

Как складывать треугольники

Ф. Бахарев К. Кохась Ф. Петров

Мы доказываем конфигурационную теорему, похожую на теорему Дезарга, которая позволяет ввести структуру абелевой группы на множестве треугольников, перспективных относительно некоторой точки.

1. КОНФИГУРАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ

1.1. ТЕОРЕМА ДЕЗАРГА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если две плоские конфигурации, составленные из точек и прямых, могут быть приведены в соответствие так, что все прямые, проходящие через соответственные точки, пересекаются в одной точке O , то мы говорим, что эти две конфигурации *перспективны относительно точки O* . Точка O в этом случае называется *центром перспективы*. Если же соответствие таково, что точки пересечения соответственных прямых лежат на одной прямой ℓ , то мы говорим, что эти две конфигурации *перспективны относительно прямой ℓ* . Прямая ℓ в этом случае называется *осью перспективы*.

ТЕОРЕМА (ДЕЗАРГ). *Если два треугольника перспективны относительно некоторой точки, то они также перспективны и относительно некоторой прямой.*

Верна и обратная (или двойственная) теорема Дезарга: если два треугольника перспективны относительно некоторой прямой, то они перспективны относительно некоторой точки.

Доказательство теоремы Дезарга любопытный читатель может найти в книгах [1], [2], [4] или получить самостоятельно.

Итак, теорема Дезарга утверждает, что у перспективных треугольников точки пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой. А можно ли что-нибудь утверждать про точки пересечения *несоответственных* сторон? Оказывается, можно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (ОСНОВНАЯ КОНСТРУКЦИЯ). Пусть треугольники $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ перспективны относительно точки S . Пусть (i, j, k) — перестановка чисел 1, 2, 3. Обозначим через P_{ij} точку пересечения прямых A_iA_k и B_jB_k . Точку пересечения прямых A_iA_j и B_iB_j обозначим через S_k . Наконец, положим $C_k = P_{ik}P_{ki} \cap P_{jk}P_{kj}$ (см. рис. 1).

ТЕОРЕМА 1 (ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ДЕЗАРГА). *Треугольник $C_1C_2C_3$ перспективен треугольникам $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ относительно точки S .*

Мы дадим два доказательства этой теоремы.

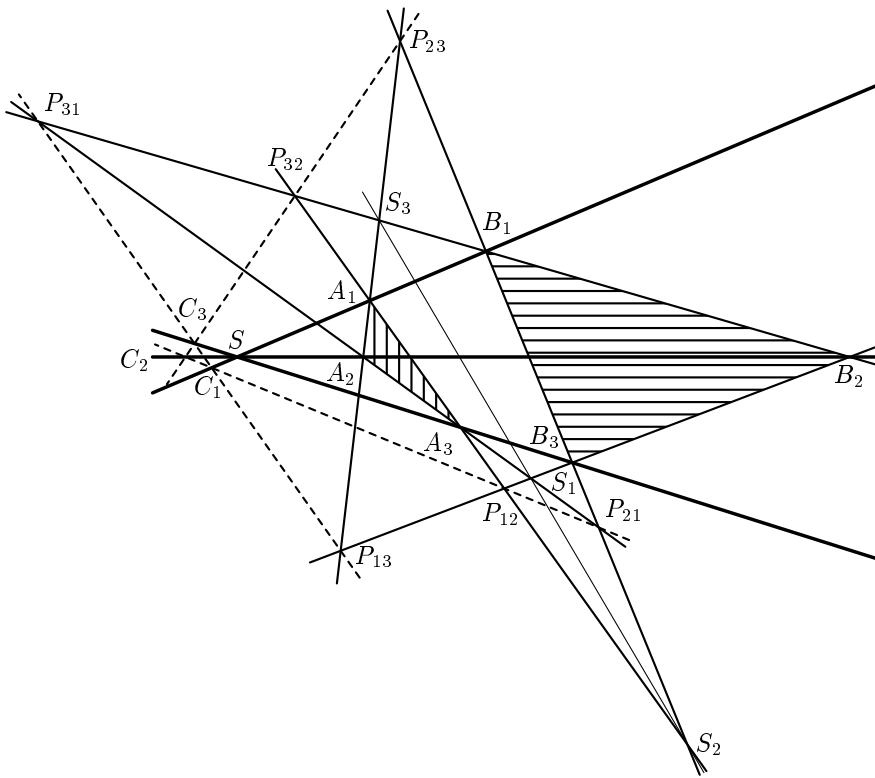


Рис. 1. Теорема Дезарга и ее обобщение

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 1. Проверим, что треугольники $\Delta_1 = S_1P_{21}P_{12}$ и $\Delta_2 = S_3P_{23}P_{32}$ перспективны относительно точки S_2 . Для этого проверим, что прямые $P_{21}P_{23}$, $P_{12}P_{32}$ и S_1S_3 проходят через точку S_2 . Заметим, что прямая $P_{21}P_{23}$ — это на самом деле прямая B_3B_1 , а прямая $P_{12}P_{32}$ — это прямая A_1A_3 , поэтому эти прямые пересекаются в точке S_2 . Осталось заметить, что точки S_1 , S_2 , S_3 лежат на одной прямой в силу теоремы Дезарга для исходных треугольников $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$.

