кратко объясняется). В частности, все необходимые алгебраические объекты (со страшными названиями группы когомологий, препятствия и характеристические классы) естественно возникают и строго *определяются* в процессе доказательства теорем. Мы также приводим результат вычисления препятствий, дающий интересные геометрические следствия (само вычисление остается читателю в качестве задачи, кроме вычислений в §3.C,D, за которыми мы отсылаем читателя к [5]). Подчеркнем, что мы не требуем от читателя знакомства с алгебраическим понятием группы, в тексте можно воспринимать это слово как синоним слова «множество».

Часть материала сформулирована в виде задач, обозначаемых жирными числами. Читатель также может рассматривать восполнение деталей *набросков доказательств* как материал для самостоятельной работы. Следует подчеркнуть, что задачи не используются в остальном тексте. В некоторых задачах могут встретиться незнакомые вам термины; такие задачи следует просто игнорировать. Отметим также, что для решения задач достаточно понимания их формулировок и *не требуется* никаких дополнительных понятий и теорий.

Параграфы статьи независимы друг от друга (ссылки между ними посвящены исключительно сравнению материала). Они расположены примерно в порядке возрастания сложности. В каждом параграфе приводится краткая история вопроса. Конкретные ссылки даются только по (к сожалению, относительно малоизвестному) материалу §2.

Для читателя, уже знакомого с алгебраической топологией, отметим, что мы не используем стандартную терминологию теории препятствий там, где мы считаем, что она неудобна для начинающего. Приведем здесь для сравнения эту терминологию. Расстановки элементов группы G на i -симплексах полиэдра K называются *i -мерными коцепями на K с коэффициентами в G* (у нас они называются просто *расстановками*). Группа таких расстановок обычно обозначается $C^i(K, G)$. Множество $\delta C^{i-1}(K, G)$ всех кограниц образует подгруппу группы $C^i(K, G)$, обозначаемую

$B^i(K, G)$. Когда $G = \mathbb{Z}_2$, мы пропускаем коэффициенты в обозначениях коцепей, коциклов, кограниц и (ко)гомологий.

* * * * * *

Напомним используемые начальные понятия теории графов. Грубо говоря, граф можно понимать как конечное множество точек (его «вершины»), некоторые пары которых выделены («соединены ребрами»). Мы примем следующее формальное определение. *Разбиением* (представляющим граф) назовем конечное множество точек (на плоскости), некоторые пары которых соединены ломаными; эти точки называются *вершинами* разбиения, а ломаные — его *ребрами*; ребра могут пересекаться, но точки пересечения (кроме двух концов ребра) не могут быть вершинами. Разбиения G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение f множества вершин разбиения G_1 на множество вершин разбиения G_2 , удовлетворяющее условию: вершины $A, B \in G_1$ соединены ребром в том и только в том случае, если $f(A), f(B) \in G_2$ соединены ребром. Разбиения G_1 и G_2 называются *гомеоморфными*, если G_1 можно получить из G_2 операциями *подразделения ребра* (рис. 0.1) и

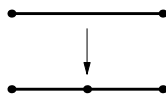


Рис. 0.1.

обратными. *Графом* называется класс эквивалентности разбиения (по отношению гомеоморфности). Разбиение (элемент класса эквивалентности) называется разбиением или триангуляцией соответствующего графа (допуская вольность речи, иногда конкретное разбиение называют графом). Через S^1 обозначается граф, гомеоморфный окружности. Грубо говоря, *подграф* данного графа — это его часть (точное определение приведите сами). Граф называется *деревом*, если он связан и не содержит подграфа, гомеоморфного S^1 . *Степенью* вершины называется число выходящих из нее ребер. Количества вершин, ребер и компонент связности графа K обозначаются V , E и C , соответственно.

§1. В НАПРАВЛЕНИИ ХОПФА

Для подмножества (например, графа) $K \subset \mathbb{R}^2$ определим понятие *ветра* (или непрерывного отображения в окружность). Ветер $f: K \rightarrow S^1$ сопоставляет каждой точке $x \in K$ единичный вектор $f(x)$ (точку на окружности). Вектор $f(x)$ должен непрерывно зависеть от x . Два ветра $f_0, f_1: K \rightarrow S^1$ называются *гомотопными* (обозначение: $f_0 \simeq f_1$), если существует семейство $f_t: K \rightarrow S^1$ ветров, непрерывно зависящее от

параметра $t \in [0, 1]$. Для графа $K \subset \mathbb{R}^2$ обозначим через $[K, S^1]$ множество ветров $K \rightarrow S^1$ с точностью до гомотопии. В этом параграфе решается задача нахождения множества $[K, S^1]$ (а в виде задач в конце параграфа предлагаются ее обобщения на другие случаи).

Теорема Хопфа о гомотопической классификации отображений n -полупространства в S^n (т.е. «многомерных ветров») была доказана Хайнцем Хопфом около 1930 г. («по заказу» Павла Сергеевича Александрова). Идея приводимого ниже доказательства теоремы Хопфа принадлежит Сэмюэлю Эйленбергу и Сондерсу Маклейну (около 1940 г.). Задача о гомотопической классификации произвольных отображений — одна из основных в алгебраической топологии. Дальнейшее развитие теорема Хопфа получила в работах Нормана Стинрода (1941 г.), Льва Семеновича Понтрягина (1942 г.) и Михаила Михайловича Постникова (около 1950 г.).

1. Для любого дерева существует ровно один ветер с точностью до гомотопии.

Степенью $\deg f$ ветра $f: S^1 \rightarrow S^1$ называется число оборотов вектора $f(x)$ (вокруг своего неподвижного начала) при однократном обходе точкой x окружности S^1 против часовой стрелки.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТОПОЛОГИИ. *Отображение $\deg: [S^1, S^1] \rightarrow \mathbb{Z}$ является биекцией.*

Мы не приводим доказательства (интуитивно очевидной) инъективности в Основной теореме топологии.

2. а) Докажите сюръективность в Основной теореме топологии.

б) Выведите из Основной теоремы топологии Основную теорему алгебры.

3. а) Пусть K — несвязное объединение или букет k окружностей (рис. 1.1). Фиксируем произвольно направление на каждой из этих окружностей. Для ветра $f: K \rightarrow S^1$ поставим на каждой из этих окружностей степень сужения ветра f на эту окружность. Полученную расстановку k целых чисел обозначим $\deg f$. Тогда $\deg: [K, S^1] \rightarrow \mathbb{Z}^k$ — биекция.

б) Множество $[K, S^1]$ не меняется при стягивании ребра.

с) $[K, S^1] = \mathbb{Z}^{E-V+C}$.



Рис. 1.1.

Хопф доказывал свою теорему при помощи обобщения метода задач 3b, 3c. Приведем другое доказательство, развивающее идею задачи 3a и следующее общему методу теории препятствий.

ТЕОРЕМА ХОПФА. *Для графа K отображение $\deg: [K, S^1] \rightarrow H^1(K, \mathbb{Z})$ является биекцией.*

ВЫЧИСЛЕНИЕ. $H^1(K, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{E-V+C}$.

Определение $H^1(K, \mathbb{Z})$, \deg и доказательство. Знакомство с этим доказательством рекомендуем начать со случая $K = K_4$ (рис. 1.1). Фиксируем произвольный единичный вектор v . Произвольный ветер $K \rightarrow S^1$ гомотопен *клеточному* ветру, т. е. ветру, для которого в каждой вершине графа K стоит вектор v . Поэтому достаточно классифицировать клеточные ветры $K \rightarrow S^1$ с точностью до гомотопии, все отображения (ветры) которой не обязательно клеточны.

Фиксируем произвольно направление на каждом ребре графа K . Возьмем клеточный ветер $f: K \rightarrow S^1$. Поставим на каждом ребре $e \subset K$ с началом n и концом k число оборотов вектора $f(x)$ при обходе точкой x ребра e от n к k . Полученную расстановку обозначим $\gamma(f)$. Множество всех расстановок целых чисел на ребрах графа K обозначим через \mathbb{Z}^E . Расстановки можно складывать: для этого просто складываются числа, стоящие на каждом ребре (такое сложение называется *покомпонентным*). Если $f, g: K \rightarrow S^1$ — такие клеточные ветры, что $\gamma(f) = \gamma(g)$, то по основной теореме топологии $f \simeq g$.

Обратное неверно, как показывает пример следующей гомотопии (см. рис. 1.2). Для вершины a графа K изменим ветер f так, чтобы вектор в a сделал один оборот против часовой стрелки, ветер в маленькой окрестности вершины a «потянулся» за вектором в a , а вне этой маленькой окрестности ветер не менялся. В результате получим ветер $g: K \rightarrow S^1$, гомотопный ветру f . Понятно, что $\gamma(f) - \gamma(g)$ есть расстановка ± 1 (в зависимости от ориентации) на ребрах, содержащих вершину a , и 0 на всех остальных ребрах. Эта расстановка называется *элементарной кограницей вершины a* и обозначается δ_a .

В окрестностях вершин a_1, \dots, a_k сделаем описанную выше гомотопию ветра f , поворачивая векторы в этих вершинах на n_1, \dots, n_k оборотов, соответственно. Эту гомотопию можно задать расстановкой чисел n_1, \dots, n_k в вершинах a_1, \dots, a_k , соответственно (и нулей в остальных вершинах). Обозначим полученную расстановку через Γ , а полученный ветер через f_Γ . Множество всех расстановок целых чисел на вершинах графа K с операцией покомпонентного сложения обозначим через \mathbb{Z}^V . Каждой вершине a отвечает «характеристическая» расстановка $a \in \mathbb{Z}^V$ единицы в вершине a и нуля в остальных вершинах. Определим отображение

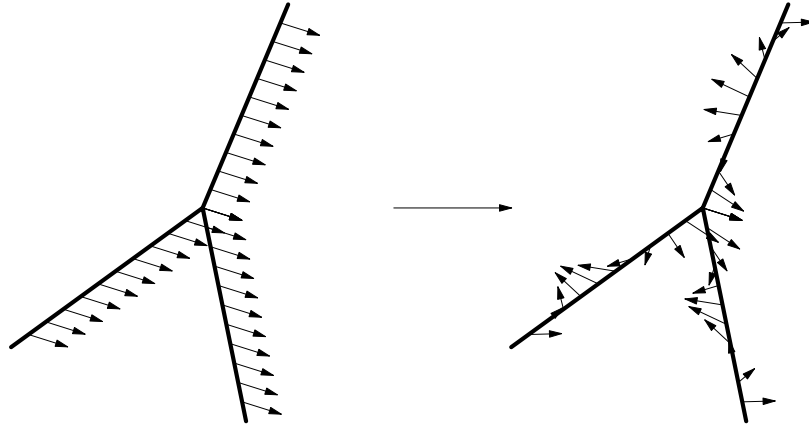


Рис. 1.2.

