Игра Ричмана

Е. Горский В. Гуровиц И. Межиров Е. Осьмова

Эта статья написана по материалам летней конференции Турнира Городов 2000 года. На этих конференциях школьникам предлагается для решения несколько циклов задач исследовательского характера. На последней конференции самым популярным оказался цикл задач, посвященный различным вариантам игры Ричмана, о которой пойдет речь ниже. Задач в этом цикле было предложено очень много. Здесь обсуждается только часть затронутых на конференции вопросов. Заинтересованный читатель может найти дополнительную информацию в электронном архиве конференции [1].

Среди многообразия математических игр можно выделить два широких класса. К одному из них (к так называемым *комбинаторным* играм) относятся наиболее распространенные игры: шашки, шахматы, ним... В этих играх возможно лишь конечное число позиций, в каждой из которых игрок имеет конечное число возможных ходов. Исход такой игры не зависит от случая, вся информация, известная одному игроку, известна и другому.

Игры из второго класса (так называемые *матричные* или *вероятностные* игры) в основном имеют отношение к реальным (например, стратегическим) приложениям теории игр, оперирующим не с дискретными, а с непрерывными объектами. В них ход игрока не предопределен позицией, а в большой мере произволен (например, «камень-ножницы-бумага»).

Однако игру, которую мы рассматриваем в данной статье, сложно отнести к одному из этих двух классов. Она носит название «игра Ричмана» в честь математика, который ее изобрел.[1)]

1. Правила игры

В классической версии этой игры игроков двое: они условно называются Синим и Красным. В качестве игрового поля берется произвольный ориентированный граф, одна из вершин которого отмечается синим цветом (далее она будет обозначаться b), а другая — красным (соответственно, r), причем из любой вершины ведет ориентированный путь хотя бы в одну из выделенных вершин. Остальные вершины графа мы будем называть черными.

В начале игры в некоторой вершине графа находится фишка, а игроки имеют некоторые начальные капиталы, равные, соответственно, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{R}$ условных единиц (можно считать, что $\mathbf{B} + \mathbf{R} = 1$). Каждый игрок делает неотрицательную ставку, не превосходящую его капитала (ставки делаются одновременно и

[1)] Дэвид Росс Ричман (1956–1991) — известный американский математик, работавший в основном в комбинаторных областях: теории графов, теории игр. Трагически погиб в авиакатастрофе.

в тайне от соперника: «закрытый аукцион»). Сделавший бо́льшую ставку получает право сдвинуть фишку по ребру графа, соблюдая ориентацию. Взамен он должен отдать противнику сумму, равную своей ставке. Если ставки совпали по величине, то победитель определяется жребием, но деньги все равно передаются.

Если игрок смог привести фишку в вершину своего цвета, то он выигрывает. Иначе игра продолжается бесконечно, и считается, что она закончилась вничью. Наша цель состоит в том, чтобы определить, при каких начальных условиях игроки имеют беспроигрышную или выигрышную стратегию.

2. Примеры

Априори не ясно, почему при каких-то начальных условиях у кого-то из игроков вообще есть выигрышная стратегия. Рассмотрим несколько конкретных примеров.

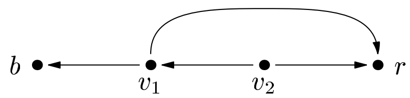

Рис. 1.

Если начальная вершина — v_1, а денег у игроков поровну, то оба ставят «ва-банк» (ставят весь свой капитал), и исход игры решает монетка, т. е. беспроигрышной стратегии нет ни у одного из игроков. В любом другом случае, обладающий большим капиталом, ставит весь свой капитал и выигрывает игру. Итак, при $\mathbf{B} > 0{,}5$ Синий имеет выигрышную стратегию, при $\mathbf{B} < 0{,}5$ выигрышную стратегию имеет Красный (из дальнейшего будет ясно, почему удобно записывать условие именно в такой форме).