Итак, треугольники Δ_1 и Δ_2 перспективны относительно точки, следовательно, по теореме Дезарга, точки пересечения соответствующих сторон

$$\begin{aligned} A_2 &= S_1P_{21} \cap S_3P_{23}, \\ B_2 &= S_1P_{12} \cap S_3P_{32}, \\ C_2 &= P_{21}P_{12} \cap P_{23}P_{32} \end{aligned}$$

лежат на одной прямой. Аналогично $C_1 \in A_1B_1$, $C_3 \in A_3B_3$, что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 2. Нам понадобится следующий факт об алгебраических кривых (см. [3, гл. 1, § 1, теорема 4 для $n = 4$]):

Пусть A_{ij} — (попарно различные) точки пересечения прямых p_i, q_j , $1 \leq i, j \leq 4$. Если все точки

$$\begin{aligned} &A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, \\ &A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24}, \\ &A_{31}, A_{32}, A_{33}, \\ &A_{41}, A_{42} \end{aligned}$$

лежат на некоторой кривой степени 4, то остальные точки — A_{34}, A_{43}, A_{44} — тоже лежат на этой кривой.

Рассмотрим треугольники $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$, перспективные относительно точки S , и построим точки P_{ij} . Нам удобно будет определить точки C_i не так, как это сделано в основной конструкции, поэтому положим $C'_1 = P_{12}P_{21} \cap A_1B_1$, $C'_2 = P_{12}P_{21} \cap P_{23}P_{32}$, $C'_3 = P_{23}P_{32} \cap A_3B_3$. Будем обозначать прямые избыточно, перечисляя лежащие на них точки получившейся конфигурации. Рассмотрим прямые

$$\begin{aligned} p_1 &= P_{23}A_1A_2P_{13}, & q_1 &= P_{31}A_2A_3P_{21}, & r_1 &= P_{31}P_{13}, \\ p_2 &= P_{31}P_{32}B_1B_2, & q_2 &= P_{13}P_{12}B_3B_2, & r_2 &= P_{32}A_1A_3P_{12}, \\ p_3 &= C'_3SA_3B_3, & q_3 &= C'_1SA_1B_1, & r_3 &= P_{23}B_1B_3P_{21}, \\ p_4 &= C'_2C'_1P_{12}P_{21}, & q_4 &= C'_2C'_3P_{32}P_{23}, & r_4 &= SA_2B_2. \end{aligned}$$

Мы видим, что точки пересечения прямых p_i и q_i — это 16 точек нашей конфигурации, и все они, за исключением, быть может, C'_1, C'_2, C'_3 , лежат на кривой степени 4, которая равна объединению четырех прямых r_1, r_2, r_3, r_4 . В обозначениях упомянутой теоремы, $C'_1 = A_{43}$, $C'_2 = A_{44}$, $C'_3 = A_{34}$, поэтому эти точки также должны принадлежать объединению прямых r_i . Нетрудно проверить, что ни на одной из прямых r_i не может оказаться 5 точек нашей конфигурации, поэтому точки C'_3, C'_1 должны лежать на прямой r_1 , а точка C'_2 — на прямой r_4 .

В книге [2, § 22] описана конфигурация Рейе с параметрами (12, 4, 16, 3). Вершины конфигурации Рейе — это вершины куба, его центр и три бесконечно удаленные точки, соответствующие направлениям ребер; прямые — это ребра куба и его четыре главные диагонали. Как нетрудно проверить, конфигурация, описанная в теореме 1, — двойственная к конфигурации Рейе.

Теорема Паскаля, которую доказывают похожим рассуждением, оказывается в результате теоремой об ассоциативности операции сложения точек эллиптической кривой. Кажется, за нашей теоремой не скрывается никакой операции для объектов, связанных с кривой четвертого порядка. Не видно даже конфигурационной теоремы для общей кривой четвертого порядка.

1.2. ТЕОРЕМЫ ПАППА И ПАСКАЛЯ

В этом параграфе мы докажем обобщения теорем Паскаля и Паппа, которые, впрочем, далее нам не понадобятся. Любителям полярных преобразований и двойственных утверждений не составит труда обобщить в том же духе и теорему Бриансона.

ТЕОРЕМА (ПАСКАЛЬ). *Точки пересечения противоположных сторон вписанного в коническое сечение шестиугольника лежат на одной прямой.*

ТЕОРЕМА (ПАПП). Пусть точки A_1, A_2, A_3 лежат на одной прямой, а точки B_1, B_2, B_3 — на другой. Тогда точки пересечения пар прямых A_1B_2 и A_2B_1 , A_1B_3 и A_3B_1 , A_2B_3 и A_3B_2 также расположены на одной прямой.