$\delta: \mathbb{Z}^V \rightarrow \mathbb{Z}^E$ формулой $\delta(n_1 a_1 + \dots + n_k a_k) = n_1 \delta a_1 + \dots + n_k \delta a_k$. Тогда $\gamma(f) - \gamma(f_\Gamma) = \delta \Gamma$.

Назовем расстановки $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}^E$ *когомологичными*, если $\gamma_1 - \gamma_2 = \delta \Gamma$ для некоторого $\Gamma \in \mathbb{Z}^V$. Группа $H^1(K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^E / \delta(\mathbb{Z}^V)$ расстановок с точностью до когомологичности называется *одномерной группой когомологий графа K с коэффициентами в \mathbb{Z}* . Обозначим $\deg f = [\gamma(f)] \in H^1(K, \mathbb{Z})$.

Теперь рассмотрим гомотопию $f_t: K \rightarrow S^1$ между клеточными ветрами f_0, f_1 . Поставим на каждой вершине a число оборотов вектора $f_t(a)$ при изменении t от 0 до 1. Полученную расстановку обозначим $\Gamma(\{f_t\})$. Легко проверить, что $\gamma(f_0) - \gamma(f_1) = \delta \Gamma(\{f_t\})$. Значит, $\deg f_1 = \deg f_0$. Поэтому отображение $\deg: [K, S^1] \rightarrow H^1(K, \mathbb{Z})$ корректно определено. Если $\deg f = \deg g$, то $\gamma(f) - \gamma(g) = \delta \Gamma$ для некоторого $\Gamma \in \mathbb{Z}^E$, значит $f \simeq f_\Gamma \simeq g$. Поэтому отображение \deg инъективно. Доказательство его сюръективности оставляем читателю в качестве задачи. \square

Заметим, что построенное отображение $\deg: [K, S^1] \rightarrow H^1(K, \mathbb{Z})$ зависит от выбора направлений на ребрах графа K . Для ветра f класс $\deg f$ является *препятствием* к гомотопности ветра f ветру с постоянным направлением.

4. а) Группа $H^1(K, \mathbb{Z})$ зависит только от топологического типа графа K , т. е. одномерные группы когомологий гомеоморфных графов изоморфны.

б) Отображение $\deg: [K, S^1] \rightarrow H^1(K, \mathbb{Z})$ является изоморфизмом групп (S^1 является группой, поэтому $[K, S^1]$ является группой).

5. а) Используя $[S^1, \mathbb{R}P^2] \cong \mathbb{Z}_2$, найдите $[K, \mathbb{R}P^2]$ для графа K , т. е. определите одномерную группу когомологий $H^1(K)$ с \mathbb{Z}_2 -коэффициентами и биекцию $\deg: [K, \mathbb{R}P^2] \rightarrow H^1(K)$.

б) Для графа K с эквивариантной инволюцией найдите множество $[K, S^1]_{eq}$ эквивариантных (т. е. перестановочных с данной инволюцией на K и антиподальной инволюцией на S^1) отображений $K \rightarrow S^1$ с точностью до эквивариантной гомотопии.

6. а) Отображение $\partial D^2 \rightarrow S^1$ гомотопно отображению в точку (т. е. имеет степень ноль) тогда и только тогда, когда оно продолжается на D^2 .

б) Используя $[S^2, S^1] \cong 0$, найдите $[K, S^1]$ для поверхности K , т. е. определите одномерную группу когомологий $H^1(K, \mathbb{Z})$ с \mathbb{Z} -коэффициентами и биекцию $\deg: [K, S^1] \cong H^1(K, \mathbb{Z})$.

в) Найдите $H^1(K, \mathbb{Z})$ для связного 2-многообразия K с триангуляцией T , имеющей V , E и F вершин, ребер и граней, соответственно (см. определение в начале §3).

д) Конечный n -полиэдр можно представлять себе как объединение некоторого количества граней размерностей не более n в разбиении пространства \mathbb{R}^m на единичные кубы. Используя $[S^i, S^1] \cong 0$ для $i \geq 2$, найдите $[K, S^1]$ для конечного n -полиэдра K , т. е. определите одномерную группу когомологий $H^1(K, \mathbb{Z})$ с \mathbb{Z} -коэффициентами и биекцию $\deg: [K, S^1] \cong H^1(K, \mathbb{Z})$.

7. а) (n -мерная теорема Хопфа) Используя $[S^i, S^n] \cong 0$ для $i < n$ и $[S^n, S^n] \cong \mathbb{Z}$, найдите $[K, S^n]$ для конечного n -полиэдра K , т. е. определите n -мерную группу когомологий $H^n(K, \mathbb{Z})$ с \mathbb{Z} -коэффициентами и биекцию $\deg: [K, S^n] \cong H^n(K, \mathbb{Z})$.

б) Для конечного полиэдра K определите n -мерную группу когомологий $H^n(K, \mathbb{Z})$ с \mathbb{Z} -коэффициентами так, чтобы отображение $\deg: [K, S^n] \rightarrow H^n(K, \mathbb{Z})$ было по-прежнему корректно определено.

в) Если $\dim K = n + 1$, то $\deg: [K, S^n] \rightarrow H^n(K, \mathbb{Z})$ сюръективно.

8. а) Попробуйте обобщить ваши вычисления множества $[K, \mathbb{R}P^2]$ на 2-полиэдр K и найдите такой 2-полиэдр K , что $[K, \mathbb{R}P^2] \not\cong H^1(K)$.

б) Используя $[S^1, \mathbb{R}P^{n+2}] \cong \mathbb{Z}_2$ и $[S^i, \mathbb{R}P^{n+2}] \cong 0$ для $i = 2, 3, \dots, n$, докажите $[K, \mathbb{R}P^{n+2}] \cong H^1(K)$ для n -полиэдра K .

в) Используя $[S^2, \mathbb{C}P^n] \cong \mathbb{Z}$ и $[S^i, \mathbb{C}P^n] \cong 0$ для $i = 1, 3, 4, \dots, n$, докажите $[K, \mathbb{C}P^n] \cong H^2(K, \mathbb{Z})$ для n -полиэдра K .

9. (Теорема Стинрода для $n = 2$) Напомним, что $[S^3, S^2] \cong \mathbb{Z}$.

а) Для 3-полиэдра K и класса $\gamma \in H^2(K, \mathbb{Z})$ постройте биекцию $\deg^{-1} \gamma \rightarrow H^3(K, \mathbb{Z})$. Получится биекция $[K, S^2] \cong H^2(K, \mathbb{Z}) \times H^3(K, \mathbb{Z})$.

б) Для 4-полиэдра K и отображения $f: K^{(3)} \rightarrow S^2$ постройте препятствие $\text{Sq}^2(\deg f)$ из $H^4(K, \mathbb{Z})$ к продолжению отображения $f: K^{(3)} \rightarrow S^2$ на все K . Получится отображение Sq^2 , для которого последовательность $[K, S^2] \xrightarrow{\deg} H^2(K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{Sq}^2} H^4(K, \mathbb{Z})$ точна.

в) Для коцикла $a \in Z^2(K, \mathbb{Z})$ элемент $\text{Sq}^2[a]$ представляется коциклом $b \in Z^4(K, \mathbb{Z})$, определенным по формуле $b(\sigma_{01234}) = a(\sigma_{012})a(\sigma_{234})$.

д) Пусть K — четырехмерное многообразие и класс $a \in H^2(K, \mathbb{Z})$ двойственен по Пуанкаре классу $Da \in H_2(K, \mathbb{Z})$, представляющемуся погружением $h: N \rightarrow K$ 2-многообразия N . Тогда $\text{Sq}^2 a$ есть сумма точек (со знаком) в $h(N) \cap h'(N)$, где h' — погружение, близкое к h .

10. (Теорема Стинрода) Пусть $\rho_2: H^n(K, \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(K)$ — приведение по модулю 2. Напомним, что $[S^{n+1}, S^n] \cong \mathbb{Z}_2$ для $n \geq 3$.

а) Для $n \geq 3$, $(n+2)$ -полиэдра K и отображения $f: K^{(n+1)} \rightarrow S^n$ постройте препятствие $\text{Sq}^2 \rho_2(\deg f) \in H^{n+2}(K)$ к продолжению отображения $f: K^{(n+1)} \rightarrow S^n$ на все K . Получится отображение Sq^2 , для которого последовательность $[K, S^n] \xrightarrow{\deg} H^n(K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{Sq}^2 \circ \rho_2} H^{n+2}(K)$ точна.

б) Для $n \geq 3$, $(n+1)$ -полиэдра K и элемента $\gamma \in H^n(K, \mathbb{Z})$ постройте биекцию $\text{deg}^{-1} \gamma \rightarrow H^{n+1}(K)/\text{Sq}^2 \rho_2 H^{n-1}(K, \mathbb{Z})$. Получится биекция $[K, S^n] \cong H^n(K, \mathbb{Z}) \times H^{n+1}(K)/\text{Sq}^2 \rho_2 H^{n-1}(K, \mathbb{Z})$.

11. Напомним, что для любого n существует (бесконечный) полиэдр $K(\mathbb{Z}, n)$, такой что $[S^n, K(\mathbb{Z}, n)] \cong \mathbb{Z}$ и $[S^i, K(\mathbb{Z}, n)] \cong 0$ для любого $i \neq n$. Например, $K(\mathbb{Z}, 1) \cong S^1$ и $K(\mathbb{Z}, 2) \cong \mathbb{C}P^\infty$.

а) $H^n(K, \mathbb{Z}) \cong [K, K(\mathbb{Z}, n)]$ для любого полиэдра K .

б) Если $\alpha \in H^2(K, \mathbb{Z})$, то $f_{\text{Sq}^2 \alpha} = f_1 \circ f_\alpha$, где $1 \in H^4(\mathbb{C}P^3, \mathbb{Z}) \cong H_2(\mathbb{C}P^3, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ — образующая и отображения $f_{\text{Sq}^2 \alpha}: K \rightarrow K(\mathbb{Z}, 4)$, $f_1: \mathbb{C}P^3 \rightarrow K(\mathbb{Z}, 4)$ и $f_\alpha: K \rightarrow \mathbb{C}P^3$ соответствуют классам $\text{Sq}^2 \alpha, 1$ и α при изоморфизмах $H^4(K, \mathbb{Z}) \cong [K, K(\mathbb{Z}, 4)]$, $H^4(\mathbb{C}P^3, \mathbb{Z}) \cong [\mathbb{C}P^3, K(\mathbb{Z}, 4)]$ и $H^2(K, \mathbb{Z}) \cong [K, \mathbb{C}P^3]$.

