Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи. Ждем ваших писем (как с вновь предлагаемыми задачами, так и с решениями опубликованных задач).

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. Дано 109-значное число, в десятичной записи которого нет нулей. Докажите, что в его десятичной записи либо некоторая группа соседних цифр повторится 10 раз подряд, либо найдутся записи 10 различных 100-значных чисел. *(А. Я. Белов)*

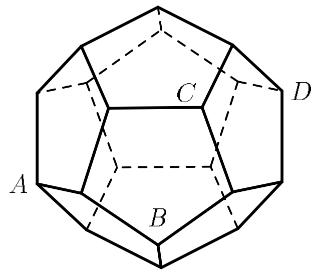
2. Между пунктами A и B расстояние 60 км. Поезд делает остановку в пункте A и через час — в пункте B. Докажите, что в некоторый момент времени его ускорение не меньше чем 240 *км/ч*^{2}. *(В. М. Тихомиров)*

3. Имеется граф G и его автоморфизм $f\colon G \to G$ порядка 2: если $x \in G$, то $f(f(x)) = x$ (напомним, что автоморфизм графа сохраняет смежность вершин). Примерами могут служить графы правильных центрально-симметричных многогранников или правильные решетки на евклидовой и гиперболической плоскостях; есть и много других примеров.

   В каждой вершине графа написано вещественное число. Любые два соседних числа (т. е. стоящих в концах одного ребра графа) отличаются меньше чем на 1. Докажите, что найдется пара вершин $(x, f(x))$, числа в которых также отличаются меньше чем на 1. *(Г. А. Гальперин)*

4. Несколько школьников играют в пинг-понг «на вылет». Они установили очередь, вначале играют первые двое, а затем победитель играет со следующим из очереди. На другой день ребята играют по той же системе, но порядок в очереди изменен на противоположный (т. е. очередь идет от последнего к первому). Докажите, что найдется пара игроков, которые встречались и в первый день, и во второй. (*Б. Р. Френкин*)

5. Найдите угол между диагоналями AB и CD правильного додекаэдра. (*С. Анисов*)



6. а) Двое флатландцев спускаются к морю с высочайшей вершины Флатландии «Пик Кипа» — один по левому склону, другой по правому. Гора нигде не опускается ниже уровня моря, а ее поверхность — график кусочно-линейной непрерывной функции. Флатландцы «непрерывно» двигаются, так что зависимость координат флатландца от времени — непрерывная функция, на скорость ограничений нет.

   Могут ли флатландцы достичь моря, все время находясь на одинаковой высоте над уровнем моря?

   б) Верно ли аналогичное утверждение для нескольких гор равной высоты, с каждой из которых спускается пара флатландцев (все они должны все время находиться на одинаковой высоте)?

   в) Пусть поверхность горы есть график дифференцируемой функции. Верно ли утверждение пункта а)? (*Н. Н. Константинов*)

7. К данной параболе проведены три касательные. Докажите, что окружность, описанная около образованного ими треугольника, проходит через фокус параболы. (*А. Заславский*)

8. Решите функциональное уравнение для непрерывных вещественных функций вещественного переменного:
$$F(x+y) = A(x) + B(x)C(y).$$
(*А. Я. Канель-Белов, Б. Р. Френкин*)

9. M — компакт в метрическом пространстве, $A\colon M \to M$ — отображение компакта в себя, не уменьшающее расстояние. Докажите, что A — изометрия (т. е. сохраняет расстояния).
(*Г. А. Гальперин*)

10. Известно, что ранг коммутатора $[AB] = AB - BA$ двух матриц равен единице. Докажите, что матрицы A и B имеют общий собственный вектор. (*фольклор*)

11. На некоторых клетках бесконечной доски стоят фишки (не более одной на каждой клетке), некоторые клетки пустые. Назовем расстановку *почти полной*, если найдется такое число C, что можно сдвинуть каждую фишку на расстояние, не превышающее C (иногда нулевое) так, чтобы пустых клеток не осталось. Назовем расстановку *не слишком пустой*, если найдется такое число D, что количество пустых клеток в любом квадрате не превосходит DP, где P — периметр квадрата. Докажите, что почти полные расстановки — это в точности не слишком пустые. (*А. Я. Белов*)

12. а) С многочленами от двух переменных можно делать следующие операции вывода. Пусть есть или уже выведены многочлены P_1, P_2. Тогда выводятся следующие многочлены:
$$\lambda P_1,\ \lambda \in \mathbb{R}; \qquad P_1 + P_2; \qquad P_1(R(x), R(y)),$$
где R — произвольный многочлен от одной переменной.

а) Верно ли, что любая система многочленов выводится из конечной подсистемы?

б) Тот же вопрос для многочленов с целыми коэффициентами, которые можно умножать только на целые числа. (*В. Шпехт*)