Доказательства этих теорем можно найти в [3], [1].

Обобщение теоремы Паскаля получается, если мы изучаем точки пересечения непровотивоположных сторон, а в формулировке теоремы Паппа — если мы рассматриваем точки пересечения «несимметричных» прямых. Введем обозначения. Пусть $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ — исходные точки (в теореме Паппа) или вершины шестиугольника (в теореме Паскаля; обратите внимание на порядок вершин — см. рис. 2). Для каждой перестановки (i, j, k) чисел 1, 2, 3 обозначим через Q_{ij} точку пересечения прямых A_iB_k и B_jA_k .

ТЕОРЕМА 2 (ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ПАСКАЛЯ). Пусть $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$ — вписанный шестиугольник. Тогда прямые $Q_{12}Q_{21}$, $Q_{13}Q_{31}$ и $Q_{23}Q_{32}$ пересекаются в одной точке.

ТЕОРЕМА 3 (ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ПАППА). В условиях теоремы Паппа прямые $Q_{12}Q_{21}$, $Q_{13}Q_{31}$ и $Q_{23}Q_{32}$ пересекаются в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим треугольники $Q_{12}Q_{23}Q_{31}$ и $Q_{21}Q_{32}Q_{13}$. Точки пересечения противоположных сторон этих треугольников — это точки, фигурирующие в теореме Паскаля (для шестиугольника $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$). Стало быть, треугольники перспективны относительно прямой, а потому и относительно точки, что и требовалось.

Отметим еще один известный способ обобщить теорему Паскаля.

ТЕОРЕМА (ЕЩЕ ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПАСКАЛЯ). Обозначим $S_{ik} = A_iA_j \cap B_jB_k$. Тогда три прямые $l_i = S_{jk}S_{kj}$ пересекаются в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $S = A_3B_3 \cap A_2B_2$. По теореме Паскаля (для перенумерованных точек) точки S, S_{32}, S_{23} лежат на одной прямой l . По теореме Паппа, примененной к тройкам точек B_3, S_{13}, B_2 и A_2, S_{21}, B_3 , получаем, что на прямой l лежит точка $U = B_2S_{21} \cap A_3S_{13}$. Еще раз применим теорему Паппа, на этот раз к

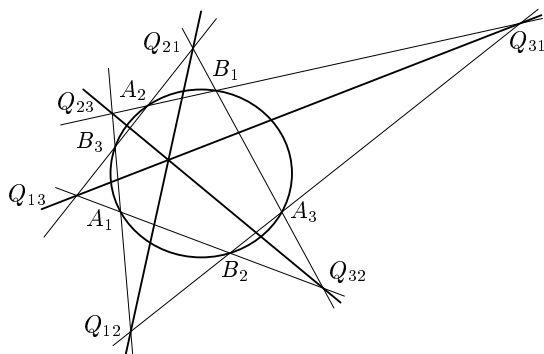


Рис. 2. Одно из обобщений теоремы Паскаля

тройкам точек B_2, S_{12}, S_{13} и A_3, S_{31}, S_{21} . Получим, что на прямой l лежит точка $Z = S_{12}S_{21} \cap S_{13}S_{31}$. Что и требовалось.

1.3. ДВОЙСТВЕННАЯ КОНФИГУРАЦИЯ

Будем считать, что основная конструкция задана на проективной плоскости. Заметим, что все ее элементы сохраняются при проективных преобразованиях. При этом выбор точки S и прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 с проективной точки зрения не нарушает никакой общности: при помощи подходящего проективного преобразования можно отобразить эту тройку конкурентных прямых в любую другую тройку конкурентных прямых. В частности, структура «аддитивной группы треугольников», описанной в разделе 2, не зависит от этого выбора.

Фиксируем полярное преобразование на проективной плоскости. Применяя его ко всем элементам основной конфигурации, мы получаем теорему, двойственную к теореме 1:

ТЕОРЕМА 4. Пусть треугольники $A = A_1A_2A_3$ и $B = B_1B_2B_3$ перспективны относительно прямой s . Для $i = 1, 2, 3$ обозначим L_i — точки пересечения соответственных сторон: $L_i = A_kA_j \cap B_kB_j$. Положим $C_k = A_iB_j \cap A_jB_i$. Тогда $C = C_1C_2C_3$ — треугольник, перспективный треугольникам $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ относительно прямой s (см. рис. 3).

Доказательство теоремы 1 является одновременно и доказательством теоремы 4 (так как полярное преобразование инволютивно).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Конструкцию теоремы 1 (рис. 1) будем называть *центральной моделью* основной конструкции, а конструкцию теоремы 4 (рис. 3) — *осевой моделью*.

