Обыкновенные дифференциальные уравнения в проблемах Гильберта

Академик РАН А. А. Болибрух

Среди знаменитых проблем Гильберта, сформулированных им на международном математическом конгрессе в Париже в 1900 году, две проблемы, 16-я (точнее, вторая её часть) и 21-я, относятся к аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. История их исследования стала одной из интересных страниц в развитии математики XX столетия. Обе некоторое время считались решенными, и в решении обеих были найдены ошибки. Лишь в 80 – 90-х годах было получено решение 21-й проблемы и частичное продвижение в 16-й, которая до сих пор всё ещё далека от своего окончательного решения. В этой заметке рассказывается об истории исследования указанных проблем и об их связи с некоторыми другими интересными задачами современной математики.

Вторая часть 16-й проблемы Гильберта формулируется следующим образом (см. [Hi]):

> *Исследовать вопрос о максимальном числе и о расположении предельных циклов Пуанкаре для дифференциального уравнения первого порядка и первой степени вида*
>
> $$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}, \qquad (1)$$
>
> *где X, Y — целые рациональные функции n-й степени относительно x, y.*

Что такое предельный цикл? Почему эта задача была включена Гильбертом в число его 23-х проблем? В чем её значение и важность? Ниже мы постараемся ответить на эти вопросы.

Целая рациональная функция n-й степени относительно x, y — это многочлен

$$P(x, y) = \sum_{i\geqslant 0,\ j\geqslant 0,\ i+j\leqslant n} a_{ij}x^i y^j$$

от двух переменных, у которого хотя бы один из коэффициентов a_{ij} при $i + j = n$ отличен от нуля. При n, равном нулю, такая функция является постоянной, поэтому уравнение (1) в этом случае принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Общее решение последнего уравнения легко находится, это $y = kx+c$, где c — произвольная постоянная. Напомним, что решения дифференциального уравнения, изображенные на плоскости (x, y), называются интегральными кривыми. В рассматриваемом случае интегральные кривые являются прямыми, которые заполняют всю плоскость и нигде не пересекаются (см. рис. 1).

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 5, 2001(20–31)

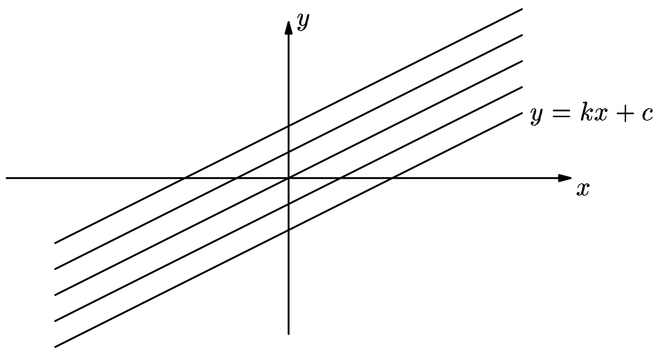

Рис. 1.

В таких случаях говорят, что на плоскости задано *слоение*, плоскость *расслоена* на эти прямые. Видно, что каждая интегральная кривая бесконечна в обе стороны. Никаких предельных циклов здесь нет, и при $n = 0$ задачи, как таковой, просто не существует.

В случае $n = 1$ рассмотрим простейший пример, когда уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Такое уравнение нетрудно проинтегрировать, домножив обе его части на ydx и выделив полный дифференциал:

$$ydy = -xdx, \quad d(y^2 + x^2) = 0.$$

Общее решение имеет вид $y^2 + x^2 = c$, и соответствующие интегральные кривые являются концентрическими окружностями с центром в точке 0 (см. рис. 2).

Каждая такая замкнутая интегральная кривая называется *циклом.* В этом случае вся плоскость расслоена на интегральные кривые, которые являются циклами. Но предельных циклов здесь еще нет.

Пропустим случай $n = 2$ и перейдем сразу к случаю $n = 3$.

