

# Рассеяние, дефокусировка и астигматизм

Л. А. Бунимович

## ВВЕДЕНИЕ

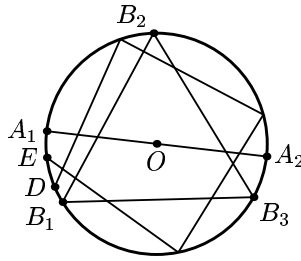
Рассмотрим движение луча света в ограниченной области  $Q$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^d$  с кусочно гладкой границей. Предположим, что каждая гладкая компонента границы (стенка) зеркально отражает падающие на неё лучи. Это условие означает, что угол падения (угол между падающим на стенку лучом и направлением внутренней, по отношению к  $Q$ , нормали к стенке в этой точке) равен углу между этой нормалью и отражённым лучом, который называется углом отражения. (Мы предполагаем, что луч отражается во внутренней точке стенки.) Вместо луча света можно рассматривать, например, движение акустического луча или материальной точки. В последнем случае (тот же самый) закон отражения принято называть упругим (а не зеркальным). Получающаяся динамическая система называется бильярдом в  $Q$ .

Очевидно, что  $d = 1$  отвечает тривиальному случаю. Поэтому мы предположим, что размерность области  $Q$  («бильярдного стола»)  $d \geq 2$ . Уже из приведенного неформального описания модели ясно, что изучение её эволюции (динамики) имеет многочисленные приложения в оптике, акустике и классической механике. Оказывается, что изучение динамики бильярда позволяет получить важную информацию и о соответствующей квантовой задаче в области  $Q$  (см., например, [19]).

Пожалуй, наиболее естественным вопросом о поведении бильярдных орбит в области  $Q$  является следующий: будут ли орбиты бильярда всюду плотны (в области  $Q$ )? Обычно этот вопрос называется задачей об освещаемости области. (Задача об освещаемости может быть сформулирована несколькими способами в зависимости от того, какого типа источники света мы рассматриваем (см., например, [4]). В данной статье мы будем интересоваться только источниками типа фонаря, который испускает либо один луч, либо узкий пучок параллельных лучей.)

Орбиты бильярда представляют собой ломаные в области  $Q$ . Ясно, что такая ломаная не может пройти через все внутренние точки области  $Q$ . Поэтому задача об освещаемости формулируется именно как всюду плотность орбит соответствующего бильярда на бильярдном столе  $Q$ .

С другой стороны, ясно, что для многих областей легко построить такие орбиты, для которых соответствующие ломаные будут иметь только конечное число звеньев (рис. 1). Такие орбиты называются периодическими. Тем самым, задача об освещаемости должна ставиться для типичных, а не для всех орбит бильярда. (Далее мы объясним, как ввести естественным образом понятие типичности бильярдных орбит).



**Рис. 1.** Биллиард в круге.  $A_1A_2, B_1B_2B_3$  — периодические траектории

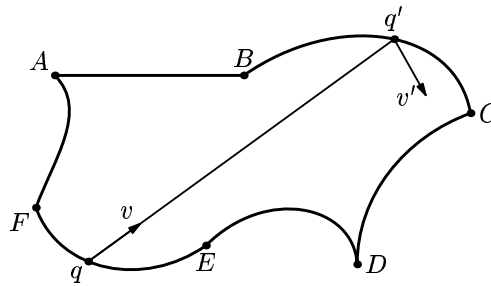
Более или менее сразу очевидно, что поведение биллиарда существенно определяется свойствами границы области  $Q$ .

Имеющиеся в настоящее время результаты относятся к случаю, когда регулярные компоненты границы области  $Q$  (стенки биллиардного стола) являются либо выпуклыми внутрь области  $Q$  (такие компоненты называются рассеивающими), либо вогнутыми внутрь области  $Q$  (такие стенки называются фокусирующими), либо  $(d - 1)$ -мерными гиперплоскостями (такие компоненты называются нейтральными), рис. 2. Случай, когда кривизна регулярной компоненты границы меняет знак, практически не исследован.

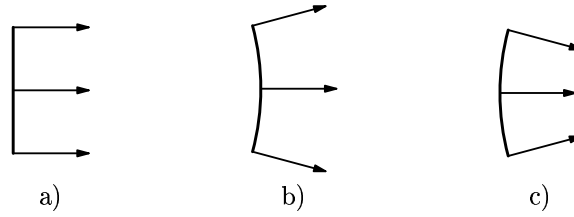
В данной статье мы будем рассматривать биллиарды в областях с хотя бы одной не нейтральной компонентой границы. (Тем самым, мы исключаем из рассмотрения многоугольники и многогранники).

Пусть пучок параллельных лучей отражается один раз от одной и той же компоненты границы  $\partial Q$ . Тогда, как легко видеть (ниже мы приведём формулы для кривизны фронтов таких отражённых пучков), возможны три ситуации: после отражения от нейтральной стенки пучок остаётся параллельным, рис. 3а), после отражения от рассеивающей стенки пучок становится расходящимся (рассеивающимся), рис. 3б), после отражения от фокусирующей стенки пучок становится сходящимся (фокусирующимся), рис. 3с).

Глядя на рис. 3, естественно предположить, что рассеивающие стенки способствуют увеличению освещённости области. Действительно, поскольку лучи в



**Рис. 2.**  $AB$  — нейтральная компонента,  $BC, FE$  — фокусирующие компоненты,  $CD, DE, FA$  — рассеивающие компоненты



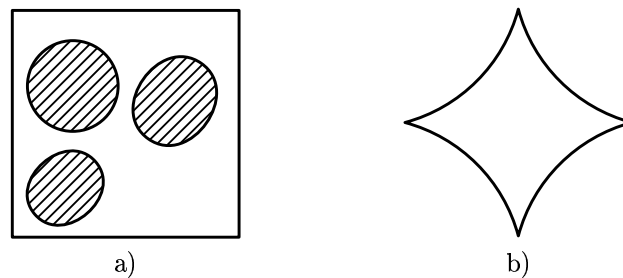
**Рис. 3.** а) параллельный; б) расходящийся (рассеивающийся) и в) сходящийся (фокусирующийся) пучки траекторий

пучке расходятся после отражения от рассеивающей стенки, этот пучок освещает со временем все более и более широкую подобласть. С другой стороны, после отражения от нейтральной стенки ширина пучка лучей не изменяется. Что же касается отражения от фокусирующей стенки, то в этом случае пучок сходится и освещает после отражения более узкую подобласть.