В центральной модели мы считаем фиксированными точку S и три прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 , проходящие через эту точку, в осевой модели зафиксируем прямую s

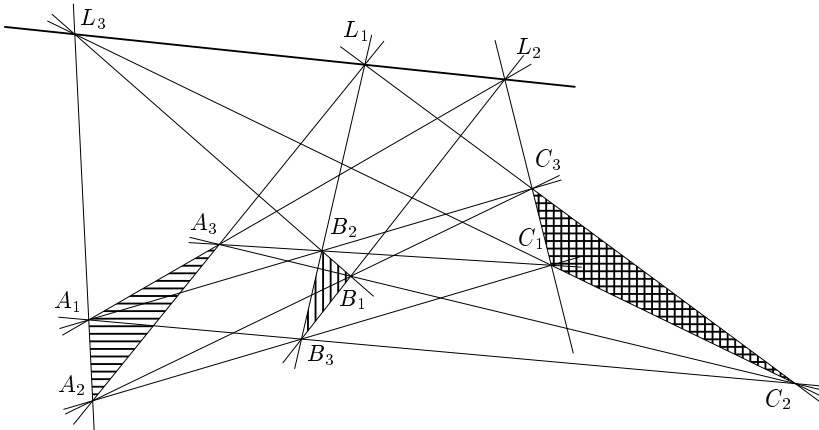


Рис. 3. Конструкция, двойственная к основной

и три точки L_1, L_2, L_3 , лежащие на ней. Треугольник $A_1A_2A_3$ (где $A_i \in \ell_i$ в центральной модели или A_iA_j содержит точку L_k в осевой модели) будем для краткости обозначать A .

2. АДДИТИВНАЯ ГРУППА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Напомним читателю, как определяют сложение точек эллиптической кривой. Сначала вводят некоторую «геометрическую» конструкцию, которая по двум точкам A и B позволяет построить еще одну точку кривой, а именно: C — это третья точка пересечения прямой AB с данной эллиптической кривой, обозначим $C = A \cdot B$. После этого сама операция сложения задается так: мы фиксируем произвольную точку E на кривой и полагаем $A + B = E \cdot (A \cdot B)$. Точка E при этом будет играть роль нейтрального элемента («нуля»).

Этот способ, однако, требует обсуждения некоторых технических деталей, и по ходу дела оказывается, что кривую естественно рассматривать не на плоскости, а на комплексной проективной плоскости, определение точки C требует специальных оговорок, если $A = B$ или в случае, когда прямая AB касается кривой, наконец, очень часто в качестве точки E берут бесконечно удаленную точку, что приводит к несколько более «загадочному» определению суммы — построив точку $A \cdot B$, ее симметрично отражают относительно оси x . Вершиной теории является построение эллиптических функций, которые являются гомоморфизмами между аддитивной группой точек эллиптической кривой и комплексным тором.

В этом разделе мы определяем операцию сложения на множестве перспективных треугольников. При помощи описанной в предыдущем параграфе конфигурационной теоремы мы можем по двум треугольникам построить третий. Здесь, правда, нужны некоторые технические комментарии, скажем, для случая совпадающих треугольников. Далее, чтобы определить сложение, нам нужно всего лишь повторить эту операцию с каким-нибудь фиксированным заранее треугольником. Однако введение такой операции требует некоторого пополнения множества треугольников, при этом в качестве фиксированного элемента удобно выбрать как раз «бесконечно удаленный треугольник». Роль эллиптической функции будут исполнять при этом барицентрические координаты.

2.1. СУММА ПЕРСПЕКТИВНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть даны два перспективных (относительно точки S или прямой s) треугольника A и B . В силу обобщенной теоремы Дезарга эти треугольники определяют третий треугольник — C , который мы будем называть *предсуммой* треугольников A и B и записывать $C = A \boxplus B$.

Отметим очевидные свойства этой операции.

ЛЕММА 1. Операция «предсумма» обладает следующими свойствами:

- 1) $A \boxplus B = B \boxplus A$.
- 2) Если $A \boxplus B = C$, то $A \boxplus C = B$ и $B \boxplus C = A$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Множество треугольников не замкнуто относительно операции «предсумма». Например, разглядывая рис. 1, читатель легко поймет, что при

неудачном выборе треугольников A и B все три вершины треугольника C могут совпасть с точкой S . Кроме того, не для любых двух перспективных треугольников наши построения корректны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. (Общее определение суммы треугольников) Определим *сумму* треугольников A и B формулой $A + B = F \boxplus (A \boxplus B)$, в том случае, когда эта формула имеет смысл, где F — некоторый фиксированный треугольник.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Множество с операцией, обладающей свойствами из леммы 1, называется квазигруппой. Из аксиом квазигруппы никоим образом не следует, что операция $A + B = F \boxplus (A \boxplus B)$ ассоциативна. Так, теорема Паппа позволяет по двум тройкам коллинеарных точек A и B построить третью тройку $C = A \boxplus B$. Нетрудно видеть, что такая операция удовлетворяет лемме 1. Но возникающая по аналогии с определением 5 «сумма» не ассоциативна.