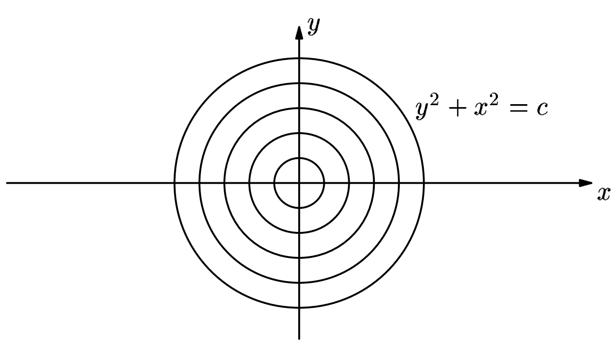

Рис. 2.

Следующее уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + \mu(1 - x^2)y}{y}, \tag{2}$$

у которого в числителе правой части стоит многочлен степени три (указанную степень имеет моном $-\mu x^2 y$), часто встречается в приложениях. Оно получается из уравнения Ван дер Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0, \tag{3}$$

где t — время, заменой

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + \mu(1 - x^2)y,$$

и последующим делением второго равенства на первое. Поэтому интегральные кривые уравнения (2) можно интерпретировать как траектории движения материальной точки с координатами $(x(t), y(t))$ в фазовом пространстве $(x, y = \dot{x})$, где $x(t)$ — решение уравнения (3), а «точка» означает производную по времени.

Для уравнения (3) предъявить явное решение не удается, но путем качественного его исследования можно показать, что среди решений этого уравнения имеется ровно одна замкнутая траектория — цикл. Это почти окружность радиуса 2; «почти», потому что она чуть-чуть продеформирована. Деформация зависит от значения параметра μ, входящего в уравнение. Все же остальные решения могут быть описаны следующим образом (см. рис. 3): выберем некоторую точку z на нормали к этому циклу и рассмотрим интегральную кривую, проходящую через эту точку (на рисунке это кривая, изображенная черным). Эта интегральная кривая уже является незамкнутой: она прокручивается вокруг

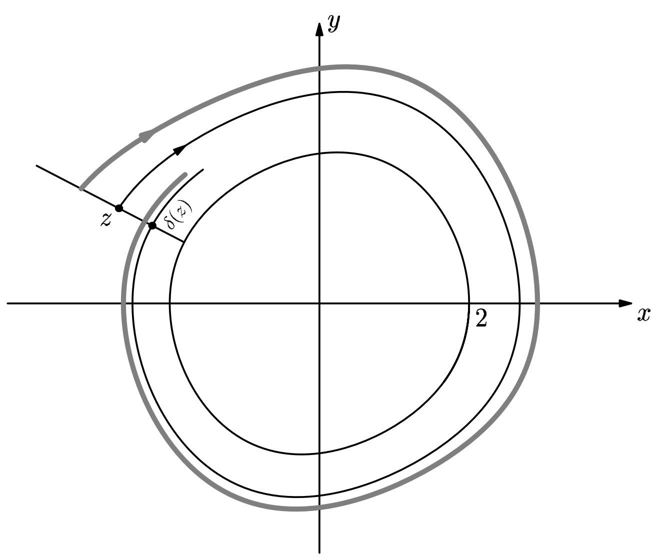

Рис. 3.

цикла и снова пересекает нашу нормаль в некоторой точке $\delta(z)$[1], расположенной ближе к циклу, чем точка z, и так далее. То есть, интегральная кривая с течением времени наматывается на цикл так же, как бесконечно длинная нить наматывается на катушку. И любая другая интегральная кривая в окрестности этого цикла, скажем, изображенная серым, ведет себя точно таким же образом: не пересекаясь ни с циклом, ни с предыдущей интегральной кривой, она тоже, как нить, но уже другого цвета, наматывается на наш цикл.

Другими словами, все интегральные кривые, рассмотренные в окрестности указанного цикла, с течением времени стремятся к этому циклу, неограниченно к нему приближаясь. Вот почему такой цикл называется *предельным.*

Почему же задача о предельных циклах представляет такой интерес? Почему она была выделена Гильбертом в отдельную проблему?