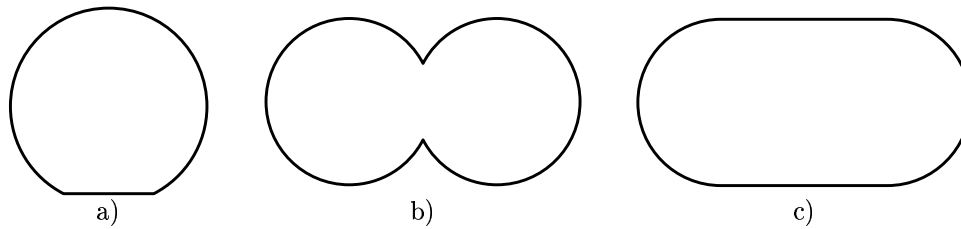
Поэтому наличие фокусирующей границы традиционно считалось препятствием к освещаемости. Действительно, легко видеть, например, что параллельный пучок лучей, не проходящий через центр круга, освещает только кольцо с внутренним радиусом, равным расстоянию от центра до ближайшего луча в этом пучке.

С другой стороны, в основополагающей работе Я. Г. Синая [6] было показано, что если все компоненты границы  $\partial Q$  являются рассеивающими и гладкими, то проблема освещаемости области  $Q$  решается положительно. Такие бильярдные столы, называемые бильярдами Синая, получаются, если, например, вырезать из тора конечное число выпуклых областей с гладкой границей (рис. 4). (На самом деле, в работе [6] были получены существенно более сильные результаты, а именно, доказаны эргодичность, перемешивание и  $K$ -свойство для бильярдов Синая.) Несколько позднее [3] было показано, что аналогичные результаты верны и для рассеивающих бильярдов с границей, имеющей сингулярные точки.

Отмеченные результаты, казалось бы, подтверждают интуитивное представление о том, что рассеивающие компоненты границы бильярдного стола способствуют освещаемости, в то время как фокусирующие компоненты препятствуют ей. Однако в работе [1] было показано, что существуют классы



**Рис. 4.** Бильярды Синая (рассеивающие бильярды)



**Рис. 5.** Простейшие формы фокусирующих бильярдov со стохастическим поведением  
 а) сегмент круга, вмещающий угол, меньший  $90^\circ$ ,  
 б) предыдущая область, отраженная относительно прямолинейного куска границы,  
 в) два полукруга, соединённые касательными прямолинейными отрезками («стадион»)

бильярдov, вообще не имеющие рассеивающих компонент, в которых, тем не менее, проблема освещаемости решается положительно. Более того, эти бильярдov обладают такими же сильными стохастическими свойствами, как и бильярдov Синая [1]. Простейшие примеры таких бильярдov приведены на рис. 5.

Работа [1] показала, что, вопреки общим представлениям, бытующим как среди математиков, так и среди физиков, имеется другой, отличный от механизма рассеяния, механизм, который может приводить к освещаемости области даже с чисто фокусирующей границей или, более общо, к стохастичности соответствующей динамической системы. Этот механизм называется механизмом *дефокусировки*. Более того, оказалось, что только эти два механизма, рассеяние и дефокусировка, могут генерировать стохастичность бильярдov.

Однако стохастичность (или более слабо, освещаемость) рассеивающих бильярдov была доказана для областей любой (конечной) размерности, в то время как для фокусирующих бильярдov все примеры ограничивались только двумерными бильярдами.

Только совсем недавно, через 25 лет после работы [1], было доказано, что механизм дефокусировки также может генерировать освещаемость (стохастичность) фокусирующих бильярдov в любой (конечной) размерности [15, 16, 17].

То, что этот вопрос был открыт в течение столь длительного времени, неудивительно. Дело в том, что в размерностях  $d > 2$  возникает очень серьёзное препятствие к действию механизма дефокусировки. Это препятствие есть, на самом деле, хорошо известное в геометрической оптике явление астигматизма [20].

Астигматизм означает, что при отражении пучка лучей от фокусирующего зеркала (фокусирующей компоненты границы) сила фокусировки оказывается существенно различной в разных плоскостях.

В данной статье мы объясним все эти результаты наглядно и с минимальным количеством формул, приводя ссылки на работы с полными доказательствами. Более того, мы рассмотрим и вопрос о том, какими свойствами должна обладать фокусирующая компонента границы бильярда (фокусирующее зеркало)

для того, чтобы его можно было использовать в качестве компоненты границы стохастического бильярда [10].

Известно, что любое рассеивающее зеркало можно использовать в качестве компоненты границы стохастического (освещаемого) бильярда.

Для фокусирующих зеркал это уже не так. Оказывается, что для того, чтобы фокусирующее зеркало можно было использовать для границы стохастического бильярда, оно должно быть абсолютно фокусирующим [10, 13].

Понятие абсолютно фокусирующего зеркала [10, 13] является новым понятием в геометрической оптике. Обычное понятие фокусирующего зеркала означает, что оно фокусирует, после первого отражения от него, все падающие на него параллельные пучки лучей. Однако параллельный пучок лучей может испытывать серию из любого конечного числа последовательных отражений от фокусирующего зеркала. (Отметим, что от рассеивающего зеркала у параллельного пучка лучей не может быть (в  $\mathbb{R}^d$ ) двух последовательных отражений.) Фокусирующее зеркало называется *абсолютно фокусирующим*, если оно фокусирует все падающие на него параллельные пучки лучей после последнего отражения в соответствующей серии последовательных отражений от этого зеркала (рис. 6).



Рис. 6. а) фокусирующее зеркало, б) абсолютно фокусирующее зеркало

## 1. БИЛЛИАРДЫ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Пусть  $Q \subset \mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ) —  $d$ -мерная область евклидова пространства с кусочно гладкой границей  $\partial Q$ . Мы предполагаем, что каждая компонента границы  $(\partial Q)_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , принадлежит классу  $C^3$ , хотя некоторые формулируемые ниже результаты справедливы и в  $C^2$ . (Наше предположение позволяет избежать патологической ситуации, когда траектория бильярда может испытывать бесконечное число отражений в конечном интервале времени [23]).

Пусть граница  $\partial Q$  оснащена полем внутренних (по отношению к области  $Q$ ) нормальных к ней векторов  $n(q)$ ,  $q \in \partial Q$ . Ясно, что во всех регулярных точках  $q$  границы вектор  $n(q)$  определён однозначно. В сингулярных точках  $q \in \partial Q$  число нормальных векторов совпадает с числом регулярных компонент, пересекающихся в этой точке.

Зафиксировав единичный нормальный вектор в каждой регулярной точке  $q \in \partial Q$ , мы можем определить кривизну границы (или, если  $d > 2$ , вторую фундаментальную форму, иногда также называемую оператором кривизны  $K(q)$ )

в точке  $q$ . Мы предполагаем, что на каждой регулярной компоненте границы  $(\partial Q)_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , оператор кривизны  $K(q)$  определён либо неотрицательно ( $K(q) \geq 0$ ,  $q \in (\partial Q)_i$ ), либо неположительно ( $K(q) \leq 0$ ,  $q \in (\partial Q)_i$ ), либо  $K(q) = 0$  во всех точках  $q \in (\partial Q)_i$ . (В двумерном случае,  $d = 2$ , это условие означает, что кривизна каждой компоненты границы положительна, отрицательна, либо тождественно равна нулю, см. рис. 2). Естественно называть регулярные компоненты границы таких областей рассеивающими, фокусирующими и нейтральными (или плоскими). Например, бильярд называется рассеивающим, если  $K(q) > 0$  во всех регулярных точках  $q$  границы  $\partial Q$ . Бильярд называется нигде не рассеивающим, если  $K(q) \leq 0$  во всех регулярных точках  $q \in \partial Q$ .