Пусть фишка стоит в вершине v_2, а начальный капитал Синего равном 0,7 у. е. Тогда выигрышную стратегию имеет Красный игрок: первым ходом он ставит 0,3. Если Синий ставит меньше, то он сразу проигрывает игру. Если же он ставит не меньше 0,3, то он выигрывает право хода, двигает фишку в соседнюю черную вершину, но у него остается не больше 0,4 у. е., а у противника, соответственно, не меньше 0,6, и Красный, ставя ва-банк, выигрывает аукцион и всю игру в целом.

При другом капитале (и начальной вершине v_2) Синий игрок, чтобы выиграть первый аукцион, должен поставить не меньше $\mathbf{R} = 1 - \mathbf{B}$, что уменьшит его капитал по меньшей мере до $2\mathbf{B} - 1$. Тогда $2\mathbf{B} - 1 > 0{,}5$ (так как он должен выиграть, находясь в вершине v_1), откуда $\mathbf{B} > 0{,}75$. Итак, при $\mathbf{B} > 0{,}75$ выигрышную стратегию имеет Синий, при $\mathbf{B} < 0{,}75$ — Красный.

Рассмотрим более сложный граф (рис. 2).

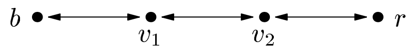

Рис. 2.

Исследуем, кто выигрывает при начальной вершине v_1 в зависимости от начального капитала Синего игрока $\mathbf{B}$. Наилучшая первая ставка Синего — $\mathbf{B}$ (так как в этом случае он либо сразу выигрывает, либо гарантированно получает от противника наибольшую возможную сумму). Если Красный поставит меньше, то Синий сразу выиграет всю игру. Иначе Синий получит от него по крайней мере $\mathbf{B}$, т.е. капитал у него станет больше чем $2\mathbf{B}$, и фишка сдвинется в вершину v_2. Во избежание проигрыша Синий обязан поставить больше текущего капитала Красного, т.е. $1 - 2\mathbf{B} + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Фишка вернется на исходную позицию, а у Синего останется больше $2\mathbf{B} - 1 + 2\mathbf{B} - \varepsilon = 4\mathbf{B} - 1 - \varepsilon$ у. е. Итак, за один цикл $\mathbf{B}$ превращается по крайней мере в $4\mathbf{B} - 1 - \varepsilon$. Если $\mathbf{B} < \frac{1}{3}$, то изменение капитала, равное $3\mathbf{B} - 1 - \varepsilon$, отрицательно и тем меньше, чем меньше $\mathbf{B}$. Сделав много таких циклов, Красный может уменьшить капитал Синего сколь угодно сильно, в частности, настолько, чтобы в некоторый момент в точке v_2 тот имел капитал, меньший 0,5, т.е. Красный смог бы выиграть. Аналогично, если $\mathbf{B} > \frac{1}{3}$, то при подходящем ε капитал Синего будет увеличиваться, что позволит ему в какой-то момент поставить больше противника, когда фишка окажется в вершине v_1, т.е. выиграть партию. Итак, при правильной игре при $\mathbf{B} > \frac{1}{3}$ выигрывает Синий, при $\mathbf{B} < \frac{1}{3}$ — Красный.

Из приведенных примеров видно, что для заданной начальной вершины v графа удается подобрать такое число (назовем его $R(v)$), что при начальном капитале Синего $\mathbf{B} > R(v)$ он имеет выигрышную стратегию, а при $\mathbf{B} < R(v)$ выигрышную стратегию имеет Красный. Это утверждение оказывается верным и в общем случае. Ниже мы докажем его.

3. Основные теоремы

Пусть $U(v)$ — множество последователей данной вершины v (т. е. тех вершин, куда ведет ребро из v). Назовем числовую функцию $R(v)$ на графе *функцией Ричмана*, если она удовлетворяет следующим соотношениям:

$$R(r) = 1, \qquad R(b) = 0, \qquad R(v) = \frac{\min\limits_{w \in U(v)} R(w) + \max\limits_{w \in U(v)} R(w)}{2} \quad \text{для } v \neq b, r.$$

Мы не случайно использовали вновь обозначение $R(v)$. Основным результатом классической теории Ричмана как раз и является доказательство эквивалентности этих определений для $R(v)$, к которому мы сейчас переходим.