Кроме чисто внутриматематической мотивации (задачу о предельных циклах Гильберт связывает с задачей о числе овалов алгебраической кривой, которая составляет первую часть 16-й проблемы), чрезвычайно важным является то, что эта задача оказывается напрямую связанной с непосредственными приложениями математики. Рассмотрим эту связь на примере того же уравнения Ван дер Поля, которое часто возникает в различных задачах физики и техники, так, например, указанное уравнение описывает работу простейшего лампового генератора.

На практике требуется, чтобы этот прибор генерировал некоторый циклический режим, зависящий от времени t. Этот циклический режим изображается на плоскости (x, y) замкнутой траекторией, т. е., циклом. К сожалению, практически невозможно задать начальные условия работы прибора (то есть, выбрать начальную точку на интегральной кривой уравнения) так, чтобы попасть в точности на этот цикл. Возникает естественный вопрос: если мы чуть-чуть изменим начальные условия, т. е. рассмотрим точку, лежащую на близкой кривой, скажем, на черной траектории (см. рис. 3), то как будет работать прибор, что он будет генерировать?

Соответствующий режим работы в этом случае не будет периодическим, тем не менее с течением времени он будет неограниченно приближаться к периодическому, т. е. циклическому режиму. Такой режим работы, такой предельный цикл называется *устойчивым.* Ясно, что решение вопроса о существовании подобных циклов очень важно для практических приложений, для физики и техники.

В разобранном уравнении имеется единственный предельный цикл. Но число таких циклов может быть и бóльшим, стало быть, бóльшим может быть и число возможных устойчивых (и неустойчивых) периодических режимов. Поэтому вопрос о числе предельных циклов уравнения, об их устойчивости также является чрезвычайно важным для приложений.

В 1920-х годах известный французский математик Дюлак опубликовал работу, основной результат которой стал значительным продвижением в решении 16-й проблемы. А именно, он доказал, что *каждое конкретно взятое уравнение рассматриваемого типа имеет лишь конечное число предельных циклов.*

[1] Отображение δ, ставящее в соответствие точке z, из которой выходит траектория, первую после возвращения точку пересечения траектории с нормалью, называется *отображением последования Пуанкаре*; изучение свойств этого отображения играет важную роль в исследовании 16-й проблемы Гильберта.

Дюлак не получил оценки для числа таких циклов, тем более равномерной оценки, то есть оценки, верной для всех уравнений n-й степени, что, собственно, и составляет суть проблемы. Он доказал лишь конечность такого числа для каждого конкретного уравнения, но и это был очень важный, нетривиальный результат.

Следующей заметной вехой в исследовании 16-й проблемы стала замечательная работа Петровского и Ландиса, представленная в 1956 году на Всесоюзном съезде математиков в Москве, в которой была анонсирована требуемая оценка для всех значений n. Но, к сожалению, эта работа оказалась ошибочной, и поправить ее так и не удалось. Несмотря на это, работа Петровского и Ландиса оказала большое влияние на развитие всей аналитической теории дифференциальных уравнений благодаря тем замечательным нетривиальным методам, которые были в ней предложены для исследования 16-й проблемы Гильберта. В частности, в этой работе были заложены основы теории алгебраических комплексных слоений, которая затем интенсивно развивалась усилиями наших и зарубежных математиков.

Прошло всего 10–15 лет, и внимательный анализ показал, что и в классической работе Дюлака имеется ошибка. Итак, где-то в 70-х годах выяснилось, что в 16-й проблеме по-существу не сделано практически ничего. Есть интересные подходы, интересные идеи, нетривиальная история, но нет решения.

И вот совсем недавно, в начале 80-х годов, в работах двух ученых — нашего математика Ю. Ильяшенко и французского математика Жана Экаля — было найдено доказательство результата Дюлака о конечности числа предельных циклов для каждого конкретного уравнения. Тем самым было показано, что работа Дюлака может быть поправлена. Доказательство в том и другом случае оказалось очень непростым (Ильяшенко при этом пользовался, в основном, геометрическими методами, а Экаль использовал, по преимуществу, алгебраический язык) и заняло целый том. Что же касается основной части проблемы, а именно той, которая, собственно, и была сформулирована Гильбертом, то до сих пор решения этой задачи нет. Эта проблема представляется чрезвычайно привлекательной для исследователей, благодаря простоте и естественности её формулировки и непосредственным связям с приложениями. Актуальность её — очевидна, тем не менее она все еще ждет своего решения.