Мы уже не раз употребляли слово «бильярд», говоря пока лишь о форме рассматриваемых «бильярдных столов» (областей  $Q$ ).  $Q$  также называется конфигурационным пространством бильярда. Теперь же мы определим соответствующую динамическую систему, которая и называется бильярдом.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Бильярд есть динамическая система, порождённая движением точечной частицы с единичной скоростью внутри  $Q$ . При достижении границы  $\partial Q$  точка отражается от неё по закону «угол падения равен углу отражения». Последнее означает, что при отражении от границы тангенциальная компонента скорости частицы сохраняется, а нормальная компонента скорости частицы меняет знак, т. е.  $v_+ = v_- - 2(n(q), v_-)n(q)$ , где  $v_+$  ( $v_-$ ) есть скорость частицы в момент непосредственно после (до) момента отражения.

Из определения бильярда сразу видно, что без ограничения общности можно считать скорость частицы единичной, т. е.  $\|v\| = 1$ .

Фазовое пространство  $\mathcal{M}$  бильярда представляет собой ограничение на область  $Q$  единичного касательного пучка к  $\mathbb{R}^d$ . Мы будем использовать стандартное обозначение для точек  $x = (q, v) \in \mathcal{M}$  фазового пространства, где  $q$  есть точка конфигурационного пространства  $Q$ , а  $v$  есть (единичный) вектор скорости частицы.

Бильярд представляет собой динамическую систему с непрерывным временем  $\{S^t\}$ ,  $-\infty < t < \infty$ . (Такие динамические системы называются потоками). Конечно, эта динамическая система определена только для таких точек  $x$ , траектории которых никогда не попадают в особые точки границы. Динамическая система  $\{S^t\}$  сохраняет меру Лиувилля  $dv = dq \cdot d\omega$ , где  $dq$  есть лебегова мера на  $Q$ , а  $d\omega$  — равномерная мера на  $(d-1)$ -мерной сфере. Нетрудно показать, что мера тех точек  $x$ , траектории которых  $\{S^t x\}$  хотя бы раз попадают в особые точки границы, равна нулю.

Бильярды обладают так называемым глобальным сечением Пуанкаре, которое позволяет свести изучение свойств бильярдного потока  $\{S^t\}$  к изучению динамической системы с дискретным временем, порождаемой бильярдным отображением  $T$ .

Обозначим  $M = \{x = (q, v), q \in \partial Q, (v, n(q)) \geq 0\}$ . Пусть  $\pi$  есть естественная проекция фазового пространства бильярда  $\mathcal{M}$  на его конфигурационное пространство  $Q$ , т. е.  $\pi(x) = q$ . Обозначим через  $\tau(x)$  первый положительный момент времени, когда траектория точки  $x = (q, v)$  отражается от границы  $\partial Q$ .

Определим теперь бильярдное отображение как  $Tx = (q', v') = S^{\tau} x$ . Таким образом,  $q'$  есть точка границы, в которой происходит следующее отражение

траектории точки  $x$  от  $\partial Q$ , а  $v'$  — вектор скорости частицы в момент сразу после этого отражения (рис. 2).

Пространство  $M$  называется фазовым пространством билиардного отображения  $T$ . Нетрудно убедиться (см., например, [5]), что  $T$  сохраняет проекцию  $d\mu$  меры Лиувилля  $dv$ , задаваемую формулой

$$d\mu(q, v) = \text{const}(v, n(q)) dq dv, \quad (1)$$

где  $dq$  есть  $(d-1)$ -мерная лебегова мера на границе  $\partial Q$ , порождаемая объёмом, а  $dv$  есть  $(d-1)$ -мерная лебегова (равномерная) мера на единичной сфере. Нормализующий множитель  $\text{const}$  обуславливает, что  $\mu(M) = 1$ .

## 2. РАССЕЯНИЕ, ФОКУСИРОВКА И ДЕФОКУСИРОВКА

Как уже отмечалось во введении, нас будет интересовать поведение узких пучков траекторий билиарда (лучей). На самом деле достаточно начать с параллельных пучков траекторий. При этом под узким пучком траекторий мы всегда будем иметь в виду инфинитезимально узкие пучки лучей, т.е. кривая, ортогональная всем лучам в пучке (фронт), является инфинитезимально малой и после любого конечного числа отражений пучок ни разу не попадает в особые точки границы.

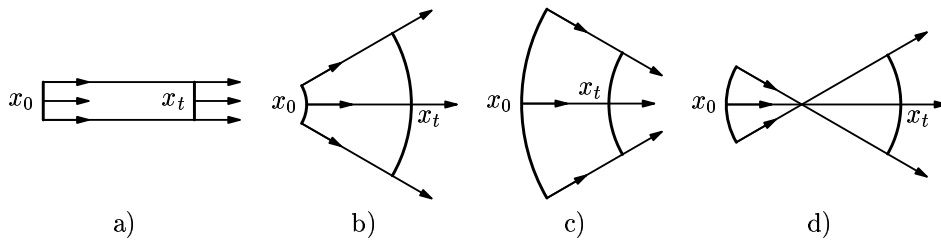
Как нам уже известно, узкие пучки лучей могут быть рассеивающимися, фокусирующимися или плоскими в зависимости от знака кривизны их фронта (рис. 3). Мы рассмотрим сейчас, что происходит с такими пучками в процессе динамики билиарда.

Очевидно, что эта динамика состоит из двух процессов:

1. Свободное движение частицы внутри области  $Q$  между двумя последовательными её отражениями от  $\partial Q$ .
2. Отражение частицы от границы.

Мы рассмотрим, что происходит с узкими пучками лучей (траекторий билиардов) при каждом из этих процессов.

Все возможные ситуации для свободного движения частицы между двумя последовательными отражениями изображены на рис. 7. Пусть начальная кривизна фронта такого пучка в его «центральной» точке  $x_0$  равна  $\varkappa(x_0)$ , а кривизна её



**Рис. 7.** Поведение пучков лучей между двумя последовательными отражениями

образа  $x_t = S^t x_0$  равна  $\varkappa(x_t)$ . Тогда имеем очевидное соотношение для соответствующих радиусов кривизны

$$\frac{1}{\varkappa(x_0)} + t = \frac{1}{\varkappa(x_t)}. \quad (2)$$

Откуда имеем

$$\varkappa(x_t) = \frac{\varkappa(x_0)}{1 + t\varkappa(x_0)}. \quad (3)$$

Из соотношения (3) сразу следует, что пучок лучей с плоским фронтом ( $\varkappa(x_0) = 0$ ) остаётся плоским (рис. 7а), рассеивающийся пучок с выпуклым фронтом ( $\varkappa(x_0) > 0$ ) остаётся выпуклым ( $\varkappa(x_t) > 0$ ), в то время как для фокусирующегося пучка с вогнутым фронтом ( $\varkappa(x_0) < 0$ ) возможны два случая. Действительно, такой пучок либо остаётся вогнутым (рис. 7с), если длина свободного пробега между двумя последовательными отражениями от границы  $\partial Q$  достаточно мала, либо этот пучок проходит через сопряжённую точку (в момент времени  $\hat{t} = -1/\varkappa(x_0)$ ) и становится расходящимся (рис. 7d). Ясно, что последняя ситуация имеет место только тогда, когда длина свободного пробега достаточно велика.