§2. В НАПРАВЛЕНИИ ВАН КАМПЕНА

Понятие препятствия, по-видимому, впервые возникло именно у Ван Кампена при решении проблемы о вложимости n -мерных полиэдров в \mathbb{R}^{2n} [6], [4], [9, §2], [11, §2], [12, §2]. Но показать основную идею гораздо проще на проблемах аппроксимируемости пути вложениями и планарности графов [14], [9, §9], [3, §4], [10, §1], [1, §4]. Этим проблемам (аккуратно сформулированным ниже) и посвящен настоящий параграф.

1. а) Охотник прошел по лесной дорожке в форме окружности диаметром 1 км, сделав два оборота. Он вел на поводке длиной 1 м собаку, которая в конце движения вернулась в исходную точку. Тогда собака обязательно пересекала свой след (в некоторый момент времени, отличный от конечного).

Приведем другую формулировку этой задачи (эквивалентность доказана в [8]). Рассмотрим две полянки (т.е. два круга), соединенных двумя тропинками (т.е. полосками) a и b , как на рис. 2.1. Собака бегала по полянкам и тропинкам и вернулась в исходную точку. Каждый раз, когда собака перебежала с полянки на тропинку, она записывала обозначение этой тропинки. Если получилась запись $abab$, то собака обязательно пересекала свой след (в некоторый момент времени, отличный от конечного).

б) Верно ли а) без предположения о том, что собака в конце движения вернулась в исходную точку?

с) Докажите а) для случая, когда охотник сделал *три* оборота.

д) Для какого числа оборотов в а) собака обязательно пересекала свой след?

Путь $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ на плоскости называется *аппроксимируемым вложением*, если существует сколь угодно близкий к нему путь без самопересечений, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такой несамопересекающийся путь (т.е. вложение) $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, что расстояние между точками $f(x)$ и $\varphi(x)$ меньше ε для любой точки $x \in I$. Аналогично определяется аппроксимируемость вложениями *цикла* $\varphi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Пусть I — граф с вершинами a_0, a_1, \dots, a_n и ребрами $a_0a_1, \dots, a_{n-1}a_n$. Путь $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется *симплициальным*, если $\varphi(a_j) \notin \varphi(a_{i-1}a_i)$ для любых $i, j = 1, \dots, n$ и сужение $\varphi|_{[a_{i-1}, a_i]}$ линейно для любого $i = 1, \dots, n$. Все встречающиеся нам пути будут симплициальными (с разными n).

Строгая формулировка задачи 1а) такова: композиция $\varphi: S^1 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ двукратной намотки и стандартного включения не аппроксимируется вложениями. Чтобы объяснить идею построения препятствия Ван Кампена, приведем наброски двух решений задачи 1а). Назовем путь собаки *незатейливым*, если во время движения по тропинкам она не пересекала свои следы. Для незатейливого пути f поставим на каждой полянке 0, если точки входа собаки на полянку и ее выхода с полянки располагаются как на рис. 2.2а, и 1 в противном случае (рис 2.2б). Пусть $v(f)$ будет суммой по модулю 2 этих двух чисел. Для пути f на рис. 2.1 $v(f) = 1$. Ясно, что $v(f)$ зависит только от расположения отрезков пути собаки на тропинках. При изменении такого расположения на одной тропинке число на каждой полянке изменится, поэтому $v(f)$ не изменится. Так как от любого расположения отрезков пути на тропинках можно перейти к любому другому указанными операциями, то $v(f) = 1$ для *любого* незатейливого пути f . Поэтому собака обязательно пересекала свой след.

Теперь приведем другое решение. Возьмем любой цикл общего положения $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, близкий к композиции $\varphi: S^1 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ двукратной намотки и стандартного включения. Для любых двух ребер i, j пересечение $f(i) \cap f(j)$ состоит из конечного числа точек. Пусть $v(f)$ будет суммой по модулю 2 чисел $|f(i) \cap f(j)|$ по всем неупорядоченным парам $\{i, j\}$ несмежных ребер графа S^1 . Для цикла f_0 , показанного на рис. 2.3, $v(f_0) = 1$. Если в процессе непрерывного изменения $f_t, t \in [0, 1]$, движется только внутренность ребра $e \subset S^1$, то $v(f_0) - v(f_1)$ равно числу точек пересечения цикла $f_0(e) \cup f_1(e)$ с путем $f_0(S^1 - \bar{e})$ (где \bar{e} — объединение ребра e и двух соседних с ним). Так как путь $f_0(S^1 - \bar{e})$ можно замкнуть, не добавляя новых пересечений с $f_0(e) \cup f_1(e)$, то $v(f_0) - v(f_1) = 0$. Это интуитивно очевидное утверждение следует из формулы Эйлера; другое доказательство см. в [2]. Любой цикл $f_1: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения, близкий к

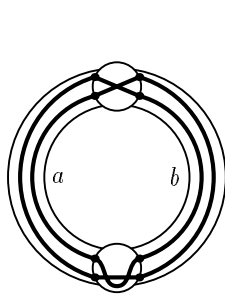


Рис. 2.1.

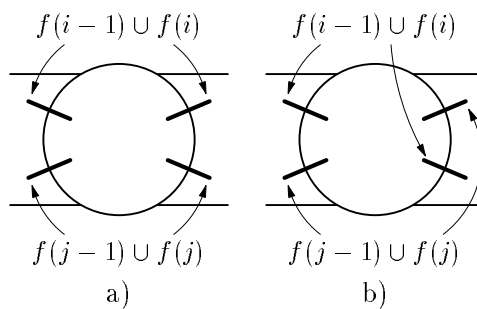


Рис. 2.2.

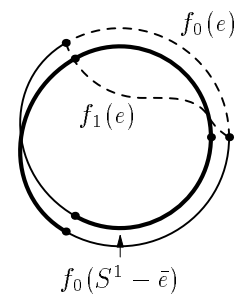


Рис. 2.3.

φ , может быть преобразован к f_0 последовательностью нескольких изотопий плоскости \mathbb{R}^2 и нескольких гомотопий, описанных выше. Значит, $v(f) = 1$ для *любого* цикла $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, близкого к φ . Следовательно, φ не аппроксимируется вложениями.

2. а) Если образом $\varphi(I)$ пути $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ является отрезок или окружность, то этот путь аппроксимируем вложениями.

б) Пути и циклы на рис. 2.4 не аппроксимируемы вложениями (для наглядности мы рисуем не только сам путь f , а близкий к нему путь φ общего положения). Указание: если не получается, используйте нижеследующую теорему или задачу 4а).

с) Эйлеров путь или цикл на плоскости аппроксимируем вложениями тогда и только тогда, когда он не имеет трансверсальных самопересечений (рис. 2.4а).

д) Город N состоит из нескольких площадей (кругов), соединенных непересекающимися дорогами (прямолинейными отрезками). Известно, что существует маршрут, проходящий по каждой дороге ровно один раз (этот маршрут может проходить по площадям несколько раз). Докажите, что существует *несамопересекающийся* маршрут, проходящий по каждой дороге ровно один раз. (Иными словами, в любом нарисованном на плоскости без самопересечений эйлеровом графе существует эйлеров цикл, аппроксимируемый вложениями.)

ТЕОРЕМА. *Симплициальный путь $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ аппроксимируем вложениями тогда и только тогда, когда препятствие Ван Кампена $v(\varphi) \in H_0(\Delta) \cong H^2(I_\varphi^*)$ нулевое.*

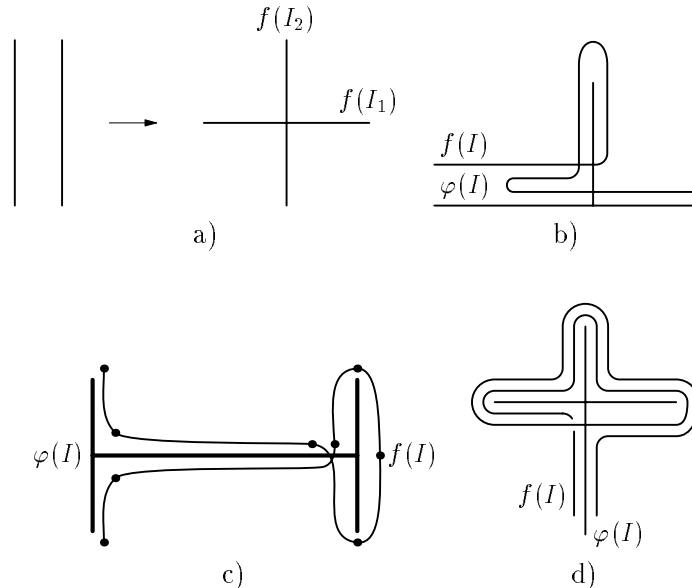


Рис. 2.4.

Определение $H_0(\Delta)$, $H^2(I_\varphi^)$, $\nu(\varphi)$ и доказательство необходимости.* Знакомство с этим доказательством рекомендуем начать с отображений φ и f с рис. 2.4с). Обозначим ребро $a_{i-1}a_i$ графа I числом i .

Построение препятствия Ван Кампена $\nu(\varphi) \in H_0(\Delta)$ является обобщением первого решения задачи 1а. Для симплициального пути $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ построим его *сингулярный граф* Δ (рис. 2.5 на с. 165 для пути на рис. 2.4с). Вершины графа Δ — такие пары (a_i, a_j) вершин графа I , что $\varphi(a_i) = \varphi(a_j)$ и $i - j > 1$. Вершины (a_i, a_j) и $(a_{i\pm 1}, a_{j\pm 1})$ соединены ребром в графе Δ , если они принадлежат ему (знаки \pm выбираются независимо).

Рассмотрим произвольный незатейливый путь f . В вершине (a_i, a_j) графа Δ поставим число 0, если точки входа пути f на полянку $\varphi(a_i) = \varphi(a_j)$ и точки ее выхода с этой полянки располагаются как на рис. 2.2а, и 1 в противном случае (рис. 2.2б). Полученную расстановку обозначим через $\nu(f)$. Поставим на каждой компоненте связности графа Δ , не содержащей точек (a_i, a_{i+2}) , сумму (по модулю 2) чисел в вершинах этой компоненты. Множество всех расстановок нулей и единиц на компонентах графа Δ обозначим через $H_0(\Delta)$. Полученную расстановку $\nu(\varphi) \in H_0(\Delta)$ назовем *препятствием Ван Кампена (с коэффициентами в \mathbb{Z}_2)* к аппроксимированности пути φ вложениями.