* * * * * *

Следующая задача, являющаяся предметом нашего рассмотрения — 21-я проблема Гильберта. История исследования этой проблемы также оказалась довольно запутанной, в чем-то даже похожей на историю исследования 16-й проблемы. Формулируется 21-я проблема следующим образом:

> *Доказать, что всегда существует линейное дифференциальное уравнение фуксового типа с заданными особыми точками и данной группой монодромии.*

Следует отметить довольно жесткую безальтернативную формулировку этой проблемы: Гильберт не ставит вопрос о возможности существования указанного уравнения (например, *существует или нет...*), а просто формулирует соответствующую теорему существования.

Вопрос о построении фуксового уравнения с заданной монодромией рассматривался ещё Б. Риманом в 1856 году, поэтому эта проблема (и её различные модификации) часто называется проблемой Римана – Гильберта.

Исторически рассматривались различные варианты 21-й проблемы Гильберта (см. комментарий на стр. 591 в [Hi]). Наиболее нетривиальным и важным для приложений оказался вариант проблемы, сформулированный для фуксовых систем линейных дифференциальных уравнений, который и станет предметом нашего дальнейшего рассмотрения.

Фуксовой системой линейных дифференциальных уравнений называется система вида

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{z-a_i}\right) y, \tag{4}$$

где z — комплексный аргумент, y — неизвестная комплекснозначная вектор-функция p переменных, а $B_1, \dots, B_n$ — матрицы размера $(p \times p)$.

Точки $z = a_1, \dots, a_n$, в которых знаменатели коэффициентов системы обращаются в нуль, называются *особыми точками* уравнения.

Неформально говоря, фуксова система уравнений — это система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на комплексной плоскости с простейшими особенностями (знаменатели коэффициентов системы имеют нули минимально возможного, первого порядка в особых точках).

Чтобы понять, что такое группа монодромии, рассмотрим следующий простой пример.

Уравнение

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y}{2z},$$

где y — обычная скалярная функция, является уравнением фуксового типа, в котором особой точкой является точка $z = 0$, а матрица коэффициентов имеет размер (1×1) и совпадает с числом $1/2$. Разумеется, это уравнение легко решается. Общее решение имеет вид $y = c\sqrt{z}$.

Как хорошо известно из курса комплексного анализа, функция $\sqrt{z}$ является многозначной функцией. Так, например, в точке $z = 1$ она может принимать два значения: $+1$ и -1. Рассмотрим правую полуплоскость и выделим там то решение, которое в точке $z = 1$ принимает значение $+1$. Обозначим это решение через $(\sqrt{z})_+$. Рассмотрим теперь окружность единичного радиуса с центром в особой точке $z = 0$ и посмотрим, как меняется наше решение при продолжении вдоль этой окружности против часовой стрелки.

Напомним, что каждое комплексное число z, лежащее на единичной окружности, может быть записано в виде $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, где φ — угол, который составляет радиус-вектор числа z с осью x-ов; этот угол называется *аргументом* комплексного числа z. В этих обозначениях нетрудно выписать значение $(\sqrt{z})_+$ для числа z, лежащего на верхней половине окружности рядом с числом 1. А именно,

$$(\sqrt{z})_+ = \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}.$$

То есть для того, чтобы найти $(\sqrt{z})_+$, в данном случае надо просто рассмотреть радиус-вектор с половинным по отношению к заданному углом и отметить