Рассмотрим теперь, что происходит с кривизной пучка при его отражении от границы. Обозначим через  $\varkappa_+(x)$  ( $\varkappa_-(x)$ ) кривизну фронта пучка в точке  $x$  в момент сразу после (до) его отражения от границы  $\partial Q$ . Тогда

$$\varkappa_+(x) = \varkappa_-(x) + \frac{2k(x)}{\cos \varphi(x)}, \quad (4)$$

где  $x$  — точка, в которой происходит отражение от границы, т. е.  $\pi(x) \in \partial Q$ ,  $k(x)$  — кривизна границы в точке  $\pi(x)$ , а  $\varphi(x)$  — угол падения (или отражения).

Формула (4) в геометрической оптике называется формулой зеркала. Читатель может либо сам вывести её, либо найти этот элементарный вывод в любой книге по геометрической оптике (или во многих статьях по теории бильярдов).

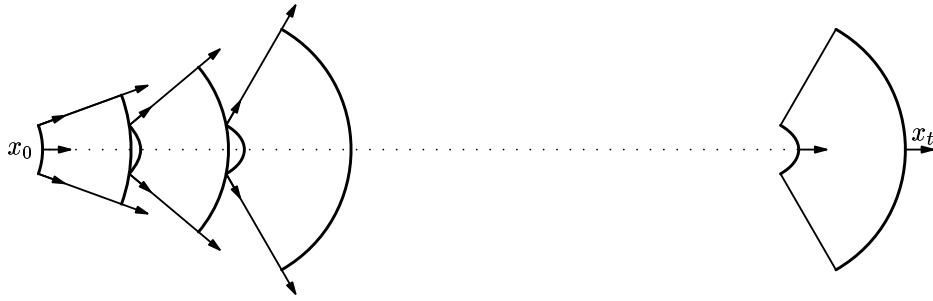
Непосредственно из формул (3) и (4) вытекает, как работают механизм рассеяния в рассеивающих бильярдах и механизм дефокусировки в бильярдах без рассеивающих компонент границы.

Мы начнём с более простого механизма рассеяния. Пусть расходящийся пучок лучей за время  $t$  испытал  $n$  отражений от границы  $\partial Q$  рассеивающего бильярда. Если рассматриваемый пучок — узкий, то по сделанному выше предположению все лучи в нём за рассматриваемое время отражались от одних и тех же регулярных компонент границы  $\partial Q$ , так что фронт такого пучка остаётся гладким. Его (локальная) эволюция изображена на рис. 8. Между каждыми двумя последовательными отражениями эволюция пучка такая же, как и на рис. 7b). Однако при каждом отражении кривизна пучка испытывает скачок, равный, согласно формуле зеркала (4),  $2k(x)/\cos \varphi(x)$ . Заметим, что  $0 \leq \cos \varphi \leq 1$  (напомним, что угол  $\varphi$  измеряется от внутренней нормали), а

$$k(x) \geq \min_{\substack{x \in \mathcal{M} \\ \pi(x) \in \partial Q}} k(x) > k_{\min} > 0.$$

Именно в этом месте мы используем, что все компоненты границы рассеивающего бильярда гладкие и строго выпуклые вовне области  $Q$ .



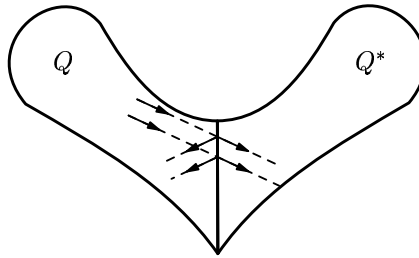


**Рис. 8.** Локальная эволюция расходящегося пучка лучей в рассеивающем бильярде

Отметим, что, если граница  $\partial Q$  имеет и плоские (нейтральные) компоненты, то отражение от них не меняет картины. Действительно, согласно формуле зеркала (4), при отражении от плоских компонент границы кривизна фронта пучка не меняется. Тем самым, можно считать, что пучок как бы «проходит сквозь такую компоненту границы» и продолжает расходиться.

Это соображение приводит к хорошо известному в геометрической оптике трюку (для построения изображения источника). Дело в том, что вместо того, чтобы отражать лучи пучка от плоской компоненты границы  $\partial Q$ , мы можем отразить область  $Q$  относительно этой компоненты, а луч в пучке продолжить прямолинейно (рис. 9). Тем самым, наличие у границы бильярда не только рассеивающих, но и нейтральных компонент, не изменяет характера эволюции расходящихся пучков траекторий. Действительно, отражение от нейтральной части границы фактически обуславливает только увеличение свободного пробега пучка между двумя последовательными отражениями от рассеивающей части границы, в то время как общая эволюция остаётся такой же, как на рис. 8. Единственно, что мы должны потребовать — это чтобы мера траекторий, которые отражаются не только от нейтральных компонент границы, была равна единице.

Удобно ввести следующее определение.



**Рис. 9.** Отражение области  $Q$  относительно плоской компоненты границы  $\partial Q$  и продолжение лучей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отражения от нейтральных компонент границы  $\partial Q$  называются *несущественными*, в то время как отражения от рассеивающих или фокусирующих компонент  $\partial Q$  называются *существенными*.

Тем самым, на рис. 8 изображены только существенные отражения. Из этого рисунка видно, что в рассеивающих бильярдах фронты расходящихся пучков лучей экспоненциально увеличиваются со временем (ниже мы приведём точную формулу). Это явление и приводит, в частности, к освещаемости соответствующих рассеивающих бильярдных столов (областей). Действительно, первоначально параллельный пучок лучей в таких областях уже после первого отражения от рассеивающей границы становится расходящимся.

Обратимся теперь к механизму дефокусировки. Этот механизм действует в некоторых (весьма широких) классах бильярдных столов, границы которых содержат фокусирующие компоненты.