Далее мы будем работать в осевой модели. Будем считать, что ось перспективы s бесконечно удалена (для этого достаточно сделать подходящее проективное преобразование). Кроме того, в технических целях нам удобно будет в качестве F взять, в некотором смысле (в каком — будет ясно позднее), «бесконечно удаленный треугольник». Поэтому в оставшейся части этой статьи мы будем пользоваться следующим определением суммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть даны два перспективных относительно бесконечно удаленной прямой s треугольника A и B . Пусть $C = A \boxplus B$, обозначим C_0 — центр тяжести треугольника C . Треугольник D , центрально симметричный треугольнику C относительно точки C_0 , будем называть *суммой* треугольников A и B и обозначать $D = A + B$.

Ниже мы докажем, что эта операция коммутативна и ассоциативна (что оправдывает ее название), а симметрия относительно центра тяжести — это на самом деле вычисление предсуммы данного треугольника и «бесконечно удаленного треугольника» (см. пример 4), который и будет играть роль нейтрального элемента (нуля) для операции сложения. Операция, заданная общим определением 5, также ассоциативна и коммутативна, и порождает ту же самую группу, но мы не будем этого здесь доказывать, поскольку доказательства совершенно аналогичны.

2.2. БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ И ПРОСТРАНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Итак, сделав подходящее проективное преобразование, мы можем считать, что прямая s в осевой модели — бесконечно удаленная. В этом случае соответственные стороны треугольников A , B , $C = A \boxplus B$ параллельны (см. рис. 4). Ниже под *треугольниками* понимаются только треугольники с теми же направлениями сторон.

Зафиксируем какой-нибудь треугольник $E = E_1E_2E_3$. Ниже под координатами точки аффинной плоскости мы всегда будем понимать барицентрические координаты этой точки относительно *треугольника E* (см. [5]). С помощью этих координат введем координаты на множестве *треугольников*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. (Барицентрические координаты на множестве треугольников.) Каждый *треугольник D* однозначно задается координатами (d_1, d_2, d_3)

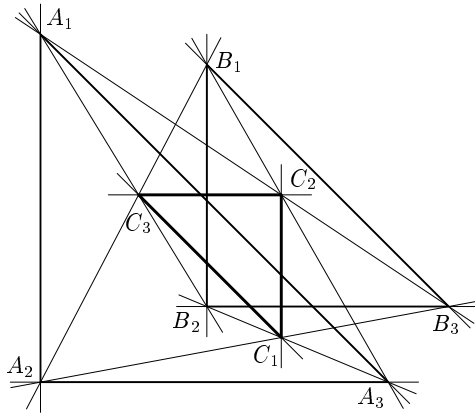


Рис. 4. Двойственная конструкция с бесконечно удаленной осью

$(d_1 + d_2 + d_3 = 1)$ его центра тяжести и коэффициентом d единственной гомотетии, переводящей D в E (параллельный перенос по определению считаем гомотетией с коэффициентом 1). Значит, этот треугольник однозначно определяется тройкой параметров $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, таких что

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = d_1 : d_2 : d_3, \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = d.$$

Параметры $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ мы будем называть *барицентрическими координатами* треугольника D .

Переход от координат $(d_1, d_2, d_3; d)$ к барицентрическим координатам $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ и обратно осуществляется по формулам:

$$\delta_i = d \cdot d_i, \quad d = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3; \quad d_i = \frac{\delta_i}{d} = \frac{\delta_i}{\sum \delta_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

ПРИМЕР 1. Выразим координаты вершин треугольника $D = D_1D_2D_3$ с центром D_0 через его барицентрические координаты $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Для этого заметим, что вектор $\overrightarrow{D_0D_3}$ гомотетичен вектору $\overrightarrow{E_0E_3}$ с коэффициентом $\frac{1}{d}$:

$$\begin{aligned} D_3 &= D_0 + \frac{1}{d} (E_3 - E_0) = \frac{1}{d} (\delta_1, \delta_2, \delta_3) + \frac{1}{d} \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) = \\ &= \left(\frac{\delta_1 - 1/3}{d}, \frac{\delta_2 - 1/3}{d}, \frac{\delta_3 + 2/3}{d} \right). \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются координаты остальных вершин.

Отметим, что если сумма координат равна нулю, никакого (геометрического) треугольника не получается.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Добавим ко множеству геометрических треугольников формальные элементы, задаваемые в барицентрических координатах параметрами $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, где $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$. Полученное пространство, формально изоморфное \mathbb{R}^3 , будем называть *пространством треугольников*.

Поскольку *треугольники* с малым значением суммы координат имеют «большой размер», естественно ожидать, что эти формальные элементы можно интерпретировать как в каком-то смысле «бесконечно удаленные» *треугольники* (см. раздел 3.1).