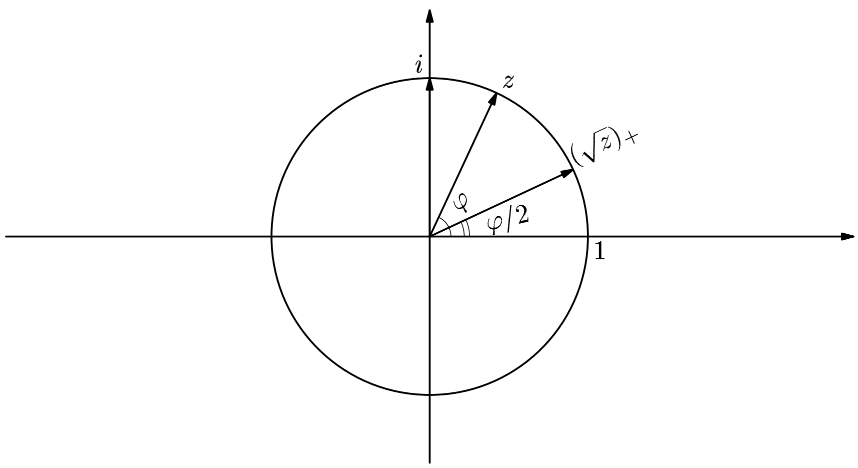

Рис. 4.

соответствующую точку на единичной окружности (см. рис. 4). Полученный ответ нетрудно проверить. Возведем выражение $\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}$ в квадрат. Воспользовавшись известными тригонометрическими формулами и тем, что $i^2=-1$, получим в точности $\cos\varphi+i\sin\varphi$, что и требовалось доказать.

Давайте посмотрим, как меняется значение $(\sqrt{z})_+$, когда точка z перемещается вдоль нашей окружности против часовой стрелки. В точке i угол φ для радиус-вектора, изображающего число i, равен $\pi/2$. Поэтому для соответствующего значения $(\sqrt{z})_+$ угол радиус-вектора точки будет равен $\pi/4$. Подставим в формулу для числа z вместо угла $\pi/2$ угол $\pi/4$, получим $(\sqrt{i})_+=\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2$.

Когда точка z в процессе движения добирается до точки -1, аргумент числа z становится равным π. Значит, согласно той же формуле, $(\sqrt{-1})_+=i$, потому что число с аргументом $\pi/2$ на единичной окружности соответствует точке i, и т. д. Когда точка z возвращается в точку $z=1$, она проходит угол, равный 2π. Поэтому, согласно нашему правилу мы должны взять угол 2π, разделить его пополам, получить угол π, рассмотреть $\cos\pi+i\sin\pi$ и получить значение, равное -1.

Тем самым наше решение, будучи продолженным в точку 1 вдоль окружности, принимает значение, равное не 1, а $\cos\pi+i\sin\pi=-1$. Другими словами, продолженное непрерывно вдоль окружности единичного радиуса наше решение $(\sqrt{z})_+$ переходит в решение, равное $-(\sqrt{z})_+$. В таких случаях говорят, что точка 0 является *точкой ветвления* для этого решения, а про само решение — что оно *ветвится* в точке 0, при этом число -1, характеризующее это ветвление, называют *монодромией* уравнения в точке ноль.

В случае фуксовой системы уравнений (4) общего типа нужно продолжать не одно решение, а сразу всю систему независимых решений. Они также както преобразуются при таком продолжении вокруг особой точки: умножаются на константы, к ним прибавляются другие решения. То, как преобразуются решения уравнения при обходе особой точки, и характеризуется монодромией.

В общем случае это уже не одно число (как это было в разобранном примере), а некоторая числовая матрица.

Более точно, если $(e_1(z), \ldots, e_p(z))$ — базис в пространстве решений системы (4), рассмотренной в окрестности некоторой неособой точки z_0, то после аналитического продолжения вдоль петли g_i, обходящей особую точку a_i, этот базис вновь переходит в некоторый базис (вообще говоря, другой) $(e'_1(z), \ldots, e'_p(z))$ пространства решений той же самой системы. Постоянная матрица G_i, связывающая эти два базиса, и называется *матрицей монодромии* системы (4) в точке a_i.

Обозначим через G_g матрицу монодромии базиса $(e_1(z), \ldots, e_p(z))$, соответствующую аналитическому продолжению вдоль произвольной петли g с началом в точке z_0, не проходящей через особые точки. В пространстве всех петель на комплексной плоскости с выколотыми особыми точками можно ввести операцию умножения (последовательный обход двух петель-сомножителей). Если петли рассматривать с точностью до непрерывной деформации, не задевающей особых точек, то эта операция превращает множество петель в группу. Тем самым превращается в группу и множество матриц G_g относительно операции обычного матричного произведения. Эта группа называется *группой монодромии* системы (4). Нетрудно показать, что её образующими являются матрицы монодромии $G_1, \ldots, G_n$, удовлетворяющие априори единственному соотношению $G_1 G_2 \cdot \ldots \cdot G_n = I$ (где через I обозначена единичная матрица).