Лемма 1. *Пусть $R(v)$ — функция Ричмана данного графа, $\mathbf{B} > R(v_0)$. Тогда Синий, начиная игру с вершины v_0, имеет беспроигрышную стратегию.*

Доказательство. Докажем, что Синий может играть так, что в любой момент его текущий капитал будет превосходить значение функции Ричмана в текущей вершине. Пусть в какой-то момент фишка находится в вершине v, а Синий имеет капитал $\mathbf{B} > R(v)$. Тогда он должен сделать ставку

$$s = \frac{\max\limits_{w \in U(v)} R(w) - \min\limits_{w \in U(v)} R(w)}{2}.$$

Исходя из определения функции Ричмана, получим, что

$$R(v)+s=\max_{w\in U(v)} R(w)$$

и

$$R(v)-s=\min_{w\in U(v)} R(w).$$

Если аукцион выиграет Синий, то, передвинув фишку в вершину с наименьшим значением функции Ричмана среди последователей вершины v, он обеспечит выполнение условия $\mathbf{B}>R(v)$, так как $\mathbf{B}-s>\min\limits_{w\in U(v)} R(w)$. Если же аукцион выиграет Красный, то, куда бы он ни передвинул фишку, значение функции Ричмана в новой вершине не превзойдет $\max\limits_{w\in U(v)} R(w)$ (так как $\mathbf{B}+s>$ max $limits_{w\in U(v)} R(w)$), поэтому условие $\mathbf{B}>R(v)$ сохранится и в этом случае.

Итак, у Синего есть стратегия, которая гарантирует выполнение условия $\mathbf{B}>R(v)$. Но так как $R(r)=1$, а $\mathbf{B}\leqslant 1$, то фишка не сможет попасть в красную вершину, а это и означает, что у Синего есть беспроигрышная стратегия.

Замечание 1. Если наименьшее значение функции Ричмана достигается в нескольких последователях, то описанная выше стратегия неоднозначна. Лемма 1 верна при произвольном выборе последователя с минимальным значением функции Ричмана.

Для дальнейшего удобно считать, что Синий выбирает такого последователя, который *ближе* к вершине b (длина кратчайшего пути меньше).

Эта лемма дала бы нам возможность проанализировать игру, если бы мы могли в явном виде построить хотя бы одну функцию Ричмана для данного графа.

Пусть $M_b(v)$ и $M_r(v)$ — множества таких $\mathbf{B}$, что беспроигрышную стратегию при начальной вершине v и начальном капитале Синего $\mathbf{B}$ имеют соответственно Синий и Красный. Пусть $I(v)=\inf M_b(v)$, $S(v)=\sup M_r(v)$.

Лемма 2. *$I(v)$ и $S(v)$ — функции Ричмана данного графа.*

Доказательство. Пусть Синий имеет беспроигрышную стратегию. Пусть в какой-то момент фишка находилась в вершине v, а капитал Синего был равен $\mathbf{B}$. Пусть ставка Синего равна s. Если Синий выиграет аукцион, то его новый капитал должен быть не меньше минимально возможного нового значения I:

$$\mathbf{B}-s\geqslant\min_{w\in U(v)} I(w),$$

$$s\leqslant\mathbf{B}-\min_{w\in U(v)} I(w). \tag{1}$$

С другой стороны, если у Красного недостаточно денег, чтобы перекупить ставку, то $\mathbf{R}<s$, откуда

$$s>1-\mathbf{B}, \tag{2}$$

а иначе он сможет сдвинуть фишку в худшем случае в вершину с наибольшей $I(v)$:

$$\mathbf{B}+s\geqslant\max_{w\in U(v)} I(w),$$

т. е.