2.3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

ТЕОРЕМА 5. *Описанная в определении 6 операция «+» в барицентрических координатах совпадает с операцией сложения в аддитивной группе \mathbb{R}^3 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A и B — два *треугольника* с координатами $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\sum \alpha_i = a \neq 0$, и $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\sum \beta_i = b \neq 0$ соответственно, и пусть их предсумма $C = A \boxplus B$ — тоже *треугольник*, т. е. $\sum \gamma_i = c \neq 0$. Вычислим координаты *треугольника* C . *Треугольники* $A_1C_3A_2$ и $B_2C_3B_1$ (см. рис. 4) подобны с коэффициентом $A_2A_1/B_2B_1 = \frac{1/a}{1/b}$. Значит, $a \cdot A_1C_3 = b \cdot C_3B_2$, и по правилу рычага точка C_3 — центр масс материальных точек (a, A_1) и (b, B_2) . Отсюда

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{1}{a+b} (a \cdot A_1 + b \cdot B_2) = \\ &= \frac{1}{a+b} ((\alpha_1 + 2/3, \alpha_2 - 1/3, \alpha_3 - 1/3) + (\beta_1 - 1/3, \beta_2 + 2/3, \beta_3 - 1/3)) = \\ &= \left(\frac{-(\alpha_1 + \beta_1) - 1/3}{-(a+b)}, \frac{-(\alpha_2 + \beta_2) - 1/3}{-(a+b)}, \frac{-(\alpha_3 + \beta_3) + 2/3}{-(a+b)} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Аналогично вычисляются координаты точек C_2 и C_1 . Заметим, что

$$C_2 - C_1 = \frac{1}{-(a+b)} (-1, 1, 0) = \frac{1}{-(a+b)} (E_2 - E_1).$$

Следовательно, сумма координат *треугольника* C (то есть коэффициент гомотетии $C \rightarrow E$) равна $-(a+b)$. Теперь для того чтобы найти координаты *треугольника* C , мы должны умножить на эту величину координаты его центра тяжести C_0 . Координаты центра точки C_0 равны

$$\frac{C_1 + C_2 + C_3}{3} = \left(\frac{-(\alpha_1 + \beta_1)}{-(a+b)}, \frac{-(\alpha_2 + \beta_2)}{-(a+b)}, \frac{-(\alpha_3 + \beta_3)}{-(a+b)} \right).$$

Значит, искомые координаты *треугольника* C равны

$$(-(\alpha_1 + \beta_1), -(\alpha_2 + \beta_2), -(\alpha_3 + \beta_3)). \quad (2)$$

Очевидно, что симметрия относительно центра тяжести меняет координаты *треугольника* на противоположные. Таким образом, координаты суммы $A + B$ равны

$$(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3). \quad (3)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Описанная в определении 6 операция «+» продолжается до коммутативной, ассоциативной операции в пространстве *треугольников*. Построенная таким способом «аддитивная группа *треугольников*» изоморфна аддитивной группе \mathbb{R}^3 .*

3. ТЕХНИЧЕСКИЕ ПОДРОБНОСТИ

3.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФОРМАЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Для почти всех формальных треугольников мы можем дать геометрическую интерпретацию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. (Барицентрические координаты на бесконечно удаленной прямой.) Для точки X с барицентрическими координатами (x_1, x_2, x_3) , $\sum x_i = 1$, имеем $\overrightarrow{OX} = \sum x_i \overrightarrow{OE_i}$ для любой точки O . Аналогично, для тройки чисел (y_1, y_2, y_3) с суммой 0 рассмотрим вектор $\sum y_i \overrightarrow{OE_i}$. Ясно, что этот вектор не зависит от точки O , и потому тройка (y_1, y_2, y_3) определяет направление (и даже вектор; направление будет, если факторизовать по однородности). Будем называть однородную тройку (y_1, y_2, y_3) *барицентрическими координатами* этого направления (= точки бесконечно удаленной прямой).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. *Псевдо-треугольник* с координатами (p_1, p_2, p_3) , $\sum p_i = 0$ — это упорядоченная тройка направлений с координатами

$$(p_1 + \frac{2}{3}, p_2 - \frac{1}{3}, p_3 - \frac{1}{3}), \quad (p_1 - \frac{1}{3}, p_2 + \frac{2}{3}, p_3 - \frac{1}{3}), \quad (p_1 - \frac{1}{3}, p_2 - \frac{1}{3}, p_3 + \frac{2}{3}).$$

Соответствующие этим направлениям точки бесконечно удаленной прямой (или сами направления) мы будем называть *вершинами* псевдо-треугольника. Формальный элемент пространства треугольников с координатами (p_1, p_2, p_3) , $\sum p_i = 0$, отождествим с псевдо-треугольником (p_1, p_2, p_3) .

ПРИМЕР 2. Пусть A и C — два треугольника, центрально симметричные относительно точки, отличной от середин сторон этих треугольников. Найдем их предсумму. Выполняя построения основной конструкции, мы видим, что для всех пар i, j прямые $A_i C_j$ и $A_j C_i$ параллельны (см. рис. 5) и, таким образом, «треугольник» $A \boxplus C$ — это тройка бесконечно удаленных точек, т. е. в точности псевдо-треугольник.