Итак, группа монодромии уравнения характеризует то, как преобразуются, ветвятся решения при обходе особых точек. Она задается конечным набором числовых матриц, каждая из которых соответствует своей особой точке.

Возникает естественный вопрос, который можно назвать обратной задачей монодромии. Рассмотрим набор точек на комплексной плоскости и соответствующий абстрактный набор матриц $G_1, \ldots, G_n$, удовлетворяющий соотношению $G_1 G_2 \cdot \ldots \cdot G_n = I$. Спрашивается, всегда ли существует система фуксового типа именно с данными особыми точками и с данной группой монодромии, которая определяется заданным набором матриц?

Именно эту обратную задачу и формулирует Гильберт в своей 21-й проблеме. Причем, формулирует в императивной форме, считая, что эта задача обязательно должна иметь положительное решение.

Какова мотивировка рассматриваемой задачи? Почему она интересна? С чем она связана? Сам Гильберт пишет об этом совсем немного. Он лишь отмечает, что решение указанной проблемы придало бы законченный вид аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. То есть, он выдвигает чисто внутриматематическую мотивировку. Но, как это часто бывает с проблемами Гильберта, сформулированные даже в таком узкоспециальном смысле, они впоследствии оказываются важными и для всей математики в целом, и для ее приложений. Мы вернемся к этому вопросу чуть позже. А теперь поговорим немного об истории исследования этой проблемы, которая в чем-то даже более запутана, чем история, связанная с 16-й проблемой.

Уже в 1908 году замечательный югославский математик Племель, работавший во Франции, опубликовал работу, в которой предъявил положительное решение 21-й проблемы Гильберта (см. [Pl]). Элегантная работа Племеля, опиравшаяся на использование теории интегральных уравнений Фредгольма, была чистой теоремой существования и давала полное решение поставленной задачи.

Однако неисследованным оставался вопрос о возможности алгоритмического построения фуксового уравнения по заданным особым точкам и матрицам монодромии (важная для приложений задача, являющаяся естественным развитием исходной постановки Гильберта). Среди результатов, полученных в этом направлении, следует прежде всего отметить выдающуюся работу нашего соотечественника Лаппо-Данилевского, который в 1928 году решил задачу для случая, когда все матрицы G_i близки к единичной матрице, то есть для случая, когда ветвления очень малы, и когда решения почти не ветвятся.

Следующее значительное продвижение в решении задачи об алгоритмическом построении фуксовой системы по данным монодромии было сделано в 1972 году голландским математиком Деккерсом, который предъявил алгоритм построения уравнения для матриц размера (2×2), из которого, в частности, следовало, что для случая системы двух уравнений 21-я проблема всегда имеет положительное решение (что подтверждало результат Племеля в размерности два).

В общем, после работы Племеля исследования в области 21-й проблемы Гильберта продвигались, но не слишком интенсивно. В каком-то смысле, эта задача оказалась на некоторое время на периферии развития математики.

Однако после открытия в начале 1970-х годов метода изомонодромных деформаций[2)] аналитическая теория дифференциальных уравнений получила новый мощный импульс к своему развитию.

Оказалось, что многие нелинейные уравнения математической физики могут быть проинтерпретированы как уравнения изомонодромных деформаций систем линейных дифференциальных уравнений. В качестве примера можно привести знаменитое уравнение, описывающее поведение плазмы, модифицированное уравнение Кортевега де Фриза, некоторые из решений которого выражаются через решения уравнений описанного типа (см. [AI]). При этом важную информацию о поведении решений этих нелинейных уравнений можно получить, исследуя соответствующие изомонодромные деформации линейных систем и, в частности, фуксовых систем дифференциальных уравнений. Но, чтобы построить изомонодромное семейство, надо вначале решить обратную задачу теории монодромии, задачу Римана – Гильберта. Так эта проблема вновь оказалась в центре внимания многих математиков.