$$s \geqslant \max_{w\in U(v)} I(w) - \mathbf{B}. \qquad (3)$$

Итак, у Синего будет беспроигрышная стратегия тогда и только тогда, когда найдется такое s, что выполняется (1) и либо (2), либо (3). Так как (3) следует из (2) (так как $I(v) \leqslant 1$), то необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbf{B} - \min_{w\in U(v)} I(w) \geqslant \max_{w\in U(v)} I(w) - \mathbf{B},$$

откуда

$$\mathbf{B} \geqslant \frac{\min\limits_{w\in U(v)} I(w) + \max\limits_{w\in U(v)} I(w)}{2}.$$

Полученное неравенство вместе с определением $I(v) = \inf M_b(v)$ приводит к равенству

$$I(v) = \frac{\min\limits_{w\in U(v)} I(w) + \max\limits_{w\in U(v)} I(w)}{2}.$$

Ясно, что $R(b) = 0$ (уже находясь в b, Синий выигрывает), $R(r) = 1$ (находясь в r, он проигрывает), т. е. $I(v)$ — действительно функция Ричмана данного графа.

Аналогично и $S(v)$ — функция Ричмана, т. е. согласно лемме 1, если $\mathbf{B} > S(v)$, то Синий имеет беспроигрышную стратегию, а значит, по определению $S(v) \geqslant I(v)$.

Лемма 1 не дает гарантий того, что игра не будет продолжаться бесконечно: она гарантирует одному из игроков не выигрышную, а лишь беспроигрышную стратегию. Вопрос о выигрышной стратегии решает следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть $R(v)$ — функция Ричмана данного графа, начальная вершина — v_0, $\mathbf{B} > R(v_0)$. Тогда Синий имеет выигрышную стратегию.*

Доказательство. Пусть d — наибольшая длина ориентированного пути из произвольной вершины графа в b, $\varepsilon = \dfrac{\mathbf{B} - R(v_0)}{2^{d+1}}$. Синий будет действовать согласно беспроигрышной стратегии из леммы 1, но прибавляя к своим ставкам с каждым разом все больший добавок: ε, 2ε, 4ε, $\ldots$, до тех пор, пока его не перекупит Красный. Пока аукцион выигрывает Синий, после каждого его хода уменьшается значение функции Ричмана или расстояние до вершины b. Так что Синий будет двигаться по некоторому ориентированному пути в b, поэтому Красный обязан будет в какой-то момент перекупить его ставку. Пусть в этот момент прибавок был равен $2^k\varepsilon$. Тогда всего Красный получил от Синего $\varepsilon \times (1+2+4+8+\ldots+2^{k-1}) = (2^k-1)\varepsilon$, т. е. в итоге Синий получит прибыль ε. Итак, действуя таким образом, Синий на каждой перекупке Красного будет получать одну и ту же прибыль, т. е. капитал Красного будет неограниченно падать. Так как это не может продолжаться до бесконечности, то в какой-то момент Красный уже не сможет перекупить ставку, т. е. Синий сможет довести фишку до b и выиграть. Итак, у Синего есть выигрышная стратегия.

Так как $I(v)$ — функция Ричмана, то при начальном капитале Синего, большем $I(v)$, Красный игрок не может иметь беспроигрышной стратегии, т. е. $S(v) \leqslant I(v)$, и, значит, $S(v) = I(v)$. Кроме того, если задана какая–то функция

Ричмана $R(v)$ на графе, то $1 - R(v)$ — «функция Ричмана для Красного игрока», т. е. аналогично лемме 3, при $\mathbf{R} > 1 - R(v)$ (т. е. $\mathbf{B} < R(v)$) Красный имеет выигрышную стратегию, а при $\mathbf{B} > R(v)$ Синий имеет выигрышную стратегию, т. е. $R(v) = I(v) = S(v)$.