Ясно, что $\nu(f) = 0$ тогда и только тогда, когда путь f можно так изменить на полянках, чтобы он стал несамопересекающимся. Ясно также, что $\nu(f)$ зависит только от расположения отрезков пути на тропинках. При изменении такого расположения на одной тропинке e для любых двух ребер i и j графа I таких, что $\varphi(i) = \varphi(j) = e$, изменятся числа в вершинах (a_i, a_j) и (a_{i+1}, a_{j+1}) (или (a_i, a_{j+1}) и (a_{i+1}, a_j)) графа Δ . Поэтому $\nu(\varphi)$ не изменится. Так как от любого расположения отрезков пути на тропинках можно перейти к любому другому указанными операциями, то $\nu(\varphi)$ не зависит от f . Значит, если $\nu(\varphi) \neq 0$, то путь φ не аппроксимируется вложениями.

Построение препятствия Ван Кампена $\nu(\varphi) \in H^2(I_\varphi^*)$ является обобщением второго решения задачи 1а. Это построение более сложно, чем предыдущее, но именно оно может быть обобщено до настоящего препятствия Ван Кампена (к вложимости графов в плоскость). Обозначим через I^* верхнюю «наддиагональ» таблицы $n \times n$, т. е. объединение клеток $i \times j$ с $i < j - 1$, отвечающих парам несоседних ребер графа I (рис. 2.5). Для любого пути $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения, достаточно близкого к φ , и любых двух несоседних ребер i, j пересечение $f(i) \cap f(j)$ состоит из конечного числа точек. Поставим в клетке $i \times j \in I^*$ число $|f(i) \cap f(j)| \bmod 2$. Полученную расстановку назовем *препятствующей* и обозначим через $\nu(f)$: если путь f несамопересекающийся, то $\nu(f) = 0$. Множество расстановок нулей и единиц в клетках «наддиагонали» I^* (в нем $2^{(n-1)(n-2)/2}$ элементов) обозначается через $C^2(I^*)$. Расстановки можно складывать:

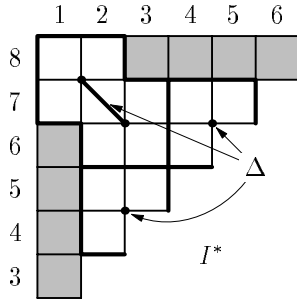


Рис. 2.5.

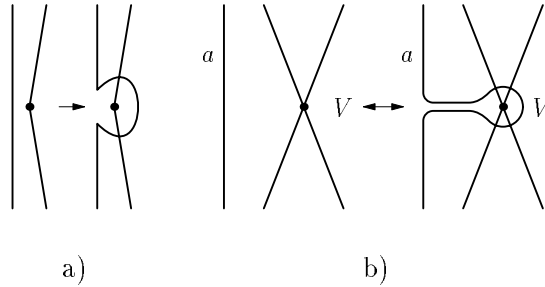


Рис. 2.6.

для этого просто складываются числа, стоящие на каждом ребре (такое сложение называется *покомпонентным*). Покрасим в черный цвет клетки $i \times j$ таблицы I^* , для которых $\varphi(i) \cap \varphi(j) = \emptyset$. Так как путь f близок к φ , то $\nu(f) = 0$ в черных клетках. Обозначим через $C_\varphi^2(I^*)$ подмножество множества $C^2(I^*)$, состоящее из расстановок с нулями в черных клетках. Итак, $\nu(f) \in C_\varphi^2(I^*)$.

При *преобразовании Райдемайстера* пути f на рис. 2.6а расстановка $\nu(f)$ изменяется ровно в двух соседних клетках $i \times j$ и $i \times (j + 1)$ (или $j \times i$ и $(j + 1) \times i$). Если одна из этих двух клеток не лежит в I^* , то число в ней не стоит и не меняется. Расстановка 1 в клетках таблицы I^* , соседних с ребром e , и 0 в остальных клетках таблицы I^* называется *элементарной кограницей ребра e таблицы I^** и обозначается δe .

Сделаем указанное преобразование Райдемайстера для ребер e_1, \dots, e_k таблицы I^* . Эту операцию можно задавать расстановкой единиц на ребрах e_1, \dots, e_k (и нулей на остальных ребрах). Обозначим полученную расстановку через N , а полученный путь через f_N . Множество расстановок нулей и единиц на ребрах таблицы I^* (в нем 2^{n^2-n-2} элементов) с операцией покомпонентного сложения обозначается через $C^1(I^*)$. Каждому ребру e отвечает «характеристическая» расстановка $e \in C_\varphi^1(I^*)$ единицы на ребре e и нуля на остальных ребрах. Определим отображение $\delta: C^1(I^*) \rightarrow C^2(I^*)$ формулой $\delta(e_1 + \dots + e_k) = \delta e_1 + \dots + \delta e_k$. Тогда $\nu(f) - \nu(f_N) = \delta N$.

Покрасим в черный цвет ребра $i \times a_j$ и $a_j \times i$ таблицы I^* , для которых $\varphi(a_j) \not\subset \varphi(i)$ (таким образом, граница черной клетки состоит из черных ребер, но могут быть и другие черные ребра). Обозначим через $C_\varphi^1(I^*)$ подмножество множества $C^1(I^*)$, состоящее из расстановок с нулями на черных ребрах. Так как f близок к φ , то указанное преобразование Райдемайстера возможно лишь при $N \in C_\varphi^1(I^*)$. Ясно, что $\delta C_\varphi^1(I^*) \subset C_\varphi^2(I^*)$.

Назовем расстановки $\nu_1, \nu_2 \in C_\varphi^1(I^*)$ *когомологичными*, если $\nu_1 - \nu_2 = \delta N$ для некоторого $N \in C_\varphi^1(I^*)$. Группа $H_\varphi^2(I^*) = C_\varphi^2(I^*)/\delta(C_\varphi^1(I^*))$ расстановок с точностью до когомологичности называется *двумерной группой когомологий* (с коэффициентами в \mathbb{Z}_2) пространства I^* относительно его черного подпространства. Препятствие Ван Кампена (с коэффициентами в \mathbb{Z}_2) определяется как $v(\varphi) = [\nu(f)] \in H_\varphi^2(I^*)$.

Чтобы доказать корректность этого определения, т. е. независимость $v(\varphi)$ от выбора пути f , рассмотрим пути $f_0, f_1: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения, близкие к φ . Возьмем произвольную гомотопию $f_t: I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \in [0, 1]$ общего положения, близкую к φ . На каждом ребре $i \times a_j$ или $a_j \times i$ таблицы I^* поставим число (по модулю 2) моментов времени t , для которых $f_t(a_j) \in f_t(i)$ (это число конечно по соображениям общего положения). Полученную расстановку нулей и единиц на ребрах таблицы I^* обозначим через $N(\{f_t\})$. Так как $f_t(x)$ близко к $\varphi(x)$, то из $\varphi(a_j) \notin \varphi(i)$ вытекает $f_t(a_j) \notin f_t(i)$. Поэтому $N(\{f_t\}) \in C_\varphi^1(I^*)$. Легко проверить, что $\nu(f_0) - \nu(f_1) = \delta N(\{f_t\})$. Поэтому $v(\varphi)$ не зависит от f . Ясно, что $v(\varphi)$ является препятствием к аппроксимируемости пути φ вложениями.

Доказательство изоморфизма $H_0(\Delta) \cong H^2(I_\varphi^*)$ (он называется изоморфизмом Пуанкаре) и того, что два построенных препятствия Ван Кампена переходят друг в друга при этом изоморфизме, оставляем читателю в качестве задачи (решите сначала задачу 3). \square

Конструкция препятствия Ван Кампена $v(\varphi) \in H_0(\Delta)$ и доказательство достаточности в теореме (которого мы здесь не приводим) были получены слушателем курса, по материалам которого написана настоящая статья [15].

Обозначим через $I^{*\varphi}$ объединение черных клеток и ребер. Стандартными обозначениями групп $C_\varphi^k(I^*, \cdot)$ и $H_\varphi^2(I^*, \cdot)$ являются $C^k(I^*, I^{*\varphi}, \cdot)$ и $H^2(I^*, I^{*\varphi}, \cdot)$, соответственно.

3. (Вычисление) а) $H_\varphi^2(I^*) \cong \mathbb{Z}_2^k$, где k — число кусков таблицы I^* , ограниченных черными ребрами и содержащих хотя бы одну белую клетку.

б) Для каждого куска из а) считаем сумму стоящих в нем чисел расстановки $\nu(f)$. Тогда $v(\varphi)$ есть набор из k таких сумм.

4. а) Если симплициальный путь $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ аппроксимируем вложениями, то

для любого непрерывного движения точек x и y по отрезку I , в процессе которого $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, а в конце которого точки x и y возвращаются каждая в свое исходное положение (т. е. для любого непрерывного отображения $S^1 \rightarrow \{(x, y) \in I \times I \mid \varphi(x) \neq \varphi(y)\}$), число оборотов вектора от $\varphi(x)$ к $\varphi(y)$ в процессе этого движения равно нулю.

б) То же верно для цикла $\varphi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и для отображения $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ произвольного графа K .

в) Трехкратная намотка $\varphi: S^1 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ не аппроксимируется вложениями, хотя для нее выполнено условие (R).

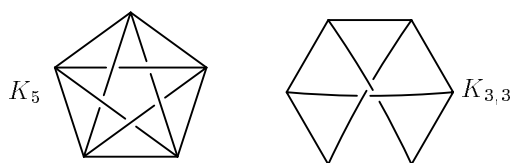


Рис. 2.7.

д) В каждой точке (x, y) на ребре таблицы I^* поставим вектор с направлением от $f(x)$ к $f(y)$. Тогда в каждой клетке таблицы I^* стоит число «четность числа оборотов вектора при обходе по ее границе».

е) Рассмотрим более слабую форму (r) условия (R) : число оборотов четно. Тогда $(r) \Leftrightarrow (v(\varphi) = 0)$. Таким образом, препятствие Ван Кампена является частным случаем препятствий, рассмотренных в §1, т.к. таблицу I^* можно рассматривать как двумерный полиэдр, а клетки $i \times j$ как его двумерные клетки.

5. Постройте препятствие Ван Кампена $V(\varphi)$ с \mathbb{Z} -коэффициентами и докажите для него аналог задач 3 и 4.

6. Постройте аналог препятствий $v(\varphi)$ и $V(\varphi)$ для аппроксимируемости циклов вложениями. Докажите их неполноту (даже для отображений, образами которых являются триоды).

ТЕОРЕМА. Следующие условия равносильны для конечного графа K :

(P) K планарен (т. е. у него существует разбиение, ребра которого попарно не пересекаются),

(K) K не содержит подграфов, гомеоморфных графам K_5 (полный граф с 5 вершинами) и $K_{3,3}$ (домики и колодцы) (рис. 2.7),

(v) препятствие Ван Кампена $v(K) \in H^2(K^*)$ нулевое.

Условие (K) проще, чем (v) , но не обобщается на высшие размерности.