Возникла новая мощная мотивировка для изучения этой задачи, появилось много новых интересных работ по этой проблеме. В конце семидесятых годов в Париже начал работать семинар знаменитых французских математиков Б. Мальгранжа, А. Дуади, Буте де Монвеля (последний очень хорошо известен и как математик, успешно работающий в области теоретической физики), на котором интенсивно изучалась указанная проблематика: задача Римана – Гильберта, изомонодромные деформации.

Одновременно у нас в стране работал семинар В. И. Арнольда и Ю. С. Ильяшенко, который занимался похожей тематикой. И почти одновременно в начале восьмидесятых годов и те, и другие обнаружили пробелы в доказательстве Пле-

[2)] В работах американских математиков Фляшки и Ньюэла, а также японских математиков Сато, Дзимбы и Мивы.

меля (см. [AI]). Оказалось, что его доказательство не является полным. Не то, чтобы они нашли ошибку... Ошибки как таковой вроде бы не было. Была обнаружена лакуна в доказательстве. Дело в том, что Племель вначале построил систему линейных дифференциальных уравнений с заданными особыми точками и монодромией в более широком классе, чем это требовалось в проблеме Гильберта, в классе систем с так называемыми *регулярными особыми точками* (т. е. в классе таких систем, все решения которых имеют не более, чем степенной рост в особых точках). Затем он применил к построенной системе некую процедуру, с помощью которой преобразовал её к системе, фуксовой во всех точках, кроме одной, и закончил своё доказательство следующей фразой: «А теперь, действуя точно так же, приведем нашу систему к фуксовой и в последней точке.» Однако, оказалось, что восстановить эту пропущенную часть доказательства не так-то просто. Во всяком случае, сделать это долго никому не удавалось, несмотря на то, что у всех без исключения математиков, работавших в этой области, было полное впечатление, что рассматриваемая проблема должна решаться положительно, как это и было сформулировано Гильбертом.

Тем более неожиданным оказалось появление в конце 1989 года контрпримера к 21-й проблеме Гильберта, полученного автором (см. [Bo1]). Оказалось, что сформулированное в ней утверждение в общем случае *неверно*, и что на самом деле *не всякие данные монодромии могут быть реализованы системой фуксовых уравнений.*

Построенный контрпример относится к случаю четырёх особых точек и матрицам монодромии размера (3×3). Это первая размерность и минимальное возможное количество особых точек, при которых такой пример в принципе возможен. Сам пример довольно сложен для изложения: искомая монодромия задаётся в нём неявно, в виде монодромии некоторой системы уравнений с регулярными особыми точками, а затем доказывается, что указанная система уравнений не может быть преобразована к фуксовой. К тому же оказывается, что этот контрпример нестабилен в следующем смысле. При почти любом малом изменении положения особых точек (с сохранением матриц монодромии, т. е. при изомонодромной деформации построенной нефуксовой системы), новые данные монодромии (отличающиеся от исходных лишь положением особых точек) уже могут быть реализованы в качестве данных монодромии некоторой фуксовой системы.

Гораздо проще выглядит соответствующий контрпример в размерности четыре. Здесь можно обойтись тремя особыми точками и тремя матрицами монодромии. Рассмотрим специальный тип групп монодромии, который в дальнейшем будем называть *Б-монодромией.*

Группа монодромии называется Б-монодромией, если набор матриц монодромии приводим, и если жорданова нормальная форма каждой из матриц монодромии G_i состоит ровно из одной жордановой клетки. Напомним, что набор матриц называется приводимым, если у этих матриц есть общее инвариантное подпространство, отличное от нулевого пространства и от всего пространства $\mathbb{C}^p$.

Оказывается, что имеет место следующее утверждение (см. [Bo2]):

Если Б-монодромия может быть реализована как группа монодромии некоторой фуксовой системы, то произведение собственных значений матриц $G_1, \dots, G_n$ *монодромии должно равняться единице.*

Рассмотрим матрицы

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

и произвольный набор точек a_1, a_2, a_3.