ПРИМЕР 3. Выясним, что представляет собой псевдо-треугольник с координатами $(0, 0, 0)$. Его вершины — это направления $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Выбирая в качестве точки O из определения 9 центр тяжести треугольника E , мы видим, что эти направления суть в точности направления медиан треугольника E (или любого другого треугольника).

На проективной плоскости основная конструкция без специальных оговорок позволяет находить предсумму треугольника и псевдо-треугольника.

ПРИМЕР 4. Найдем предсумму треугольника A и псевдо-треугольника B с координатами $(0, 0, 0)$. Вершины псевдо-треугольника $B(0, 0, 0)$ — это направления медиан треугольника A (см. пример 3). Выполняя построения основной конструкции, находим, что искомая предсумма — это просто отражение треугольника A относительно его центра тяжести (см. рис. 5).

Нетрудно видеть, что, хотя барицентрические координаты направления определены с точностью до умножения на константу, псевдо-треугольники с разными координатами определяют разные тройки направлений.

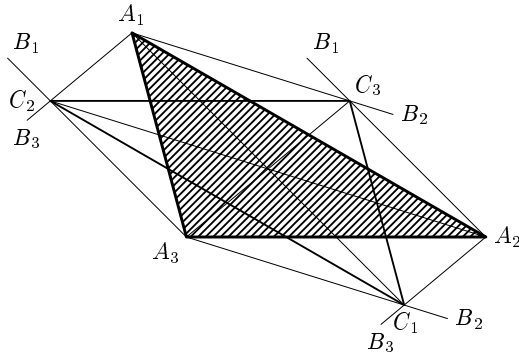


Рис. 5. Сложение треугольника с нулевым

Определение псевдо-треугольника не имеет смысла лишь для трех наборов параметров: $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ и $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, поскольку точки бесконечно удаленной прямой в силу определения 9 не могут иметь три нулевые координаты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Три формальных элемента пространства треугольников с координатами $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ и $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ будем называть *совсем-псевдо-треугольниками*.

Таким образом, формальные элементы из определения 8 исчерпываются псевдо-треугольниками и совсем-псевдо-треугольниками.

3.2. Поправки к основной конструкции

Мы по-прежнему работаем в осевой модели. Нетрудно видеть, что неопределенности в основной конструкции для *треугольников* A и B возникают в трех случаях:

1) если две стороны *треугольников* A и B оказались на одной прямой (например, если точки A_1, A_2, B_1, B_2 лежат на одной прямой, то прямые A_1B_2 и A_2B_1 совпадают и вершина C_3 не определена);

2) если $A = B$ (более глубокий случай предыдущего вырождения; непосредственно не построить ни одной вершины *треугольника* C);

3) если *треугольники* A и B центрально симметричны друг другу относительно середины их (общей) стороны (тогда если, скажем, $A_1A_2 = B_2B_1$, то прямые A_1B_2 и A_2B_1 не определены).

В первом и втором случае результат вычисления предсуммы — *треугольник*, в третьем — *совсем-псевдо-треугольник*. Покажем, каким образом нужно изменить основную конструкцию, чтобы найти в этих случаях предсумму геометрически.

3.2.1. Совпадение двух сторон

Пусть прямые, содержащие по стороне наших *треугольников*, совпадают, скажем, $A_1 = B_1$ (но $A_2 \neq B_2$ и *треугольники* A и B — не центрально симметричны, см. рис. 6). Тогда C_1 определим по конструкции, а про C_2 и C_3 мы

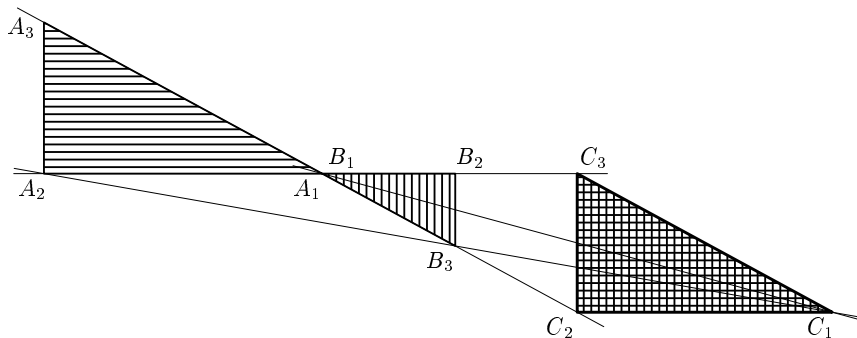


Рис. 6. Простейший вырожденный случай предложения

знаем лишь, что $C_2 \in A_1B_3 = B_1A_3$, а $C_3 \in A_1B_2 = A_2B_1$. Это позволяет найти C_2 и C_3 простыми построениями (скажем, $C_2 = A_1B_3 \cap C_1S_3$, где S_3 — бесконечно удаленная точка прямой A_1A_2). Случаи, когда, скажем, $A_2 = B_1$ или просто точки A_1, B_1, A_2, B_2 лежат вчетвером на одной прямой, разбираются аналогично. То, что в этом случае координаты предсуммы по-прежнему определяются формулой (2) — понятно (например, сделаем предельный переход).