Набросок определения $H^2(K^*)$, $v(K)$ и доказательства. Чтобы объяснить идею построения препятствия Ван Кампена, докажем непланарность графа K_5 . Возьмем любое отображение общего положения $f: K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Для любых двух ребер σ, τ пересечение $f(\sigma) \cap f(\tau)$ состоит из конечного числа точек. Пусть $v(f)$ будет суммой по модулю 2 чисел $|f(\sigma) \cap f(\tau)|$ по всем неупорядоченным парам $\{\sigma, \tau\}$ несмежных ребер графа K_5 . Для отображения f , показанного на рис. 2.7, $v(f) = 1$. Для каждого ребра графа K_5 с вершинами a, b граф $K_5 - \{a, b\}$, полученный удалением из K_5 вершин a, b и внутренних ребер, выходящих из a, b , есть окружность (это то самое свойство графа K_5 , которое необходимо для доказательства). Поэтому аналогично второму решению задачи 1а $v(f)$ не зависит от f . Значит, $v(f) = 1$ для *любого* отображения $f: K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Следовательно, K_5 не планарен. Непланарность графа $K_{3,3}$ доказывается аналогично. Итак, $(P) \Rightarrow (K)$ доказано.

Докажем теперь $(P) \Rightarrow (v)$. Зафиксируем триангуляцию T графа K . Для любого отображения $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения и любых двух несмежных ребер σ, τ из K пересечение $f(\sigma) \cap f(\tau)$ состоит из конечного числа точек. Пусть $\nu(f)_{\sigma\tau} = |f(\sigma) \cap f(\tau)| \pmod{2}$. Тогда $\nu(f) \in C^2(K^*)$, где $C^2(K^*)$ есть множество расстановок 0 и 1 на неупорядоченных парах непересекающихся ребер графа K с операцией покомпонентного сложения.

При движении Райдемайстера на рис. 2.6b к $\nu(f)$ добавляется расстановка единицы на паре $\alpha \times \beta$ для $\alpha \in \alpha$ и нуля на остальных парах. Эту расстановку назовем *элементарной кограницей* $\delta(\alpha \times \beta)$ неупорядоченной пары $\{\alpha, \beta\}$. Группа расстановок нулей и единиц на парах $\{\alpha, \beta\}$ с операцией покомпонентного сложения обозначается через $C^1(K^*)$. Итак, $N(\{f_t\}) \in C^1(K^*)$. Определим отображение $\delta: C^1(K^*) \rightarrow C^2(K^*)$, отношение когомологичности на $C^2(K^*)$, *двумерную группу когомологий* $H^2(K^*) = C^2(K^*)/\delta(C^1(K^*))$ и *препятствие Ван Кампена* $v(K) = [\nu(f)] \in H^2(K^*)$, как и в доказательстве предыдущей теоремы.

Для заданных отображений $f_0, f_1: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения рассмотрим произвольную гомотопию $f_t: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения. На каждой паре $\{\alpha, \beta\}$ поставим число (по модулю 2) моментов t , для которых $f_t(\alpha) \in f_t(\beta)$. Полученную расстановку нулей и единиц на парах $\{\alpha, \beta\}$ обозначим через $N(\{f_t\})$ (заметим, что в [11, §2] расстановка $N(\{f_t\})$ определена неправильно). Легко проверить, что $\nu(f_0) - \nu(f_1) = \delta N(\{f_t\})$. Значит, $v(K)$ не зависит от f , и поэтому является препятствием к вложимости графа K в плоскость.

Импликация $(K) \Rightarrow (P)$ была доказана Казимиром Куратовским в 1930 г. (см. простое доказательство в [7]). Доказательство импликации $(v) \Rightarrow (K)$ оставляем читателю в качестве задачи. Прямое доказательство импликаций $(v) \Rightarrow (P)$ и $(K) \Rightarrow (v)$ см. в [13]. \square

7. а) Постройте препятствие Ван Кампена $V(K)$ с целыми коэффициентами.

б) Постройте препятствие Ван Кампена $v(K)$ к вложимости n -полиэдра K в \mathbb{R}^{2n} и докажите, что n -остов $(2n+2)$ -симплекса не вложим в \mathbb{R}^{2n} .

§3. В НАПРАВЛЕНИИ ШТИФЕЛЯ И УИТНИ

Напомним определение утолщения и двумерного многообразия, используемые в этом параграфе. Для графа K рассмотрим объединение дисков, число которых равно числу вершин графа K . На каждом таком диске введем ориентацию (или, что то же самое, вложим эти диски в плоскость с фиксированной ориентацией). Тогда граничные окружности дисков тоже будут ориентированы. На каждой такой граничной окружности отметим непересекающиеся отрезки, отвечающие выходящим из соответствующей вершины ребрам. Для каждого ребра графа K соеди-

ним (не обязательно в плоскости) соответствующие ему два отрезка ленточкой. Эта ленточка называется *перекрученной*, если стрелки на двух ее противоположных концах, лежащих в дисках, совпадают. Ленточка называется *неперекрученной*, если эти стрелки противоположны. Пусть N — объединение построенных дисков и ленточек. Топологическая пара (N, K) , состоящая из N и графа K , естественно вложенного в N , называется *утолщением* графа K . Иногда для краткости мы будем называть утолщением поверхность N . Два утолщения одного графа K *эквивалентны*, если можно изменить ориентации на их дисках так, чтобы

- 1) ленточки в двух утолщениях, соответствующие одному и тому же ребру графа K , были бы одновременно перекручены или нет, и
- 2) для любой вершины графа K непересекающиеся отрезки на граничной окружности соответствующего диска идут в одинаковом (ориентированном) порядке.

Заклеив все граничные окружности утолщения дисками, получим *замкнутое 2-многообразие*. Утолщение называется *триангуляцией* соответствующего 2-многообразия, если каждая граничная окружность этого утолщения проходит ровно по трем ленточкам, ровно по трем дискам и при этом каждую ленточку и каждый диск пересекает ровно по одному отрезку. Каждое замкнутое ориентируемое связное 2-многообразие эквивалентно (мы не уточняем, в каком смысле) сфере с g ручками. Здесь g — некоторое число, однозначно определяемое по поверхности и называемое ее *родом*.

А. ОРИЕНТИРУЕМОСТЬ

Утолщение называется *ориентируемым*, если оно эквивалентно утолщению, не имеющему перекрученных ленточек. Замкнутое 2-многообразие, полученное из некоторой триангуляции, называется *ориентируемым*, если эта триангуляция ориентируема. При помощи перехода к двойственному клеточному разбиению доказывается, что это определение равносильно стандартному: можно ввести ориентацию на всех 2-симплексах триангуляции (в обычном смысле), так что ориентации соседних 2-симплексов согласованы. Ориентируемость не зависит от триангуляции (кто не хочет этого доказывать, может считать, что ниже везде рассматриваются 2-многообразия с фиксированной триангуляцией).

1. Утолщение окружности на рис. 3.1 (лист Мёбиуса) неориентируемо.
2. Гомеоморфные графы имеют одинаковое количество (ориентируемых) утолщений с точностью до эквивалентности.
3. Сколько (ориентируемых) утолщений с точностью до эквивалентности у
 - а) окружности, б) триода, в) креста, д) n -ода, е) восьмерки, ф) буквы Θ ?

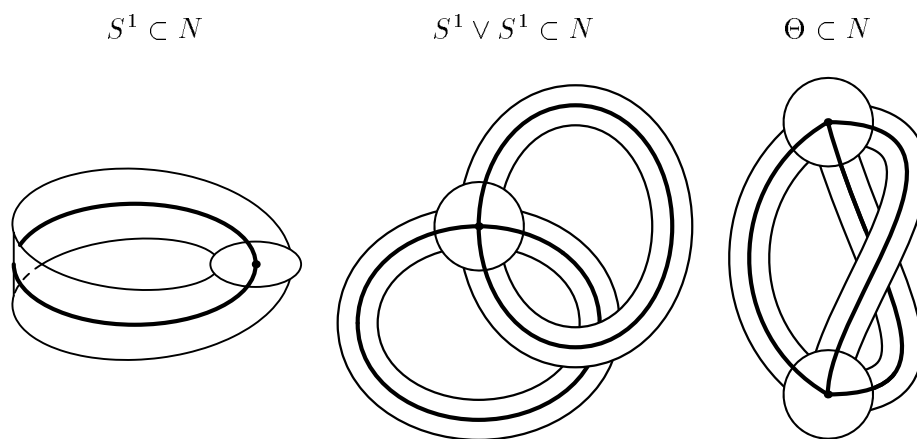


Рис. 3.1.

Рис. 3.2.

Проиллюстрируем метод теории препятствий на примере получения критерия ориентируемости утолщения. Этот критерий является по сути лишь переформулировкой определения ориентируемости на алгебраический язык. Кроме того, существует более простой критерий ориентируемости (задача 5). Поэтому приводимый критерий ориентируемости утолщения важен не сам по себе, а именно как иллюстрация метода теории препятствий. Идея доказательства этого критерия нужна при классификации утолщений (задачи 8 и 9).

ТЕОРЕМА. Утолщение (N, K) (или двумерное многообразие N) ориентируемо тогда и только тогда, когда его первый класс Штифеля – Уитни $w_1(N, K) \in H^1(K)$ (или $w_1(N) \in H^1(N)$) нулевой.

ВЫЧИСЛЕНИЕ. $H^1(K) \cong \mathbb{Z}_2^{E-V+C}$ ($H^1(N) = \mathbb{Z}_2^{2g} = \mathbb{Z}_2^{2-\chi}$, где g и χ — род и эйлерова характеристика поверхности N , соответственно).

Определение $H^1(K)$, $w_1(N, K)$, $H^1(N)$, $w_1(N)$, $H^1(N)$ и доказательство. Рассмотрим сначала случай утолщений. Возьмем набор ориентаций o на дисках данного утолщения N . На каждом ребре графа K поставим 1, если соответствующая ленточка перекручена, и 0 в противном случае. Полученную расстановку назовем *препятствующей* и обозначим $\omega(o)$: если $\omega(o) = 0$, то утолщение N ориентируемо. Конечно, $\omega(o)$ зависит также от утолщения (N, K) , но мы не указываем это в обозначениях. Множество всех расстановок нулей и единиц на ребрах графа K с операцией покомпонентного сложения обозначим через \mathbb{Z}_2^E . Расстановки можно складывать: для этого просто складываются числа, стоящие на каждом ребре (такое сложение называется *покомпонентным*).

Различие между наборами ориентаций o и o' можно измерять (и задавать) так. На каждой вершине графа K поставим 0, если ориентации соответствующего диска в o и в o' совпадают, и 1 в противном случае. Полученную расстановку назовем *различающей* и обозначим $d(o, o')$: если $d(o, o') = 0$, то $o = o'$ (и наоборот). Группу всех расстановок 0 и 1 на вершинах графа K с операцией покомпонентного сложения обозначим через \mathbb{Z}_2^V .