Рассмотрим теперь эволюцию фокусирующегося (сходящегося) пучка лучей (рис. 3с). Как уже отмечалось, между двумя последовательными отражениями этого пучка от границы  $\partial Q$  возможны две ситуации: либо к моменту следующего отражения от границы пучок всё ещё остаётся сходящимся (рис. 7с), либо к этому моменту пучок уже стал расходящимся (рис. 7d). В последнем случае пучок лучей успевает пройти через точку пересечения (в линейном приближении, напомним, что пучок — узкий) лучей в пучке (сопряжённую точку).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Мы будем говорить, что сходящийся (в момент сразу после отражения от границы  $\partial Q$ ) *пучок траекторий дефокусируется* во время его свободного пробега, если к моменту его следующего отражения от  $\partial Q$  он становится расходящимся.

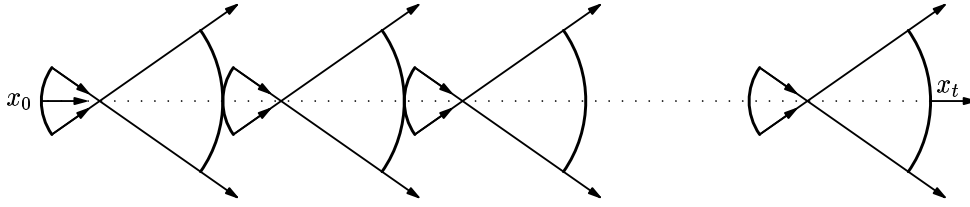
Ясно, что пучок дефокусируется, если время между последовательными его отражениями достаточно велико.

Как и при рассмотрении выше эволюции расходящихся пучков траекторий, в этом определении можно рассматривать только существенные отражения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Мы будем говорить, что в бильярде в области  $Q$  действует *механизм дефокусировки*, если для каждого сходящегося пучка лучей и серии его последовательных отражений от границы  $\partial Q$  после каждого отражения (за исключением, возможно, конечного, зависящего от этого пучка, числа начальных отражений в серии) от фокусирующей части границы  $\partial Q$  пучок успевает дефокусироваться.

Если все компоненты границы являются фокусирующими или нейтральными, то в бильярде, в котором действует механизм дефокусировки (возможно, после отбрасывания конечной и фиксированной для каждого сходящегося пучка серии) эволюция сходящегося пучка траекторий является такой, которая изображена на рис. 10.

Ясно, что без дефокусировки трудно рассчитывать, что проблема освещаемости соответствующей бильярдной области решается положительно. Действительно, в ситуации на рис. 7с) фронт пучка при его эволюции сужается. Однако и при действии механизма дефокусировки область  $Q$  может быть не освещаемой. Действительно, элементарный анализ [2] показывает, что механизм



**Рис. 10.** Возможная локальная эволюция сходящегося пучка лучей в фокусирующих бильярдах

дефокусировки действует в бильярде в круге, где проблема освещаемости, очевидно, решается отрицательно.

Действительно, механизм дефокусировки является гораздо более тонким, чем механизм рассеяния. При дефокусировке результат определяется конкуренцией двух процессов, фокусировки и рассеяния. В самом деле, между двумя последовательными отражениями пучок некоторое время фокусируется, а потом рассеивается (рис. 7d). Очевидно, что «победитель» определяется соответствующими временами.

Пусть  $\tau(x)$  — время свободного пробега «центрального» луча в сходящемся пучке. Тогда

$$\tau(x) = \tau_f(x) + \tau_d(x), \quad (5)$$

где  $\tau_f(x)$  ( $\tau_d(x)$ ) — время фокусировки (рассеяния) этого пучка.

Оказывается, что в круге для любого сходящегося пучка

$$\frac{\tau_f^{(n)}(x)}{\tau_d^{(n)}(x)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

В то время, как для положительного решения проблемы освещаемости  $Q$  нужно, чтобы длина фронта пучка достаточно быстро росла. Таким образом, в этом месте проблема уже становится не качественной, а количественной.

Для формулировки соответствующего условия рассмотрим любой (сходящийся, расходящийся или плоский) пучок траекторий (лучей). Пусть начальная кривизна фронта пучка в точке  $x_0$  была равна  $\varkappa_0(x)$ .

Найдём формулу для коэффициента растяжения  $\lambda_n(x)$  фронта этого пучка в точке  $T^n x$ , т. е. после  $n$ -го отражения этого пучка от границы  $\partial Q$ .

Из формулы (3) и рис. 7 легко следует [2], что

$$\lambda_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + |\varkappa_i(x)|\tau_i(x))^{-1}, \quad (6)$$

где  $\tau_i(x)$  — время между  $i$ -м и  $(i+1)$ -м отражениями от границы, а  $\varkappa_i(x)$  — кривизна фронта пучка в момент сразу после  $i$ -го отражения от границы.

Оказывается, что если величина  $\lambda_n(x)$  растёт экспоненциально, то задача освещаемости бильярдной области  $Q$  решается положительно.

Бильярды, для которых выражение (6) растёт экспоненциально, очевидно, обладают свойством локальной экспоненциальной неустойчивости. Это означа-

ет, что (локально!) их траектории экспоненциально расходятся в фазовом пространстве.

Динамические системы с таким свойством называются гиперболическими. Они образуют очень обширный и один из наиболее (если не просто наиболее) важный класс динамических систем.

Для многих классов билиардов, например, для рассеивающих (билиардов Синая), билиардов на рис. 5 и их существенных обобщений (см. например [13, 9, 26, 24, 21]), доказаны гораздо более сильные свойства, чем положительное решение проблемы освещаемости.

А именно, для этих билиардов доказано, что они являются эргодическими и перемешивающими динамическими системами (см. точные определения, например, в [5]). Более того, эти системы метрически изоморфны бернуллиевским [22]. Тем самым, гиперболические билиарды являются динамическими системами с очень сильными стохастическими свойствами. Например, как следствие самого слабого из этих свойств, эргодичности, мы получаем сразу не только положительное решение задачи об освещаемости билиардных областей  $Q$ , но и всюду плотность типичных траекторий в соответствующих фазовых пространствах  $M$ . Последнее означает, что типичная траектория билиарда не только проходит через каждую (малую) открытую подобласть билиардного стола  $Q$ , но она пересекает эту подобласть по всюду плотному множеству направлений.

### 3. БИЛИАРДЫ В ВЫСШИХ (БОЛЬШЕ ДВУХ) РАЗМЕРНОСТЯХ И АСТИГМАТИЗМ

Мы обратимся теперь к многомерным билиардам ( $d > 2$ ). Рассмотренный выше двумерный случай позволяет сразу указать, почему для билиардов Синая задача освещаемости (а также эргодичность, перемешивание и т. д.) была решена сразу для любой размерности, в то время как соответствующие вопросы для фокусирующих билиардов были открыты четверть века. (Отметим, что для рассеивающих билиардов с негладкой границей при  $d > 2$  возникают серьёзные, но чисто технические трудности при доказательстве их эргодичности [8, 7, 18]).