Заметим, что $G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 = I$, матрица G_2 может быть преобразована к матрице G_1, а матрица G_3 может быть преобразована к жордановой клетке с собственным значением -1. Действительно, для матрицы G_2 имеем

$$S_2^{-1} G_2 S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

а для матрицы G_3 получаем

$$S_3^{-1} G_3 S_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S_3 = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 0 & 16 & 4 & 3 \\ 64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & -12 \end{pmatrix}.$$

У матриц G_1, G_2, G_3 имеется общее инвариантное подпространство размерности два. Стало быть, набор рассматриваемых матриц удовлетворяет определению Б-монодромии. Но произведение собственных значений этих матриц равно $-1 \neq 1$. Значит, набор этих матриц не может быть монодромией никакой фуксовой системы. То есть, *указанные данные монодромии доставляют контрпример к 21-й проблеме Гильберта.*

Метод, который удалось применить к решению 21-й проблемы Гильберта, пришел частично из алгебраической геометрии и был инициирован работами Х. Рерля, Т. Левельта, П. Делиня и других замечательных математиков, работавших в этой области. Его суть состоит в том, что удаётся связать между собой асимптотики решений фуксовой системы в особых точках и инварианты некоторого голоморфного векторного расслоения, построенного по исходной монодромии, а затем применить к задаче Римана-Гильберта хорошо разработанные алгебро-геометрические методы.

Полученное отрицательное решение проблемы не означало, что исследования в этой области полностью закончены. Скорее, этот результат поставил массу новых интересных и важных для приложений вопросов. Например, как описать тот класс групп монодромии, которые все же могут быть реализованы фуксовыми системами? На этот вопрос также удалось получить ответ (хотя и неполный)[3).

Значение проблем Гильберта состоит еще и в том, что при решении каждой из них обязательно возникают новые интересные методы и идеи, которые могут быть использованы при решении других задач.

[3)] Так, например, автору и независимо В. Костову удалось доказать, что любые данные монодромии с неприводимым набором матриц могут быть реализованы в качестве данных монодромии некоторой фуксовой системы, см. [Bo2].

Так и методы, развитые при решении 21-й проблемы, удалось применить для исследования особых точек уравнений Пенлеве. (Уравнения Пенлеве — это те 6 знаменитых уравнений математической физики, решения которых выступают в качестве новых специальных функций, через которые выражаются решения многих нелинейных дифференциальных уравнений.)

Удалось получить некоторые новые результаты, связанные с теорией векторных расслоений, исследовать расслоение с помощью ассоциированного с ним уравнения. Отметим также результаты, связанные с нормальной формой уравнения в окрестности особой точки, полученные с помощью упомянутых методов.

Другими словами, как это часто случается с проблемами Гильберта, 21-ю проблему, которая естественным образом помещается в раздел обыкновенных дифференциальных уравнений, можно смело поместить в разделы и математической физики, и алгебраической геометрии. Она оказалась тесно связана с этими областями математики.

В заключение этой заметки я бы хотел порекомендовать читателям — учителям, студентам и школьникам — прочитать доклад Гильберта *«Математические проблемы»* (см. [Hi]), особенно первую его часть, которая написана замечательным понятным языком, и в которой говорится о целях математики, о том, каким должно быть математическое доказательство. Прочитав этот доклад, проникнувшись его стимулирующим духом, можно понять, почему он оказал такое влияние на развитие математики XX столетия.

Список литературы

[AI] *Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Динамические системы – I / Под ред. Д. В. Аносова, В. И. Арнольда. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 1. С. 7–149 (Современные проблемы математики. Фундаментальные направления).

[Bo1] *Болибрух А.А.* Проблема Римана–Гильберта //Успехи Математических Наук. 1990. Т. 45, N 2. С. 3–47.

[Bo2] *Болибрух А. А.* Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. М.: МЦНМО, 2000. 127 с.

[Hi] *Гильберт Д.* Избранные труды. Т. 2. М.: Факториал, 1998. 607 с.

[Pl] *Plemelj J.* Problems in the sense of Riemann and Klein, Interscience. New York, 1964.