Остался неисследованным случай $\mathbf{B} = R(v)$. Но в нем динамика игры понятна, исходя из сказанного выше: игроки должны ставить ровно ту сумму, которая им предписывается беспроигрышной стратегией. Если один из игроков поставит больше или меньше, то его противник превысит свою функцию Ричмана, т. е. сможет выиграть. Поэтому исход каждого аукциона будет определяться броском монеты, т. е. ни у одного из игроков нет выигрышной стратегии.

Итак, получен основной результат классической теории Ричмана: *функция Ричмана $R(v)$ существует и единственна; при $\mathbf{B} > R(v)$ Синий имеет выигрышную стратегию, при $\mathbf{B} < R(v)$ ее имеет Красный, при $\mathbf{B} = R(v)$ ни один из игроков не имеет даже беспроигрышной стратегии.*

Классическая игра Ричмана допускает различные обобщения: можно сделать информацию о противнике неполной (например, игрок не будет знать начального капитала противника), добавить третьего игрока и так далее.

4. Игра Ричмана с неполной информацией

Предположим, что Синий не знает начального капитала противника, но знает, что его относительный капитал достаточно велик, что $\dfrac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}+\mathbf{R}} > R(v)$ (т. е. он бы смог гарантированно выиграть, зная ставку противника). Докажем, что и в этом случае у него есть беспроигрышная стратегия. Синий игрок должен считать, что капитал Красного равен $R_0 = \dfrac{\mathbf{B}}{R(v)} - \mathbf{B}$ (т. е. больше, чем на самом деле). Исходя из этого, Синий может строить свою беспроигрышную стратегию, аналогично стратегии из леммы 1. Так как капитал Красного на самом деле еще меньше, то он не сможет помешать Синему, т. е. такая стратегия останется беспроигрышной и в этом случае.

Если игровое поле не имеет ориентированных циклов, то игра не сможет продолжаться бесконечно, и, так как Синий не сможет проиграть, то он выиграет.

В общем случае Синий также имеет стратегию, дающую вероятность выигрыша Синего, равную 1. Пусть он будет действовать согласно своей беспроигрышной стратегии, следя за тем, какие именно ставки делает Красный. Если ставка Красного в какой–то момент перестанет быть равной ставке Синего и будет отличаться от нее на ε, то Синий после этого хода будет твердо знать, что его относительный капитал превосходит $R(v)$ по меньшей мере на $\dfrac{\varepsilon}{\mathbf{B}+R_0} = \alpha$, что позволяет ему использовать выигрышную стратегию из леммы 3. Если же Красный всегда будет повторять ставку Синего, то каждый аукцион будет разрешаться бросанием монетки. Тогда очередность хода будет определяться случайно. Пусть N — наибольшая длина пути из произвольной вершины графа в b. Синему достаточно N раз подряд выиграть монетку, чтобы выиграть всю игру (так как он не может проиграть). Вероятность выигрыша на первой серии из N бросков равна $\dfrac{1}{2^N}$, т. е. вероятность проигрыша на одной серии равна

$1-\frac{1}{2^N}$, а на k сериях — $(1-\frac{1}{2^N})^k$, то есть вероятность проигрыша вообще равна $\lim\limits_{k\to\infty}(1-\frac{1}{2^N})^k=0$, т. е. Синий достоверно выигрывает. Итак, игра с неполной информацией устроена почти так же, как и классическая игра Ричмана.

5. О доказательстве существования и единственности функции Ричмана без использования игры Ричмана

Определим оператор Ричмана ρ как оператор, сопоставляющий каждому набору чисел M на вершинах графа другой набор чисел $\rho(M)$ такой, что для любой черной вершины v выполнено $\rho(M)(v)=(M_+(v)+M_-(v))/2$, где $M_+(v)$ и $M_-(v)$ — максимальное и минимальное среди значений M в потомках v (здесь и далее подразумевается, что на синей вершине всегда стоит 0, а на красной — 1). По определению, функция Ричмана — это неподвижная точка оператора Ричмана, т. е. такой набор чисел R, что $\rho(R)=R$.