Действительно, вместо кривизны фронтов локальных пучков траекторий при  $d > 2$  приходится рассматривать соответствующие операторы кривизны (вторую квадратичную форму). Нетрудно видеть, что эти операторы для рассеивающих билиардов являются знакоопределёнными (положительно определёнными) вдоль всей (положительной по времени) траектории такого пучка, в то время как для билиардов в областях, где есть хотя бы одна фокусирующая компонента, это уже не так. Нет нужды специально подчёркивать, что положительно определённые операторы обычно много легче изучать, чем незнакоопределённые операторы. Эту проблему можно всё же, в какой-то мере, обойти, используя идею дефокусировки. Однако, существует препятствие, которое не обойдёшь, потому что это препятствие есть физическое явление — астигматизм.

Напомним, что механизм рассеяния является чисто количественным, в то время как механизм дефокусировки является качественным и количественным. Нам нужна не просто фокусировка, чтобы пучок успел дефокусироваться перед последующим отражением от границы, а достаточно сильная фокусировка

при (каждом!) отражении от границы. (Например, как мы уже знаем, круг не подходит.)

Астигматизм означает, что при отражении пучка лучей от фокусирующего зеркала сила фокусировки в разных плоскостях является различной. Более того, вдоль некоторых (на самом деле, непрерывного семейства) плоскостей фокусировка оказывается довольно слабой. Это обстоятельство несомненно препятствует действию механизма дефокусировки. Поэтому неудивительно, что были даже опубликованы некоторые работы, в которых ставилось под сомнение, что механизм дефокусировки может приводить к освещаемости областей с фокусирующей границей в высших ( $d > 2$ ) размерностях.

В этом параграфе мы объясним явление астигматизма, а также результаты недавних работ [15, 16, 17, 14], где было показано, что механизм дефокусировки работает и при  $d > 2$ .

Мы будем рассматривать только фокусирующие компоненты, являющиеся кусками сфер (сферические зеркала). Предположим, что узкий пучок лучей падает на такое зеркало. Рассмотрим его «центральный» луч  $x$ .

Динамика вблизи соответствующей бильярдной траектории может быть охарактеризована поведением второй фундаментальной формы локальной гиперповерхности  $W$  (фронта), ортогональной к потоку (рассматриваемому пучку траекторий). Матрицу этой квадратичной формы мы будем называть оператором кривизны и обозначать  $(Gx, x)$ .

Пусть  $n(q)$  — единичный вектор внутренней (т. е. направленной к центру сферы) нормали к сферическому зеркалу в точке  $q$ . Поскольку через луч  $x$  и центр сферы проходит единственная двумерная плоскость  $P$ , то из бильярдного закона отражения вытекает, что и отражённый луч будет лежать в плоскости  $P$ . (Это уже указывает на астигматизм — выделенность плоскости  $P$ .) Более того, легко видеть, что во всей серии последовательных отражений от сферического зеркала траектория луча  $x$  будет всё время находиться в плоскости  $P$  (рис. 11).

Рассмотрим  $(d - 1)$ -мерное касательное пространство  $U$  к фронту (гиперповерхности  $\tilde{U}$ ) в точке  $x$ . Плоскость  $P$  расщепляет  $U$  на два подпространства  $U = U_p \oplus U_t$ , где  $U_p = U \cap P$ , а  $U_t$  есть  $(d - 2)$ -мерное ортогональное дополнение к  $U_p$  в  $U$ .

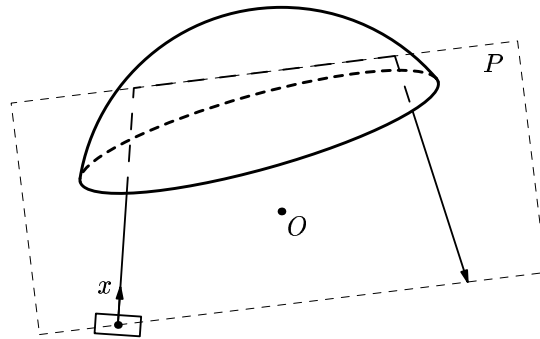


Рис. 11. Отражение луча от сферического зеркала

Мы приведём теперь формулы, дающие эволюцию оператора кривизны фронта. Поскольку в разные моменты времени операторы кривизны действуют в разных пространствах (касательных к соответствующим мгновенным фронтам), то нам придётся ввести и некоторые дополнительные операторы, переводящие эти пространства друг в друга [25].

Пусть  $V$  — изометричный оператор, отображающий плоскость  $T_-$ , касательную к фронту пучка в момент перед его отражением от границы  $\partial Q$ , в плоскость  $T_+$ , касательную к нему в момент после его отражения. Оператор  $V$  отображает  $T_-$  в  $T_+$  параллельно вектору нормали  $n(q)$  в точке отражения.  $V$  реализует необходимое вращение касательной гиперплоскости так, что  $T_+$  остаётся перпендикулярной вектору скорости. Аналогично,  $W$  — оператор, который отображает  $T_-$  на касательную к границе  $\partial Q$  в точке отражения гиперплоскость  $T_0$  вдоль направления, параллельного отражённому вектору скорости  $v_+$ , а  $W^*$  — сопряжённый оператор, отображающий  $T_0$  на  $T_+$ . Тем самым, оператор  $W$  преобразует оператор кривизны границы  $\partial Q$  в оператор, действующий в касательном пространстве к фронту.

Соответствующая формула имеет вид [25]:

$$G_+ = V^{-1}G_-V - 2(v_+, n(q))W^*KW, \quad (7)$$

где  $K$  — оператор кривизны границы  $\partial Q$  в точке отражения  $q$ . Соотношение (7) является многомерным аналогом формулы (4).

Формула для изменения кривизны фронта во время свободного (без отражений от границы) движения частицы выглядит проще и тоже полностью аналогична соответствующему соотношению (3) для двумерного случая. Она имеет вид:

$$G_t(y) = G_0(x)(1 + G_0(x))^{-1}, \quad (8)$$

где  $G_t(y)$  ( $G_0(x)$ ) — оператор кривизны, действующий на гиперплоскости  $U(y)$  ( $U(x)$ ), перпендикулярной направлению движения (вектору скорости), и  $y = S^t x$ .