Если $\omega(o) \neq 0$, то o не определяет ориентации утолщения, но еще не все потеряно: можно попытаться изменить o , так чтобы препятствующая расстановка стала нулевой. Выясним, как $\omega(o)$ зависит от o . При изменении ориентации одного диска, соответствующего вершине a , к $w(o)$ прибавляется расстановка 1 на ребрах, выходящих из a , и 0 на всех остальных ребрах. Эта расстановка называется *элементарной кограницей вершины a* и обозначается δa . Каждой вершине a отвечает «характеристическая» расстановка $a \in \mathbb{Z}_2^V$ единицы в вершине a и нуля в остальных вершинах. Определим отображение $\delta: \mathbb{Z}_2^V \rightarrow \mathbb{Z}_2^E$ формулой $\delta(a_1 + \dots + a_k) = \delta a_1 + \dots + \delta a_k$. Тогда $\omega(o) - \omega(o') = \delta d(o, o')$.

Назовем расстановки $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Z}_2^E$ *когоморфичными*, если $\omega_1 - \omega_2 = \delta\Omega$ для некоторого $\Omega \in \mathbb{Z}_2^V$. Группа $H^1(K) = \mathbb{Z}_2^E / \delta(\mathbb{Z}_2^V)$ расстановок с точностью до когоморфичности называется *одномерной группой когомологий графа K с коэффициентами в \mathbb{Z}_2* . Из формулы $\omega(o) - \omega(o') = \delta d(o, o')$ следует, что *первый класс Штифеля – Уитни* $w_1(N, K) = [\omega(o)] \in H^1(K)$ не зависит от o . Значит, $w_1(N, K)$ является препятствием к ориентируемости утолщения (N, K) . Так как $d(o, o')$ может принимать *любое* значение из группы $\delta(\mathbb{Z}_2^V)$, то в случае $\omega(o) \in \delta(\mathbb{Z}_2^V)$ можно так изменить o на o' , чтобы получилось $\omega(o') = 0$. Значит, $w_1(N)$ является *полным* препятствием к ориентируемости утолщения N .

Критерий ориентируемости многообразий получается аналогично. В этом случае для препятствующей расстановки $w(o)$ сумма чисел на трех ребрах, образующих границу некоторого приклеенного диска, равна нулю. Расстановки с таким условием образуют подгруппу *одномерных коциклов* $Z^1(N) < \mathbb{Z}_2^E$. Проверяется, что $\delta(\mathbb{Z}_2^V) \subset Z^1(N)$. *Первый класс Штифеля – Уитни* $w_1(N) = [\omega(o)]$ получается лежащим в *одномерной группе когомологий* 2-многообразия N (с коэффициентами в \mathbb{Z}_2) $H^1(N) = Z^1(N) / \delta(\mathbb{Z}_2^V)$. \square

Для многообразия N класс $[\omega(o)] \in C^1(N) / \delta(\mathbb{Z}_2^V) \cong H^1(K)$ также является (полным) препятствием к ориентируемости, но он лежит в группе $H^1(K)$, которая слишком велика и топологически не инвариантна, т.е. зависит от графа K , а не от многообразия N .

4. Группа $H^1(K)$ зависит только от топологического типа графа K , т.е. одномерные группы когомологий гомеоморфных графов изоморфны.

5. Следующие условия на утолщение (N, K) равносильны ориентируемости:

Н) первый класс Штифеля – Уитни $w_1^*(N, K): H_1(K) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ нулевой,

М) (N, K) не содержит подутолщения, гомеоморфного изображенному на рис. 3.1 листу Мёбиуса.

Здесь $H_1(K)$ — множество подграфов графа K , у которых степень каждой вершины четна (или, что то же самое, множество таких расстановок 0 и 1 на ребрах графа K , что для любой вершины a число 1 на ребрах, выходящих из вершины a , четно). Операция симметрической разности (или, что то же самое, покомпонентной суммы по модулю 2) превращает это множество в абелеву группу и в линейное пространство над \mathbb{Z}_2 . Для любого подграфа $g \in H_1(K)$ сумма $\omega(o) \cdot g$ значений $\omega(o)$ по всем ребрам подграфа g не зависит от набора ориентаций o . Поэтому формула $w_1^*(N, K)(g) = \omega(o) \cdot g$ корректно задает линейную функцию $w_1^*(N, K): H_1(K) \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Утолщения (N, K) и (N', K') гомеоморфны, если от одного перейти к другому операциями одновременного подразделения ребра графа и соответствующей ленточки утолщения или обратными. Если L — подграф графа K , то утолщение N графа K содержит утолщение графа L , называемое *подутолщением* утолщения N . Указание к доказательству $\text{Н} \Leftrightarrow \text{М}$: несамопересекающиеся циклы образуют базис в линейном пространстве $H_1(K)$ над \mathbb{Z}_2 .

6. а) $H_1(K) \cong \mathbb{Z}_2^{E-V+C} \cong H^1(K)$.

б) Отображение $\varphi: H^1(K) \rightarrow (H_1(K))^*$, заданное формулой $\varphi[\nu](h) = \nu \cdot h$ корректно определено, является изоморфизмом и переводит w_1 в w_1^* (см. задачу 5).

7. Для графа K обозначим через $ST^2(K)$ ($T^2(K)$) множество ориентируемых (всех) утолщений (N, K) с точностью до эквивалентности. Для связного *специального* (т. е. имеющего только вершины степени 3) графа $|ST^2(K)| = 2^{V-1}$ и $|T^2(K)| = 2^E$ (это неверно без предположения о специальности — см. задачу 3).

8. Для связного графа K (не гомеоморфного точке, окружности или отрезку) с V вершинами степеней k_1, \dots, k_V а) $|ST^2(K)| = \frac{1}{2}(k_1 - 1)! \dots (k_V - 1)!$.

б) первый класс Штифеля – Уитни определяет инвариант $w_1: T^2(K) \rightarrow H^1(K)$.

с) $|T^2(K)| = 2^{E-V}(k_1 - 1)! \dots (k_V - 1)!$, где $E = \frac{1}{2}(k_1 + \dots + k_V)$.

9. Для графа K рассмотрим объединение трехмерных шаров, число которых равно V . На каждом таком шаре введем ориентацию (или, что то же самое, вложим эти шары в пространство с фиксированной ориентацией). Тогда граничные сферы дисков тоже будут ориентированы. На каждой такой граничной сфере отметим непересекающиеся двумерные диски, отвечающие выходящим из соответствующей вершины ребрам. Для каждого ребра графа K соединим (не обязательно в трехмерном пространстве) соответствующие ему два диска трубкой. Эта трубка называется *перекрученной*, если ориентации на двух ее противоположных основаниях, лежащих в шарах, совпадают. Трубка называется *неперекрученной*, если эти ориентации противоположны. Пусть N — объединение построенных шаров и трубок. Топологическая пара (N, K) , состоящая из N и графа K , естественно вложенного в N , называется *3-утолщением* графа K . Два 3-утолщения графа K эквивалентны, если можно изменить ориентации на их дисках так, чтобы трубки в двух утолщениях, соответствующие одному и тому же ребру графа K , были бы одновременно перекручены или нет. Обозначим через $T^3(K)$ множество 3-утолщений графа K с точностью до эквивалентности. Тогда $w_1: T^3(K) \rightarrow H^1(K)$ является взаимно однозначным отображением на.

10. Какие из утолщений задач 3е, 3г вложимы в плоскость?

11. Понятие утолщения возникло при исследовании вложимости графа в плоскость и в поверхности (ср. §2). Действительно, когда граф вложен в плоскость (или в поверх-

ность), легко выбрать окрестность этого графа, являющуюся его утолщением. Если дано отображение общего положения графа K в плоскость, то аналогично можно построить ориентируемое утолщение графа K , соответствующее этому отображению. Так как любой граф имеет конечное число утолщений (задача 8), то вопрос о вложимости графов в плоскость сводится к вопросу о вложимости ориентируемых утолщений в плоскость.

Следующие условия на утолщение (N, K) равносильны:

P) N вложимо в плоскость,

E) $V - E + S = 2$, где V и E — количества вершин и ребер графа K , а S — число граничных окружностей утолщения N ,

S) (N, K) не содержит подутолщений, гомеоморфных изображенным на рис. 3.2.

12. Сформулируйте и решите аналоги задачи 11 для вложений в поверхности (аналог критерия S — только для специальных графов и вложений в тор и лист Мёбиуса).

В. ПОСТРОЕНИЕ ЕДИНИЧНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Те, кто не знают, что такое n -мерное многообразие, могут считать, что $n = 2$. *Единичным касательным векторным полем* на подмножестве K гладкого многообразия N называется непрерывное семейство единичных касательных к N векторов в точках подмножества K , гладко зависящих от точки $x \in K$. Исследование векторных полей было начато Анри Пуанкаре в качественной теории дифференциальных уравнений. В этом параграфе, следуя идеям Хайнца Хопфа, мы построим препятствие к существованию единичного (\Leftrightarrow ненулевого) касательного векторного поля на данном гладком замкнутом многообразии. Слово «поле» будет означать «единичное касательное векторное поле».

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА – ПУАНКАРЕ. *Среди сфер с ручками только тор имеет единичное касательное векторное поле.*

Набросок доказательства. Построение поля на торе оставляем читателю в качестве упражнения. Докажем, что на сфере S^2 не существует поля (случай сфер с $g \geq 2$ ручками рассматривается аналогично). Рассмотрим на сфере граф S^1 с двумя вершинами (рис. 3.3). Построим поле на множестве S^0 этих двух вершин. Очевидно, что это можно сделать, причем однозначно (с точностью до непрерывной деформации в классе единичных касательных векторных полей). Поэтому существование поля на S^2 равносильно продолжимости построенного поля с S^0 на S^2 . Малую окрестность каждого из двух ребер графа S^1 можно рассматривать как часть плоскости. Поэтому поле на S^0 продолжается до поля на S^1 (действительно, поле на ребре есть то же самое, что отображение ребра в окружность: каждому вектору сопоставляется точка на окружности с направлением этого вектора; любое отображение границы отрезка в окружность продолжится на отрезок). Заметим, что такое продолжение неоднозначно. Обозначим полученное поле на S^1 через v . Малую окрестность каждой из

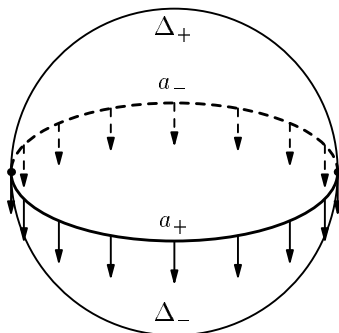


Рис. 3.3.