Существование R сразу следует из топологических соображений. В самом деле, ρ — непрерывный оператор. Наборы чисел на вершинах графа можно рассматривать как точки многомерного куба. Тогда оператор ρ — непрерывное отображение многомерного куба в себя, а такое отображение по теореме Брауэра имеет неподвижную точку — функцию Ричмана.

Докажем единственность функции Ричмана. Во-первых, заметим, что из любой вершины можно прийти в синюю, переходя из некоторой вершины v только в такие вершины u, что $R(u)=R_-(v)$. Действительно, при таком переходе значение R в текущей вершине не возрастает, а из любой вершины v достаточно идти по некоторому пути в синюю, чтобы встретить вершину, из которой можно будет выйти в вершину со строго меньшим значением R. Далее, предположим наличие двух функций Ричмана — R^1 и R^2. Докажем, что $D=R^1-R^2$ неположительно. Пусть D принимает максимальное значение в вершине v. Тогда несложно убедиться, что если $R^i(u)=R^i_-(v)$ и u — потомок v, то $D(u)=D(v)$. Таким образом можно дойти до синей вершины и доказать, что $D(b)=D(v)$, откуда $D(v)=0$ и во всех вершинах D неположительно. Аналогично доказывается, что D неотрицательно, откуда $D=0$ и $R^1=R^2$.

6. Вероятностная интерпретация игры Ричмана

Наряду с классической, «денежной» игрой Ричмана существует также другая игра, приводящая к той же функции.

Как и в классической игре, поле игры — это ориентированный граф с двумя выделенными вершинами, цель Синего и Красного — привести фишку в вершину своего цвета. Однако очередность хода определяется подбрасыванием монеты.

Оказывается, что функция Ричмана $R(v)$ — это вероятность выигрыша Красного «при правильной игре», т. е. у Красного существует такая стратегия игры, что при любой игре Синего вероятность выигрыша Красного не меньше $R(v)$. С другой стороны, у Синего существует стратегия, гарантирующая ему вероятность выигрыша не меньше $1-R(v)$.

Поскольку исход игры от предыстории не зависит, стратегия должна указывать, куда делается ход из данной вершины, т.е. это функция $\mathcal{R}\colon V \to V$, сопоставляющая вершине одного из ее потомков[2)].

Пусть $R(v)$ — функция Ричмана для данного графа с отмеченными вершинами b и r. Тогда оптимальная стратегия Красного $\mathcal{R}^*$ состоит в том, чтобы из вершины v делать ход в вершину w, на которой достигается максимум $R(\cdot)$ среди всех потомков v (аналогично, оптимальная стратегия Синего состоит в выборе вершины с минимальным значением $R(v)$). Докажем это для оптимальной стратегии Синего, для оптимальной стратегии Красного — аналогично.

Прежде всего заметим, что вероятность того, что игра не закончится в k ходов, стремится к 0 при $k \to \infty$. В самом деле, для данного графа существует некоторое число d такое, что Красный, сделав d ходов подряд, выигрывает. Но вероятность выпадания серии из d одинаковых результатов после k подбрасываний монеты стремится с ростом k к 1.

Пусть Синий придерживается некоторой стратегии $\mathcal{B}$. Тогда для каждой вершины v определена вероятность $p^{\mathcal{R}^*,\mathcal{B}}(v)$ выигрыша Красного. Докажем, что $\Delta(v) = p^{\mathcal{R}^*,\mathcal{B}}(v) - R(v) \geqslant 0$. Действительно, из определения функции Ричмана следует, что

$$\Delta(v) \geqslant \frac{\Delta(\mathcal{R}^*(v)) + \Delta(\mathcal{B}(v))}{2},$$

а $\Delta(b) = \Delta(r) = 0$. Отсюда следует, что $\Delta(v) \geqslant 0$. Доказательство аналогично приведенному выше доказательству единственности функции Ричмана: возьмем минимум $\Delta(\cdot)$, для него неравенство, написанное выше, превращается в равенство, откуда следует, что на r функция Δ принимает минимальное значение.