Проиллюстрируем наглядно, что происходит с фронтом  $\tilde{U}$  пучка лучей при его отражении от границы. Фиксируем некоторое направление  $\ell$  в касательном пространстве  $U$  (рис. 12). Величина кривизны фронта  $\tilde{U}$  до отражения в

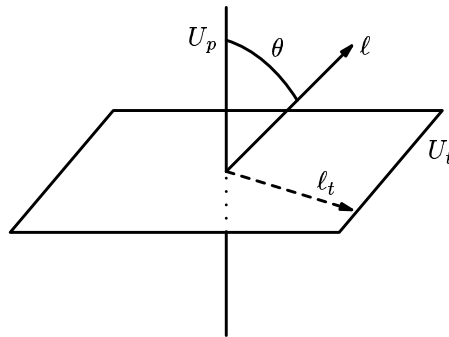


Рис. 12. Разложение касательного пространства

направлении  $\ell$  равна  $(G_- \ell, \ell)$ . Для того, чтобы получить аналогичное выражение для кривизны фронта после отражения в направлении  $\ell$ , т. е.  $(G_+ \ell, \ell)$ , напишем очевидное соотношение

$$\ell = \ell_p \cos \theta + \ell_t \sin \theta, \quad (9)$$

где  $\theta$  — угол между  $\ell$  и  $U_p$ , а  $\ell_p, \ell_t$  — (нормализованные) проекции  $\ell$  соответственно на  $U_p$  и  $U_t$ . Тогда изменение кривизны фронта (вдоль направления  $\ell$ ) после отражения равно

$$\kappa_+ - \kappa_- = \cos^2 \theta \left( \frac{2}{r \cos \theta} \right) + \sin^2 \theta \left( \frac{2 \cos \theta}{r} \right), \quad (10)$$

где  $r$  — радиус нашего сферического зеркала.

Формула (10) в качестве специального случая ( $\theta = 0$ ) даёт формулу (4). Это естественно, поскольку, как уже отмечалось, при отражении от сферического зеркала (изнутри!), падающий и отражённый лучи лежат в одной плоскости.

Однако для кривизны вдоль ортогонального к направлению распространения луча пространства вместо формулы (4) мы имеем

$$\kappa_+^\perp - \kappa_-^\perp = 2k \cos \varphi, \quad (11)$$

где  $k = 1/r$ .

Формула (11) показывает, что изменение кривизны фронта после отражения оказывается существенно различным вдоль разных направлений (астигматизм). При этом фокусировка оказывается (см. (11)) весьма слабой по некоторым направлениям. Это обстоятельство приводит к идее, что механизм дефокусировки не работает в размерностях  $d > 2$ . Действительно, этот механизм требует, чтобы между каждыми двумя последовательными отражениями в любой как угодно длинной серии последовательных (существенных!) отражений от границы  $\partial Q$  (здесь предполагается, что  $\partial Q$  не содержит рассеивающих компонент) имеет место ситуация, изображённая на рис. 7d) и рис. 10. (Как обычно, предполагается, что начальным, *фиксированным для каждой точки*  $x \in M$  куском траектории можно пренебречь.) Но из формул (10), (11) сразу следует, что для отражений от границы с как угодно большим номером пучок может стать сходящимся, но кривизна его фронта при этом может быть сколь угодно малой (рис. 13). Тогда, если эта кривизна меньше диаметра бильярдного стола  $Q$ , то пучок не успеет пройти через фокус (сопряжённую точку) до следующего отражения от границы. Тем самым, механизм дефокусировки разрушается.

Таково и было «общественное мнение» в течение многих лет. Однако, в работах [15, 16, 17, 14] было показано, что снова, как и за 25 лет до этого [1] «общественное мнение» оказалось неправильным. (Под «общественным мнением» мы

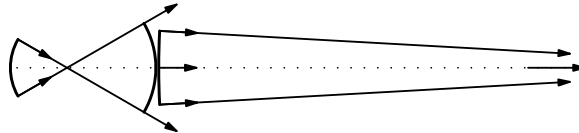


Рис. 13. Возможное нарушение механизма дефокусировки

здесь имеем в виду не только мнение математиков, но и физиков, механиков, инженеров и т. д. Следует отметить, тем не менее, что мы никогда не интересовались мнением по этому вопросу философов, филологов и представителей других гуманитарных профессий).

Мы приведём здесь (в описательной форме) соответствующие результаты и дадим один конкретный пример области с фокусирующими и плоскими компонентами границы, удовлетворяющей требуемым условиям.

Предположим, что бильiardная область  $Q$  обладает следующими свойствами:

0. Бильiard в  $Q$  является нигде не рассеивающим, т. е. граница  $\partial Q$  не содержит рассеивающих компонент.
1. Все фокусирующие компоненты границы являются сферическими зеркалами (т. е. получаются в результате «отсекания» от  $(d - 1)$ -мерной сферы сферической шапочки некоторой  $(d - 1)$ -мерной гиперплоскостью).
2. Соответствующие сферические шапочки не очень велики, а именно, соответствующий (максимальный) внутренний угол не превосходит  $60^\circ$  (угол  $\gamma$  на рис. 14).
3. Дополнение каждой фокусирующей компоненты  $\partial Q$  до соответствующей полной сферы целиком лежит внутри  $Q$ .
4. Граница каждой фокусирующей компоненты  $\partial Q$  (сферической шапочки) принадлежит какой-то (одной!) плоской компоненте границы  $\partial Q$ .
5. Если плоская компонента границы  $(\partial Q)_i$  содержит границу какой-то сферической шапочки (фокусирующей компоненты  $\partial Q$ ), то все плоские компоненты  $\partial Q$ , пересекающиеся с  $(\partial Q)_i$ , должны быть перпендикулярны гиперплоскости, содержащей  $(\partial Q)_i$ .
6. Мера множества траекторий, которые отражаются только от плоских компонент границы, равна нулю.

На рис. 14 изображена бильiardная область, которую естественно назвать многомерным стадионом из-за её аналогии стадиону (рис. 5с). Эта область состоит из куба, к противоположным граням которого приторочены сферические шапочки. (Если взять стадион (рис. 5с) и вращать его вокруг его большой оси, то бильiard в получившейся трёхмерной области не будет эргодическим. Нетрудно видеть, что в этом бильiarде есть первый интеграл (инвариантная функция,

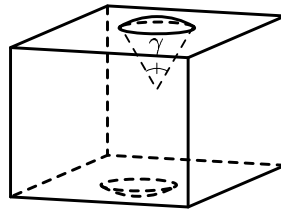


Рис. 14. Многомерный стадион



называемая в механике моментом). Эту (непрерывную!) симметрию надо разрушить. Взяв куб (вместо цилиндра), соединяющий сферические шапочки, мы и разрушаем её.)

В работах [15, 16, 17] рассматриваются существенно более общие области, бильярды в которых являются эргодическими, перемешивающими и являются бернуллиевскими системами. В статье [14] эти результаты обобщены для областей, границы которых могут включать не только фокусирующие и нейтральные, но и рассеивающие компоненты.

Мы не приводим здесь доказательств, отсылая к соответствующим статьям. Отметим только, что условие 2 (относительная «малость» фокусирующих компонент) — это цена, заплаченная астигматизму. Действительно, в двумерном случае фокусирующие компоненты эргодического бильярда могут быть сколь угодно близки к полным окружностям (рис. 5а).