двух полусфер, на которые данная окружность разбивает сферу, можно рассматривать как часть плоскости. Аналогично рассуждая о продолжении поля с границы $\partial\Delta$ полусферы Δ на саму полусферу Δ , приходим к задаче о продолжении отображения $\partial\Delta \rightarrow S^1$ на Δ . Последнее продолжение возможно тогда и только тогда, когда степень $\varepsilon_\Delta(v)$ отображения $\partial\Delta \rightarrow S^1$ равна нулю. Положим $e(v) = \varepsilon_{\Delta_+}(v) + \varepsilon_{\Delta_-}(v)$. Ясно, что для поля v' , определенного на *всей* сфере, $e(v') = 0$. Для поля v , изображенного на рис. 3.3, $e(v) = 1 + 1 = 2$ (разберитесь, почему не $1 - 1 = 0!$). Различие между полями v и v' на S^1 , совпадающими на S^0 , можно измерять (и задавать) парой чисел (d_+, d_-) : число d_\pm равно числу оборотов вектора при движении от начала ребра a_\pm к его концу (при этом берется вектор первого поля) и обратно (при этом берется вектор второго поля). Ясно, что $\varepsilon_{\Delta_\pm}(v') = \varepsilon_{\Delta_\pm}(v) \pm d_+ \pm d_-$. Поэтому $e(v) = e(v')$ — противоречие. \square

ТЕОРЕМА ХОПФА. *На ориентируемой n -многообразии N существует единичное касательное векторное поле тогда и только тогда, когда класс Эйлера $e(N) \in H^n(N, \mathbb{Z})$ нулевой.*

ВЫЧИСЛЕНИЕ. *Если N связно и имеет непустой край, то $H^n(N, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{0}$ и $e(N) = 0$. Если N связно и замкнуто, то $H^n(N, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ и $e(N) = \chi = 2 - 2g$, где χ и g — эйлерова характеристика и род многообразия N (второе равенство имеет смысл и справедливо только для $n = 2$). Далее, $e(N^{2k+1}) = 0$ и $e(S^{2k}) = 2$.*

Определение $H^n(N, \mathbb{Z})$, $e(N)$ и доказательство. Рассмотрим только случай $n = 2$ (общий случай рассматривается аналогично). Возьмем некоторую триангуляцию T многообразия N . Построим поле на множестве T^0 ее вершин. Очевидно, что это можно сделать, причем однозначно (с точностью до непрерывной деформации в классе единичных касательных векторных полей). Поэтому существование поля на N равносильно продолжимости построенного поля с T^0 на N .

Теперь продолжим построенное поле с T^0 на объединение T^1 ребер триангуляции T . Любое ребро триангуляции имеет малую окрестность, диффеоморфную плоскости. Поэтому поле на подмножестве этой окрестности (или, что то же самое, на подмножестве плоскости) отождествляется с отображением этой части (в данном случае, ребра) в окружность: каждому вектору сопоставляется точка на окружности с направлением этого вектора. Любое отображение границы отрезка в окружность продолжится на отрезок, поэтому построенное поле можно продолжить с T^0 на T^1 . Заметим, что такое продолжение неоднозначно.

Пусть теперь на T^1 задано поле v . Попробуем продолжить его на N . Аналогично рассуждая о продолжении поля с границы $\partial\Delta$ грани Δ на саму грань Δ , приходим к задаче о продолжении отображения $\partial\Delta \rightarrow S^1$ на Δ . Последнее продолжение возможно тогда и только тогда, когда степень отображения $\partial\Delta \rightarrow S^1$ равна нулю. Выберем ориентацию на многообразии N и окружности S^1 . Поставим на каждой грани триангуляции T степень указанного отображения $\partial\Delta \rightarrow S^1$. Полученную расстановку целых чисел на гранях триангуляции T назовем *препятствующей* и обозначим через $\varepsilon(v)$: поле v продолжается на N тогда и только тогда, когда $\varepsilon(v) = 0$. Группу всех расстановок целых чисел на гранях триангуляции T с операцией покомпонентного сложения обозначим через \mathbb{Z}^F , где F — количество граней триангуляции T .

Различие между полями v и v' на T^1 , совпадающими на T^0 , можно измерять (и задавать) так. На каждом ребре триангуляции T поставим число поворотов вектора при движении от начала ребра e к его концу (при этом берется вектор первого поля) и обратно (при этом берется вектор второго поля). Полученную расстановку назовем *различающей* и обозначим $d(v, v')$: если $d(v, v') = 0$, то поле v можно непрерывно продеформировать в классе единичных касательных векторных полей в поле v' (обратное также справедливо). Группу всех расстановок целых чисел на ребрах триангуляции T с операцией покомпонентного сложения обозначим через \mathbb{Z}^E , где E — количество ребер триангуляции T .

Если $\varepsilon(v) \neq 0$, то v не продолжается на T^2 , но еще не все потеряно: можно попытаться изменить поле v на T^1 , так чтобы препятствующая коцепь стала равной нулю. Для этого выясним, как $\varepsilon(v)$ зависит от v . При изменении поля на одном ребре e «на один оборот» к $\varepsilon(v)$ прибавляется расстановка $+1$ и -1 на двух примыкающих к e гранях (выбор знака определяется ориентациями) и 0 на всех остальных гранях. Эта расстановка называется *элементарной кограницей ребра e* и обозначается δe . Каждому ребру e отвечает «характеристическая» расстановка $e \in \mathbb{Z}^E$ единицы на ребре e и нуля на остальных ребрах. Определим отображение $\delta: \mathbb{Z}^E \rightarrow \mathbb{Z}^F$ формулой $\delta(n_1 a_1 + \dots + n_k a_k) = n_1 \delta a_1 + \dots + n_k \delta a_k$. Тогда $\varepsilon(v) - \varepsilon(v') = \delta d(v, v')$.

Назовем расстановки $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{Z}^F$ кохомологичными, если $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \delta\Omega$ для некоторого $\Omega \in \mathbb{Z}^E$. Группа $H^2(N, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^F / \delta(\mathbb{Z}^E)$ расстановок с точностью до кохомологичности называется *двумерной группой кохомологий поверхности N с коэффициентами в \mathbb{Z}* . Из формулы $\varepsilon(v) - \varepsilon(v') = \delta d(v, v')$ следует, что класс Эйлера $e(N) = [\varepsilon(v)] \in H^2(N, \mathbb{Z})$ не зависит от v . Значит, $e(N)$ является препятствием к существованию поля на N . Независимость класса Эйлера от T мы оставляем читателю в качестве задачи. Так как $d(v, v')$ может принимать любое значение из группы $\delta(\mathbb{Z}^E)$, то в случае $\varepsilon(v) \in \delta(\mathbb{Z}^E)$ можно изменить v на v' , чтобы получилось $\varepsilon(v') = 0$. Это доказывает часть «тогда». \square

13. Определите n -й класс Штифеля – Уитни $w_n(N) \in H^n(N)$ как полное препятствие к построению единичного касательного векторного поля на неориентируемом n -многообразии N . Вычислите его для $n = 2$.

С. ПОСТРОЕНИЕ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Ученик Хопфа Эдуард Штифель рассмотрел задачу о построении *пары, тройки* и т. д. *ортонормированных* касательных векторных полей на данном многообразии (ввиду каноничности процесса ортогонализации Грама – Шмидта ортонормированность можно заменить на линейную независимость). Развивая идеи Хопфа, около 1934 г. он пришел к определению характеристических классов (окончательная формализация была завершена Норманом Стинродом). Любопытно, что Штифель начал с частного случая ориентируемых 3-многообразий и пытался построить пример такого многообразия, на котором не существует пары (\Leftrightarrow тройки) ортонормированных касательных векторных полей. Затем, используя свою теорию, он доказал, что такого многообразия нет. Позже было проделано много других конкретных вычислений, дающих интересные следствия (например, несуществование алгебр с делением на \mathbb{R}^n для $n \neq 2^k$).

Через $\mathbb{Z}_{(i)}$ обозначим группу \mathbb{Z} для четного i и \mathbb{Z}_2 для нечетного i .

ТЕОРЕМА ШТИФЕЛЯ. *На 3-многообразии N существует пара ортонормированных касательных векторных полей тогда и только тогда, когда второй класс Штифеля – Уитни $w_2(N) \in H^2(N)$ нулевой.*

ВЫЧИСЛЕНИЕ. $w_2(N) = 0$ для ориентируемого 3-многообразия N .

Набросок определения $w_2(N)$, $H^2(N)$ и доказательства. Триангулируем N . Построим пару векторных полей на нульмерном остове. Для продолжения пары полей на ребро покроем его одной картой, тогда каждой паре векторов в точке x на этом ребре сопоставится пара векторов в \mathbb{R}^3 , а всему симплексу отображение ребра в $V_{3,2}$ (пространство ортонормированных 2-реперов в \mathbb{R}^3). Из связности пространства $V_{3,2}$ следует, что

построенная пара векторных полей продолжается на 1-остов. Отображение границы $\partial\Delta$ грани Δ в $V_{3,2}$ ставит ему в соответствие элемент из $\pi_1(V_{3,2}) \cong \mathbb{Z}_2$. Таким образом, заданию пары w ортонормированных векторных полей на 1-остове соответствует препятствующая расстановка $\varepsilon(w)$ нулей и единиц на гранях. В нашем случае для препятствующей расстановки $\varepsilon(w)$ сумма чисел на гранях любого 3-симплекса равна нулю. Расстановки с таким условием образуют подгруппу *двумерных коциклов* $Z^2(T) < \mathbb{Z}_2^F$. Далее аналогично предыдущему определяется отображение $\delta: \mathbb{Z}_2^E \rightarrow \mathbb{Z}_2^F$ и доказывается, что $\delta(\mathbb{Z}_2^E) \subset Z^2(T)$ и что *второй класс Штифеля – Уитни* $w_2(N) = [\varepsilon(w)] \in H^2(N) = Z^2(T)/\delta(\mathbb{Z}_2^E)$ равен нулю тогда и только тогда, когда w можно продолжить на 2-остов. Пары w ортонормированных векторных полей на 2-остове всегда можно продолжить на все многообразие N , поскольку $\pi_2(V_{3,2}) = \pi_2(SO_3) = \pi_2(\mathbb{R}P^3) = \pi_2(S^3) = 0$. \square

ТЕОРЕМА. *Если на n -многообразии N существует k ортонормированных касательных векторных полей ($1 < k < n$), то $(n - k + 1)$ -й класс Штифеля – Уитни*

$$W_{n-k+1}(N) \in H^{n-k+1}(N, \mathbb{Z}_{(n-k)})$$

является нулевым.

ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ. $w_i(\mathbb{R}P^n) = C_n^i \bmod 2$, где $w_i(N) \in H^i(N, \mathbb{Z}_2)$ — приведение по модулю 2 препятствия $W_i(N)$ (которое легче вычисляется).