Замечание 2. Мы ограничились анализом случая, когда Синий придерживается некоторой стратегии. Нетрудно видеть, что использованное выше неравенство не изменится, если предположить, что ход Синего зависит не только от вершины, но и от номера хода.

Рассмотрение вероятностной игры Ричмана позволяет сделать понятие стратегии игрока более простым, поскольку вместо двух решений — куда пойти и сколько поставить — игрок принимает лишь одно.

7. Алгоритм нахождения функции Ричмана для неориентированного графа

Существует интересный алгоритм, позволяющий быстро (за время, полиномиально ограниченное размером графа) находить функцию Ричмана для неориентированного графа (т. е. графа, у которого на всех ребрах стрелки двусторонние).

Дадим вначале его неформальное описание. Предположим, что имеется модель графа, сделанная из тяжелых шариков и ниток одинаковой длины. Разместим эту модель в вертикальной плоскости. Каждый шарик будет стремится

[2)] В теории игр рассматриваются и *смешанные* стратегии, когда игрок подбрасывает монетку для принятия решения. В данном случае смешанные стратегии не нужны — оптимальная стратегия оказывается *чистой*.

повиснуть примерно посередине между самым левым и самым правым своим соседом. Таким образом, горизонтальные координаты шариков примерно дают функцию Ричмана. Физически очевидно, что если самый левый и самый правый шарики, соответствующие синей и красной вершинам, оттянуть в разные стороны, то натянутся нитки по самому короткому пути между ними. Значит, можно ожидать, что на самом коротком пути между синей и красной вершиной функция Ричмана образует арифметическую прогрессию. Если постепенно удлинять нитки, образующие кратчайший путь (оставляя их натянутыми), то еще один путь в графе натянется. Продолжая удлинение ниток, можно узнать функцию Ричмана на всем графе.

Теперь опишем детали алгоритма более формально.

Алгоритм работает тактами, перед каждым тактом в части вершин значение функции Ричмана уже определено (такие вершины будем называть *пройденными*). Перед первым тактом пройденными вершинами будут только синяя и красная. За каждый такт работы алгоритм присоединяет к пройденным одну или несколько вершин. Таким образом, в конце работы алгоритма все вершины будут пройдены.

Опишем теперь такт работы алгоритма. Назовем ***наклоном*** некоторого пути от пройденной вершины к другой пройденной вершине, не содержащего промежуточных пройденных вершин, отношение разности известных алгоритму значений функции Ричмана на концах пути к количеству ребер в пути. Другими словами, наклон пути — это разность арифметической прогрессии, «натянутой» на его концы с заданными значениями. Алгоритм находит среди всех путей по непройденным вершинам, соединяющих две пройденные вершины, путь с максимальным наклоном. Для нахождения такого пути достаточно рассмотреть все кратчайшие пути между пройденными вершинами, поскольку от сокращения пути наклон только возрастает. Найдя путь с максимальным наклоном, алгоритм делает его промежуточные вершины пройденными, значения функции Ричмана в этих вершинах образуют арифметическую прогрессию вместе с уже известными значениями на концах пути.

Докажем по индукции корректность работы алгоритма. На 0-м шаге известные числа, 0 и 1, найдены, разумеется, правильно. Пусть перед каким-то тактом все известные алгоритму значения функции Ричмана найдены правильно; докажем, что на этом такте построенные алгоритмом значения также правильны.

Пусть $v_1 - v_2$ — ребро с максимальной разностью значений функции Ричмана в v_1 и v_2 среди всевозможных ребер с концами в непройденных вершинах v_1 и v_2. Предположим для определенности, что значение функции Ричмана в v_2 больше. Тогда v_2 — потомок v_1 с максимальным значением функции Ричмана среди всех потомков. Пусть v_0 — потомок v_1 с минимальным значением функции Ричмана. $R(v_1) = \frac{1}{2}(R(v_0) + R(v_2))$, откуда $R(v_1) - R(v_0) = R(v_2) - R(v_1)$. Аналогично, пусть v_{k+1} — сосед v_k с максимальным значением R, v_{k-1} — сосед v_k с минимальным значением. Последовательность обязательно придет в пройденную вершину и справа, и слева, потому что иначе бы последовательность $\ldots, R(v_{-1}), R(v_0), R(v_1), \ldots$ была бы бесконечной (может быть, только в одну сторону) арифметической прогрессией, что противоречит ограниченности R.

