По-новому о старом: фрагменты классической математики

Инверсии равносторонней гиперболы

А. Руинский

Равносторонняя гипербола (каноническое уравнение $x^2 - y^2 = a^2$) является симметричной линией, оси симметрии которой взаимно перпендикулярны. Ее инверсными образами являются некоторые известные линии.

Рассмотрим следующие определения и свойства, которыми мы будем пользоваться в статье.

Определение 1. Линии Φ_1 и Φ_2 будем называть инверсными, если существует инверсия, переводящая линию Φ_1 в линию, конгруэнтную Φ_2, и наоборот. Образ линии Φ при инверсии с центром O и степенью r^2 будем обозначать $I_r^O(\Phi)$.

Определение 2. Линию Φ будем называть инверсно-симметричной, если существует инверсия, переводящая линию Φ в себя. Центр такой инверсии будем называть инверсным центром линии.

Очевидно, что при любой степени инверсии инверсный образ линии относительно инверсного центра есть линия, гомотетичная Φ.

Свойство 1. Если две линии инверсны третьей, то они инверсны друг другу.

Свойство 2. Для того, чтобы линия Ψ была инверсно-симметричной, необходимо и достаточно, чтобы существовала симметричная линия Φ и окружность $O(r)$, центр которой не лежит на оси симметрии Φ, так, что $\Psi = I_r^O(\Phi)$. Центр инверсии линии Ψ суть $M = I_r^O(O')$, где O' — точка, симметричная O относительно оси симметрии линии Φ.

Важное замечание. Ось симметрии линии Φ, на которой не лежит центр O, может быть не единственной осью симметрии линии Φ. Свойство 2 утверждает, что *существует ось симметрии* Φ, не содержащая центр O. Это замечание важно, так как если Ψ и Φ — окружности, то их оси симметрии покрывают всю плоскость.

Формулы преобразования координат. Пусть $x^2+y^2=r^2$ — окружность инверсии и $I_r^O(x;y)=(\tilde{x};\tilde{y})$. Тогда

$$\tilde{x}=\frac{xr^2}{x^2+y^2},\quad \tilde{y}=\frac{yr^2}{x^2+y^2}.$$

«Старые» координаты преобразуются в «новые» аналогичным образом.

1. Равносторонняя гипербола, лемниската Бернулли и улитка Паскаля

Теорема 1. *Инверсный образ равносторонней гиперболы относительно ее центра суть лемниската Бернулли.* (*См. рис.* 1.)

Доказательство. Напомним уравнение лемнискаты Бернулли:

$$(x^2+y^2)^2-2k^2(x^2-y^2)=0.$$

Уравнение равносторонней гиперболы — $x^2-y^2=a^2$. Применяя формулы инверсии, получаем:

$$\frac{x^2r^4}{(x^2+y^2)^2}-\frac{y^2r^4}{(x^2+y^2)^2}=a^2 \quad\Longrightarrow\quad (x^2+y^2)^2-\frac{r^4}{a^2}(x^2-y^2)=0.$$

Если $r=a$, то уравнение лемнискаты еще более упрощается: $(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$.

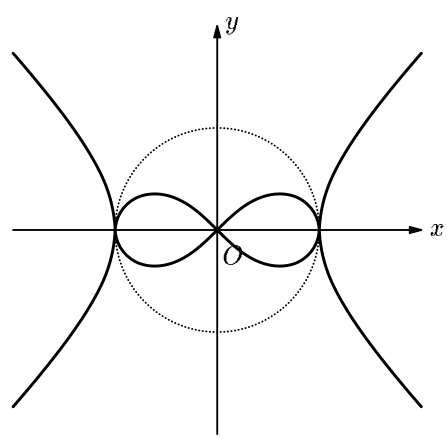


Рис. 1.

Теорема 2. *Инверсный образ равносторонней гиперболы относительно ее фокуса суть улитка Паскаля.* (*См. рис.* 2.)