3.2.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ $A \boxplus A$

Будем исходить из того, что должно выполняться свойство $A \boxplus (A \boxplus A) = A$. В центральной модели это значит, что стороны треугольника $A \boxplus A$ должны проходить через вершины треугольника A . Построим такой треугольник. Обозначим $X_i = A_jA_k \cap SA_i$ (см. рис. 7). Пусть Y_j — гармоническое дополнение точки S к паре $\{A_j, X_j\}$. Тогда три четверки вида $\Gamma_j = \{S, Y_j\}\{A_j, X_j\}$ — гармонические. При проецировании из точки A_i четверки Γ_j на прямую SA_k получается (снова гармоническая) четверка $\{S, Y'_k\}\{X_k, A_k\}$, где $Y'_k = A_iY_j \cap SA_k$. Но точка Y'_k в этом случае должна совпадать с точкой Y'_k , так как обе они являются гармоническими дополнениями точки S к паре $\{A_k, X_k\}$. Из этого

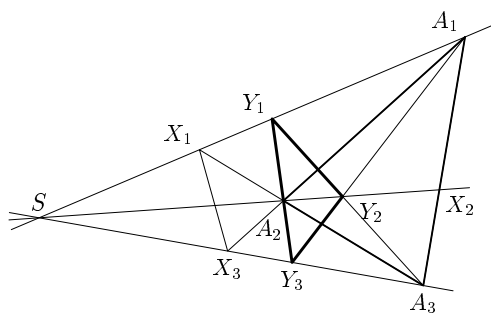


Рис. 7. Сложение треугольника с собой

следует, что точки A_i, Y_j, Y_k — коллинеарны и потому треугольник $Y_1Y_2Y_3$ — искомым.

Кстати, $X_1X_2X_3 = A/2$, то есть $X_1X_2X_3 \boxplus X_1X_2X_3 = A$.

В осевой модели условие «стороны $A \boxplus A$ проходят через вершины A » превратится в условие «вершины $A \boxplus A$ лежат на сторонах A ». Поэтому $A \boxplus A$ — это в точности серединный треугольник. Легко видеть, что это синтетическое определение согласовано с определением 7 и формулой (2).

3.2.3. СУММА ТРЕУГОЛЬНИКОВ, СИММЕТРИЧНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СЕРЕДИНЫ СТОРОНЫ

В этом случае мы можем предложить лишь формальное правило.

Пусть $A_1 = B_2, A_2 = B_1$. Конструкция позволяет построить две (бесконечно-удаленные) вершины, третья вершина $(A_1B_2 \cap A_2B_1)$ — не определена. В рассматриваемом случае $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$. Аналогично примеру 1 убеждаемся, что координаты треугольников удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_1 = -\beta_1 - \frac{1}{3}, \quad \alpha_2 = -\beta_2 - \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = -\beta_3 + \frac{2}{3}.$$

Будем считать, что в этом случае результат предложения — совсем-псевдо-треугольник с координатами $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Обратно: результат предложения совсем-псевдо-треугольника $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ с треугольником A — треугольник, симметричный A относительно стороны A_1A_2 .

Эти определения согласованы со свойствами из леммы 1 и отлично вписываются в формулу (2).

3.3. ПРЕДСУММА ДВУХ ПСЕВДО-ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Нетрудно проверить, что при построении на проективной плоскости предсуммы двух центрально симметричных треугольников с координатами $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ (см. пример 2) получается псевдо-треугольник с координатами $p_i = -(\alpha_i + \beta_i)$, то есть по-прежнему выполнена формула (2). Так же вычисляются координаты предсуммы треугольника и псевдо-треугольника.

Для геометрического сложения псевдо-треугольников рассмотрим следующую параметризацию множества псевдо- (в том числе, совсем-псевдо-) треугольников. Будем рассматривать псевдо- и совсем-псевдо-треугольники как предсуммы фиксированного треугольника (например, треугольника E) с ему симметричными. Эти симметричные треугольники и будем рассматривать как параметры псевдо-треугольников.

Ясно (например, с оглядкой на барицентрические координаты), что для каждого псевдо-треугольника найдется единственный параметризующий его треугольник. Предложение двух псевдо-треугольников описывается следующей леммой:

ЛЕММА 2. Если треугольники B и C симметричны треугольнику E , а псевдо-треугольники X и Y определены как предсуммы $E \boxplus B$ и $E \boxplus C$, то $X \boxplus Y = E \boxplus D$, где D_i — середина отрезка B_iC_i .

Доказательство леммы оставляем читателю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л.* Новые встречи с геометрией. М., 1978.
- [2] *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М., 1981.
- [3] *Прасолов В. В., Соловьев Ю. П.* Эллиптические функции и алгебраические уравнения. М., 1997.
- [4] *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия. М.-Л., 1949.
- [5] *Балж М. Б., Болтянский В. Г.* Геометрия масс. (Библиотечка «Квант», вып. 61) М., 1987.