Сколько есть периодических траекторий у трехмерного биллиарда?

Ф. С. Дужин

Изучение замкнутых (периодических) траекторий биллиардов встречается в ряде математических задач. Например, замкнутые траектории биллиардов связаны с собственными значениями оператора Лапласа на соответствующей области, отвечающими за частоты звучания мембраны, имеющей форму рассматриваемого биллиарда. Первым, кто занимался оценками количества периодических траекторий гладких биллиардов, был американский математик Джордж Биркгоф. Он рассматривал следующую задачу. Пусть на плоскости дана выпуклая область с гладкой границей. Внутри области движется биллиардный шар, отражаясь от ее границы по закону «угол падения равен углу отражения». Некоторые траектории движения шара могут быть периодическими: после p отражений он снова полетит по своему маршруту. Вопрос: какое может быть минимальное количество p–периодических траекторий?

Дж. Биркгоф доказал, что для простого $p > 2$ существует по крайней мере $p - 1$ геометрически различных p-периодических траекторий. Можно показать, что эта оценка точна: для любого простого $p > 2$ существует такая выпуклая область, для которой количество p-периодических траекторий в точности равно $p - 1$.

Возникает вопрос: а что будет в трехмерном пространстве? Пусть в пространстве имеется выпуклая область с гладкой границей, внутри которой по описанному правилу движется шар. Предположим для простоты, что мы интересуемся только 3-периодическими траекториями. Можно показать, что таких геометрически различных траекторий имеется по крайней мере 4. (Строго говоря, это утверждение имеет место для области общего положения. Для областей специального вида некоторые из траекторий могут сливаться.) Доказательство основано на методах, связанных с теорией Морса.

Спрашивается: является ли эта оценка точной? Существует ли область в пространстве, для которой имеется ровно 4 периодические траектории периода 3? Если нет, то каково минимально возможное количество таких траекторий? Эти вопросы (и, конечно, аналогичные им для любого p) остаются открытыми.