Доказательство. Напомним уравнение улитки Паскаля:

$$(x^2+y^2-kx)^2-l^2(x^2+y^2)=0.$$

Фокусами равносторонней гиперболы $x^2-y^2=a^2$ являются точки $(-a\sqrt{2};0)$ и $(a\sqrt{2};0)$.

Рассмотрим инверсию с центром в левом фокусе $(-a\sqrt{2};0)$ и степенью $r^2=a^2$. Перенесем начало координат в центр инверсии: $(x-a\sqrt{2})^2-y^2=$ $=a^2$, т. е. $x^2-2\sqrt{2}ax+a^2-y^2=0$. Применяя формулы инверсии, получаем:

$$\frac{a^4(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}-2\sqrt{2}a\frac{a^2x}{x^2+y^2}+a^2=0 \quad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\quad (x^2+y^2)^2-2\sqrt{2}ax(x^2+y^2)+a^2(x^2-y^2)=0.$$

Выделим полный квадрат двух первых членов и получим:

$$(x^2+y^2)^2-2\sqrt{2}ax(x^2+y^2)+2a^2x^2-2a^2x^2+a^2(x^2-y^2)=0$$
$$\Downarrow$$
$$(x^2+y^2-\sqrt{2}ax)^2-a^2(x^2+y^2)=0.$$

Последнее уравнение определяет улитку Паскаля с $k=\sqrt{2}a$, $l=a$. Ясно, что $k=l\sqrt{2}$.

Теорема 3. *Улитка Паскаля при $k=l\sqrt{2}$ инверсна лемнискате Бернулли.*

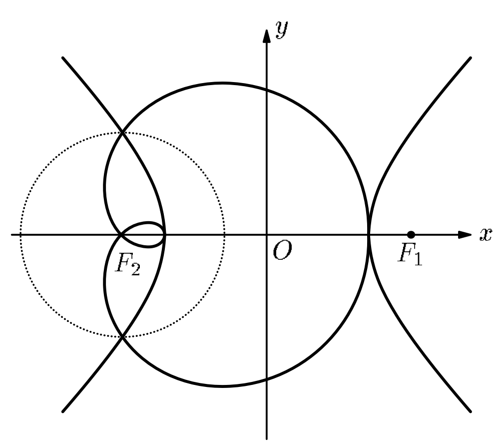


Рис. 2.

Доказательство. Так как улитка Паскаля при $k = l\sqrt{2}$ и лемниската Бернулли инверсны равносторонней гиперболе, то они инверсны друг другу (см. свойство 1).

Можно показать, что центр искомой инверсии является фокусом лемнискаты и одновременно центром окружности, конхоидой которой является улитка.

Теорема 4. *Улитка Паскаля при $k = l\sqrt{2}$ является инверсно-симметричной линией.*

Доказательство. Так как улитка Паскаля при $k = l\sqrt{2}$ является инверсным образом симметричной линии (гиперболы) и центр инверсии не лежит на оси симметрии (мнимая ось), то, по свойству 2, она — инверсно-симметричная линия. Инверсный центр улитки Паскаля суть инверсный образ фокуса F_1 относительно окружности, переводящей гиперболу в улитку, а степень искомой инверсии $|MF_2|^2$. (См. рис. 3.)

Замечание. Известно, что любая улитка инверсна некоторой конике, причем если $k = l$ (кардиоида), то улитка инверсна параболе (в этом случае центр инверсии лежит на оси симметрии и свойство 2 не может быть применено), а при всех других соотношениях между k и l, улитка Паскаля инверсна гиперболе или эллипсу. Так как в этом случае центр инверсии не лежит на оси симметрии (малая ось эллипса и мнимая ось гиперболы), то справедливо более общее свойство: *Любая улитка Паскаля, кроме кардиоиды, суть инверсно-симметричная линия.*

2. Произвольный инверсный образ равносторонней гиперболы

Теорема 5. *Любой инверсный образ равносторонней гиперболы, за исключением лемнискаты Бернулли, инверсно-симметричен. Если центр инверсии, преобразующей равностороннюю гиперболу, не принадлежит осям гиперболы, то получающаяся кривая имеет* ***два инверсных центра.*** (*См. рис.* 4а.)