#### 4. УСЛОВИЯ ЭРГОДИЧНОСТИ БИЛЛИАРДОВ И АБСОЛЮТНО ФОКУСИРУЮЩИЕ ЗЕРКАЛА

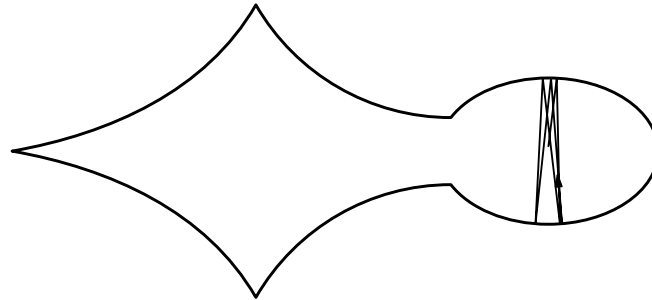
Естественно поставить общий вопрос: каким общим свойством должна обладать граница бильярдного стола  $Q$  для того, чтобы бильярд в  $Q$  был эргодичен?

Как мы уже отмечали, эргодичность влечёт не только положительное решение задачи освещаемости области  $Q$ , но и гораздо более сильные свойства.

В работах [11, 12] были сформулированы соответствующие условия и доказана теорема об эргодичности для двумерного случая.

Основным при этом оказывается вопрос о том, какие фокусирующие зеркала могут служить компонентами границы эргодического бильярда. Ясно, что не все фокусирующие зеркала могут быть использованы. Например, если фокусирующее зеркало представляет собой часть эллипса, содержит концы его малой полуоси и больше полуэллипса. Тогда, как хорошо известно, любой луч, стартующий вблизи этой полуоси, навечно остаётся в её окрестности (рис. 15).

Оказывается [12], что каждая фокусирующая компонента границы эргодического бильярда должна быть абсолютно фокусирующей. Как уже было объяснено во введении, фокусирующая компонента (кривая) является абсолютно фо-



**Рис. 15.** Островок устойчивости «внутри» фокусирующей компоненты

кусирующей, если любой падающий на неё луч фокусируется после последнего отражения в серии последовательных отражений от этой компоненты. Эквивалентно, любой плоский пучок траекторий, падающий на абсолютно фокусирующее зеркало, должен фокусироваться после последнего отражения в этой серии (рис. 6).

Примером фокусирующей, но не абсолютно фокусирующей кривой может служить полуэллипс (содержащий концы его малой полуоси), если отношение длин его осей больше  $\sqrt{2}$  (см. [21, 13]; работа [13] содержит элементарное доказательство этого факта).

В многомерном случае понятие абсолютно фокусирующего зеркала определяется аналогично. В работах [15, 16, 17, 14] был сделан только первый шаг к определению общих условий, при которых билиарды на многомерных билиардных столах ( $\dim Q > 2$ ), имеющие компоненты границы всех трёх типов (плоские, рассеивающие и фокусирующие), являются эргодическими. Наша гипотеза состоит в том, что и при  $d > 2$  каждая фокусирующая компонента границы эргодического билиарда должна быть абсолютно фокусирующей, как и в двумерном случае.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Бунимович Л. А.* Об эргодических свойствах некоторых билиардов // Функ. ан. и прил., 1974. Т. 8. С. 254–255.
- [2] *Бунимович Л. А.* О билиардах, близких к рассеивающим // Матем. Сб., 1974. Т. 94. С. 49–73.
- [3] *Бунимович Л. А., Синай Я. Г.* Об основной теореме теории рассеивающих билиардов // Матем. Сб., 1972. Т. 90. С. 415–431.
- [4] *Гальперин Г. А., Земляков А. Н.* Математические билиарды. М.: Наука, 1990.
- [5] *Корнфельд И., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
- [6] *Синай Я. Г.* Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих билиардов // УМН, 1970. Т. 25. Вып. 2. С. 141–192.
- [7] *Синай Я. Г., Чернов Н. И.* Эргодические свойства некоторых систем двумерных дисков и трёхмерных шаров // УМН, 1987. Т. 42. С. 181–207.
- [8] *Чернов Н. И.* Построение трансверсальных слоёв в многомерных полурассеивающих билиардах // Функ. ан. и прил., 1982. Т. 16. С. 35–46.
- [9] *Bunimovich L. A.* On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards // Comm. Math. Phys., 1979. Vol. 65. P. 295–312.
- [10] *Bunimovich L. A.* Many-dimensional nowhere dispersing billiards with chaotic behavior // Physica D, 1988. Vol. 33. P. 58–64.
- [11] *Bunimovich L. A.* A theorem on ergodicity of two-dimensional hyperbolic billiards // Comm. Math. Phys., 1990. Vol. 130. P. 599–621.

- [12] *Bunimovich L. A.* Conditions of stochasticity of two-dimensional billiards // *Chaos*, 1991. Vol. 1. P. 187–193.
- [13] *Bunimovich L. A.* On absolutely focusing mirrors // *Ergodic Theory and Related Topics* (eds. U. Krengel et al.). N.-Y.: Springer-Verlag, 1992. P. 62–82. (Lect. Notes Math., vol. 1514)
- [14] *Bunimovich L. A.* Hyperbolicity and astigmatism // *J. Stat. Phys.* To be published.
- [15] *Bunimovich L. A., Rehacek J.* Nowhere dispersing 3D billiards with non-vanishing Lyapunov exponents // *Comm. Math. Phys.*, 1997. Vol. 189. P. 729–757.
- [16] *Bunimovich L. A., Rehacek J.* How high-dimensional stadia look like // *Comm. Math. Phys.*, 1998. Vol. 197. P. 277–301.
- [17] *Bunimovich L. A., Rehacek J.* On the ergodicity of many-dimensional focusing billiards // *Annales Inst. H. Poincaré*, 1998. Vol. 68. P. 421–448.
- [18] *Burago D., Kononenko A., Ferleger S.* Uniform estimates on the number of collisions in semi-dispersing billiards // *Annals of Mathematics*, 1998. V. 147. P. 695–708.
- [19] *Chirikov B. V., Izrailev F. M., Shepelyansky D. I.* Dynamical stochasticity in classical and quantum mechanics // *Sov. Sci. Rev.*, 1981. Vol. 2. P. 209–267.
- [20] *Coddington H.* *Treatise on reflection and refraction of light.* London: Simpkin & Marshall, 1829.
- [21] *Donnay V. J.* Using integrability to produce chaos: billiards with positive entropy // *Comm. Math. Phys.*, 1991. Vol. 141. P. 225–257.
- [22] *Galavotti G., Ornstein D.* Billiards and Bernoulli schemes // *Comm. Math. Phys.*, 1974. Vol. 38. P. 83–101.
- [23] *Halpern B.* Strange billiard tables // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1977. Vol. 46. P. 297–305.
- [24] *Markarian R.* Billiards with Pesin region of measure one // *Comm. Math. Phys.*, 1988. Vol. 118. P. 87–97.
- [25] *Sinai Ya. G.* Development of Krylov's ideas // *Krylov N. S. Works on the foundations of statistical physics.* Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1979. P. 239–281.
- [26] *Wojtkowski M. P.* Principles for the design of billiards with non-vanishing Lyapunov exponents // *Comm. Math. Phys.*, 1986. Vol. 105. P. 391–414.