Набросок определения $H^{n-k+1}(N, \mathbb{Z}_{(n-k)})$, $W_{n-k+1}(N)$ и доказательства. Аналогично предыдущему, из соотношений $\pi_i(V_{nk}) = 0$ для $i < n - k$, следует, что k полей беспрепятственно строятся на $(n - k)$ -остове. Поскольку $\pi_{n-k}(V_{nk}) = \mathbb{Z}_{(n-k)}$ для $1 < k < n$, то при продолжении поля на $(n - k + 1)$ -остов появляется препятствие $W_{n-k+1} \in H^{n-k+1}(N, \mathbb{Z}_{(n-k)})$ (которое уже не является полным). \square

14. а) Определите описанным выше способом w_1 и покажите, что это определение совпадает с полученным в §3.А.

б) В 1942 г. Лев Семенович Понтрягин придумал новые характеристические классы. Владимир Абрамович Рохлин показал, что эти классы естественно появляются при построении системы касательных векторных полей, некоторые фиксированные подсистемы которой имеют ранг, не меньший заданного ранга для каждой из этих фиксированных подсистем (обобщение задачи Штифеля). В дальнейшем оказалось, что классы, рассмотренные Понтрягиным, зависимы (мы не уточняем, в каком смысле) между собой и с классами Штифеля – Уитни. Поэтому среди всех этих классов выделены *классы Понтрягина*, образующие «максимальную независимую систему».

Определите j -й класс Понтрягина $p_j(N) \in H^{4j}(N, \mathbb{Z})$ как препятствие к построению системы из $n - 2j + 2$ векторов, имеющей ранг не менее $n - 2j + 1$ в каждой точке.

Д. ПОГРУЗИМОСТЬ И ВЛОЖИМОСТЬ МНОГООБРАЗИЙ

Гладкое отображение $f: N \rightarrow \mathbb{R}^m$ гладкого многообразия N называется *погружением*, если $df(x) \neq 0$ для любой точки $x \in N$. Погружение $f: N \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *вложением*, если оно инъективно. По соображениям общего положения, любое n -многообразие вкладывается в \mathbb{R}^{2n+1} и погружается в \mathbb{R}^{2n} . В 1935 г. Хопф рассказал о результатах Штифеля на Международной топологической конференции в Москве. Там выяснилось, что Хасслер Уитни около 1934 г. тоже естественно пришел к определению характеристических классов, изучая вложимость и погружимость n -многообразий в \mathbb{R}^m с $m < 2n + 1$ и $m < 2n$, соответственно. Используя свою теорию, Уитни доказал вложимость n -многообразий в \mathbb{R}^{2n} , их погружимость в \mathbb{R}^{2n-1} , а также невложимость и непогружимость некоторых проективных пространств. Позже было проделано много других конкретных вычислений, дающих интересные следствия.

ТЕОРЕМА УИТНИ. *Если n -многообразие N погружимо в \mathbb{R}^m , то $(m - n + 1)$ -й нормальный класс Штифеля – Уитни*

$$\bar{W}_{m-n+1}(N) \in H^{m-n+1}(N, \mathbb{Z}_{(m-n)})$$

является нулевым.

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ. $\sum_{i=0}^k C_n^{k-i} \bar{w}_i(\mathbb{R}P^n) = 0$, где $k > 1$ и $\bar{w}_i(N) \in H^i(N, \mathbb{Z}_2)$ — приведение по модулю 2 препятствия $\bar{W}_i(N)$. Если q меньше количества единиц в двоичной записи числа n , то $\bar{w}_{n-q}(N) = 0$.

Набросок определения $H^{m-n+1}(N, \mathbb{Z}_{(m-n)})$, $\bar{W}_{m-n+1}(N)$ и доказательства. Если N погружимо в \mathbb{R}^{2n-1} , то для композиции $N \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ погружения и включения существует единичное нормальное векторное поле. Аналогично теореме Хопфа можно определить нормальный класс Эйлера $\bar{e}(N, f) \in H^n(N, \mathbb{Z})$ как препятствие к построению единичного нормального векторного поля для погружения $f: N \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Итак, если N погружается в \mathbb{R}^{2n-1} , то $\bar{e}(N, f) = 0$ для некоторого отображения f , а именно, для композиции $f: N \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ (см., впрочем, задачу 16а). Аналогично для композиции $f: N \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^M$ погружения и включения равно нулю \mathbb{Z}_2 -препятствие к построению $M - 2n + 1$ ортонормированных нормальных векторных полей, называемое n -м нормальным классом Штифеля – Уитни $\bar{w}_n(N, f) \in H^n(N)$. Аналогично, если N погружимо в \mathbb{R}^m , то для композиции $f: N \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^M$ погружения и включения равно нулю препятствие к построению $M - m$ линейно независимых нормальных векторных полей, называемое $(m - n + 1)$ -м нормальным классом Штифеля – Уитни $\bar{W}_{m-n+1}(N, f) \in H^{m-n+1}(N, \mathbb{Z}_{(m-n)})$. Осталось доказать независимость $\bar{W}_{m-n+1}(N, f)$ от f . Класс $\bar{W}_{m-n+1}(N, f)$ сохраняется

при композиции $f: N \rightarrow \mathbb{R}^M$ с включением $\mathbb{R}^M \subset \mathbb{R}^{M'}$, поскольку гомоморфизм включения $\pi_{m-n}(V_{M-n, M-m}) \rightarrow \pi_{m-n}(V_{M'-n, M'-m})$ является изоморфизмом при $M \geq m + 2$. Возьмем теперь два разных погружения $f, g: N \rightarrow \mathbb{R}^m$. Так как $\tau \oplus \nu_f = \tau \oplus \nu_g = m$, то $\nu_f \oplus m = \nu_g \oplus m$, и $\bar{W}_{m-n+1}(N, f) = \bar{W}_{m-n+1}(N, g)$. \square

Заметим, что доказательство леммы 1 на с. 178 [5] неполно: доказано, что классы Штифеля – Уитни стабильно эквивалентных расслоений одновременно равны нулю, а не то, что они совпадают. В доказательстве теоремы Уитни фактически строится препятствие к существованию такого расслоения ν над N , что $\nu \oplus \tau = m$. На этой идее основана формулировка теоремы Смейла – Хирша о классификации погружений.

15. Аналогично нормальным классам Штифеля – Уитни *нормальные классы Понтрягина* препятствуют погружимости: если ориентируемое n -многообразие N погружимо в \mathbb{R}^m , то k -й нормальный класс Понтрягина $\bar{p}^k(N) \in H^{4k}(N, \mathbb{Z})$ нулевой для $2k > m - n$.

16. Пусть $f, f': N \rightarrow \mathbb{R}^m$ — два погружения n -многообразия N , находящиеся в общем положении.

а) Если N ориентируемо и $m = 2n$, то $f(N) \cap f'(N)$ есть конечное число точек со знаками, сумма которых равна 0 и равна $\bar{e}(N, f)$.

б) Если f, f' — вложения, то $f^{-1}(f(N) \cap f'(N))$ есть подмногообразие многообразия N , гомологический класс которого равен 0 и двойственен по Пуанкаре к $\bar{w}_{m-n}(N)$.

в) Тогда $f^{-1}(f(N) \cap f'(N))$ и $\Sigma(f) = \text{Cl}\{x \in N : |f^{-1}(f(x))| \geq 2\}$ есть погруженные подмногообразия многообразия N , причем гомологический класс первого равен 0, а второго — двойственен по Пуанкаре к $\bar{w}_{m-n}(N)$ (и не зависит от f).

17. а) Если n -многообразие N вложимо в \mathbb{R}^m , то $\bar{w}_{m-n}(N) = 0$.

б) Если к тому же N ориентируемо и $m - n$ четно, то $\bar{p}_{(m-n)/2}(N) = 0$ (см. задачу 14б).

БЛАГОДАРНОСТИ

Эта статья основана на спецсеминарах, которые второй автор вел в 1994–1999 гг. на мехмате МГУ и в июле 1999 года в Кировской Летней Математической Школе. Авторы благодарны А.Б. Сосинскому, М.Н. Вялому и В.В. Яценко за большой труд по редактированию рукописи, С.М. Гусейн-Заде за замечания, В. Курлину и Р. Садыкову за предоставление записей некоторых лекций, М. Скопенкову за обсуждения по §2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Akhmetiev P., Repovs D., Skopenkov A. Obstructions to approximating maps of n -surfaces in \mathbb{R}^{2n} by embeddings // Topol. Appl. To appear.
- [2] Болтянский В. Г. и Ефремович В. А. Наглядная топология. М.: Наука, 1982.

- [3] *Cavicchioli A., Repovš D., Skopenkov A. B.* Open problems on graphs, arising from geometric topology // *Topol. Appl.*, 1998. Vol. 84. P. 207–226.
- [4] *Freedman M. H., Krushkal V. S., Teichner P.* Van Kampen's embedding obstruction is incomplete for 2-complexes in \mathbb{R}^4 // *Math. Res. Letters*, 1994. Vol. 1. P. 167–176.
- [5] *Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.* Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.
- [6] *van Kampen E. R.* Komplexe in Euclidische Raumen // *Abb. Math. Sem. Hamburg*, 1932. Vol. 9. S. 72–78. Berichtigung dazu, s. 152–153.
- [7] *Makarychev Yu.* A short proof of Kuratowski's graph planarity criterion // *J. of Graph Theory*, 1997. Vol. 25. P. 129–131.
- [8] *Minc P.* Embedding simplicial arcs into the plane // *Topol. Proc.*, 1997.
- [9] *Repovš D., Skopenkov A. B.* Embeddability and isotopy of polyhedra in Euclidean spaces // *Труды Матем. Инст. РАН*, 1996. Т. 212. С. 173–188.
- [10] *Repovš D., Skopenkov A. B.* A deleted product criterion for approximability of a map by embeddings // *Topol. Appl.*, 1998. Vol 87. P. 1–19.
- [11] *Реповш Д., Скопенков А.* Новые результаты о вложимости полиэдров и многообразий в евклидовы пространства // *УМН*, 1999. Т. 54, №6. С. 61–109.
- [12] *Реповш Д., Скопенков А.* Кольца Борромео и препятствия к вложимости // *Труды Матем. Инст. РАН*, 1999. Т. 225. С. 331–338.
- [13] *Sarkaria K. S.* A one-dimensional Whitney trick and Kuratowski's graph planarity criterion // *Israel J. Math.*, 1991. Vol 73. P. 79–89.
- [14] *Sieklucki K.* Realization of mappings // *Fund. Math.*, 1969. Vol. 65. P. 325–343.
- [15] *Skopenkov M.* A criterion for approximability by embeddings of PL maps $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Preprint, 1999.