Доказательство. Доказательство элементарно следует из свойства 2, применяемого относительно действительной и мнимой осей гиперболы.

Замечание 1. Очевидно, что аналогичное свойство выполняется для произвольных гиперболы и эллипса. У параболы любой несимметричный образ имеет один центр инверсии, а симметричный не имеет его вообще. (См. рис. 4б.)

Замечание 2. Очевидно, что аналогичные свойства верны для любой симметричной линии. Например, любой образ трехлепестковой розы,

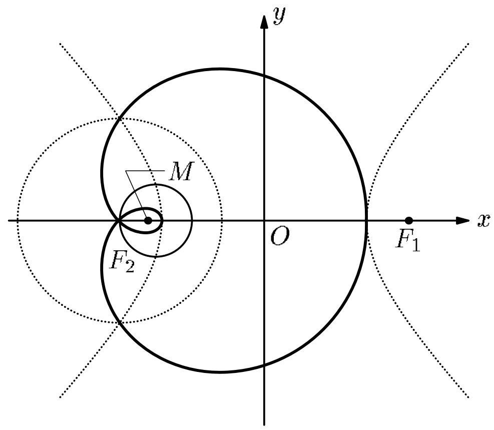
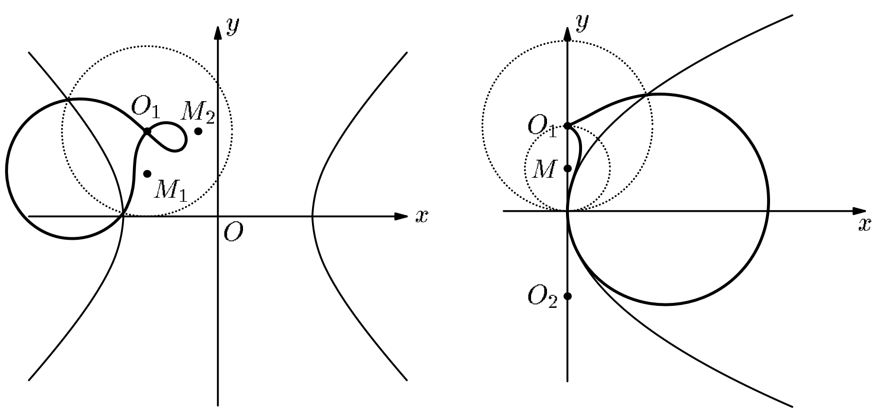


Рис. 3.



а) б)

Рис. 4. *Несимметричный образ* а) *гиперболы;* б) *параболы.*

кроме образа относительно ее центра, имеет минимум два и максимум три центра инверсии. Образ астроиды может иметь три или четыре таких центра. У образов синусоиды или циклоиды есть бесконечно много центров инверсии.

3. Равносторонняя гипербола и строфоиды

Уравнение строфоиды в декартовой системе координат:

$$(x^2+y^2)\cdot(Ax+By)+aA(x^2-y^2)+2aBxy=0,$$

где $Ax+By=0$ — уравнение ведущей прямой (рис. 5б), a — параметр. Очевидно, что в случае $B=0$ получим $x(x^2+y^2)+a(x^2-y^2)=0$, т.е. уравнение прямой строфоиды (рис. 5а). Если $B\neq 0$, то $k=-\dfrac{A}{B}$ — угловой коэффициент ведущей прямой ($y=kx$) и уравнение наклонной строфоиды приобретает вид:

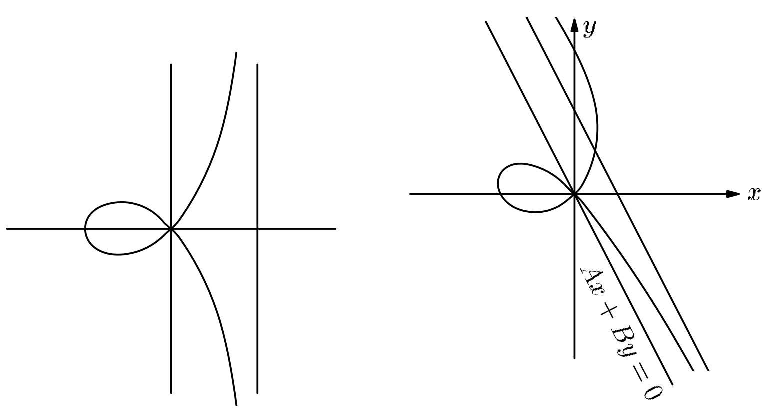
$$(x^2+y^2)(kx-y)+ka(x^2-y^2)-2axy=0.$$

Уравнение наклонной строфоиды всегда приводимо к виду:

$$(x^2+y^2)(mx-y)+b(x^2-y^2)=0,$$

в котором отсутствует член, содержащий xy.

Теорема 6. *Инверсный образ равносторонней гиперболы относительно любой окружности, центр которой лежит на этой гиперболе, суть строфоида. Если центр окружности инверсии — вершина гиперболы, то строфоида — прямая. Во всех остальных случаях строфоида — наклонная.*



а) б)

Рис. 5.

Доказательство. Пусть точка $(x_1; y_1)$ лежит на гиперболе $x^2 - y^2 = a^2$. Тогда $x_1^2 - y_1^2 = a^2$. Перенеся начало координат в точку $(x_1; y_1)$, получим:

$$(x + x_1)^2 - (y + y_1)^2 = a^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 2x_1x - y^2 - 2y_1y = 0.$$

Применим формулы инверсии:

$$\frac{r^4(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + 2x_1r^2\frac{x}{x^2 + y^2} - 2y_1r^2\frac{y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Если $y_1 = 0$, а $x_1 = \pm a$, то уравнение определяет прямую строфоиду: $x(x^2 + y^2) \pm \frac{r^2}{2a}(x^2 - y^2) = 0$. Если $y_1 \neq 0$, то после несложных преобразований получим:

$$(x^2 + y^2)\left(\frac{x_1}{y_1}x - y\right) + \frac{r^2}{2y_1}(x^2 - y^2) = 0.$$

Последнее уравнение определяет наклонную строфоиду, для которой $m = \frac{x_1}{y_1}$, $b = \frac{r^2}{2y_1}$. Очевидно, что ведушая прямая строфоиды совпадает с касательной гиперболы в центре инверсии.

Замечание. Доказанная теорема устанавливает ряд инверсных свойств прямой и наклонной строфоид. Прямая строфоида инверсно-симметрична относительно одной окружности, так как центр инверсии, переводящей в нее равностороннюю гиперболу, лежит на действительной оси гиперболы и не лежит на мнимой. Этот центр суть полюс строфоиды, что элементарно доказывается на основании ее геометрического определения. Наклонная строфоида инверсно-симметрична относительно двух окружностей. Все эти утверждения следуют из теоремы 5. Ясно, что и прямая, и наклонная строфоиды инверсны лемнискате Бернулли, улитке Паскаля, друг другу и всем другим образам равносторонней гиперболы.

В заключение приведем еше одну любопытную теорему, касающуюся прямой и наклонной строфоид.

Теорема 7. *На любой линии, инверсной равносторонней гиперболе, лежит одна и только одна точка, являющаяся центром инверсий, переводящих данную линию в равностороннюю гиперболу. Все остальные инверсии, центры которых лежат на линии, переводят последнюю в строфоиды (прямые или наклонные).*

Из этой теоремы следует, что центр инверсии любого образа равносторонней гиперболы, кроме строфоид, не принадлежит этому образу. Понятно, что аналогичные строфоидам классы линий существуют в инверсных семействах других линий.