Будем считать, что построение последовательности в обе стороны обрывается на пройденных вершинах. Заметим, что $R(v_k) = \frac{1}{2}(R(v_{k-1}) + R(v_{k+1}))$, откуда $R(v_k) - R(v_{k-1}) = R(v_{k+1}) - R(v_k)$. Значит, последовательность $R(v_i)$ является конечной арифметической прогрессией с известными алгоритму концами. Осталось только заметить, что последовательность v_i — путь с наибольшим наклоном, поскольку его наклон равен длине ребра с самой большой разностью значений R на концах, а ни один путь не может иметь больший наклон. Тогда алгоритм выберет путь с точно таким же наклоном; но это возможно только в том случае, если значения R на этом пути образуют арифметическую прогрессию. Доказательство закончено.

Интересно, что этот алгоритм в некоторых случаях позволяет находить функцию Ричмана на бесконечном графе, заодно доказывая ее единственность (а для бесконечного графа функция Ричмана может быть не единственна!). Для этого необходимо найти способ отыскания кратчайших путей на заданном бесконечном графе, из которого выброшено конечное число вершин (конечно, такой способ не всегда существует). Например, для бесконечной квадратной сетки несложно описать требуемый способ. После этого алгоритм будет работать как обычно, хотя, конечно, в общем случае невозможно гарантировать, что для какой-то вершины алгоритм рано или поздно пройдет через нее.

Чтобы доказать правильность работы алгоритма в случае бесконечного графа, приведенное доказательство потребуется слегка изменить.

Предположим, что алгоритм на некотором шаге ошибся и значения R на выбранном им пути не образуют арифметической прогрессии. Тогда выбранный алгоритмом путь содержит ребро $v_1 - v_2$, для которого $R(v_2) - R(v_1)$ больше наклона пути, выбранного алгоритмом. Можно построить последовательность v_k аналогично приведенному выше построению. Заметим, что $R(v_k)$ при $k > 1$ — среднее арифметическое $R(v_{k+1})$ и чего-то еще, меньшего или равного $R(v_{k-1})$, откуда $R(v_{k+1}) - R(v_k)$ не меньше $R(v_k) - R(v_{k-1})$. Аналогичное рассуждение при $k < 2$ показывает, что $R(v_k) - R(v_{k-1})$ не меньше $R(v_{k+1}) - R(v_k)$. Значит, при всех допустимых k $R(v_{k+1}) - R(v_k)$ не меньше $R(v_2) - R(v_1)$. Поэтому наклон пути v_i больше наклона пути, построенного алгоритмом, что противоречит описанию алгоритма. Доказательство закончено.

8. Об алгоритмах нахождения функции Ричмана

В настоящее время не известно алгоритма для нахождения функции Ричмана, про который было бы доказано, что он заканчивает работу за полиномиальное от числа вершин графа время.

Простейший алгоритм поиска функции Ричмана — это перебор всевозможных перестановок n чисел (здесь и далее n — количество вершин графа, исключая синюю и красную). Каждая перестановка (a_i) соответствует предположению $R(v_{a_1}) \leqslant R(v_{a_2}) \leqslant \ldots \leqslant R(v_{a_n})$, где v_i — вершины графа. Чтобы в этом предположении найти R, достаточно заметить, что для каждой вершины ее потомок, в котором достигается максимальное (минимальное) значение, уже определился. Тогда определение функции Ричмана превращается в систему линейных уравнений вида

переменная = среднее арифметическое двух других переменных.

Решив ее, получим значения предполагаемой функции Ричмана. Нетрудно проверить, являются ли они в действительности нужными значениями. Если нет, предположение отбраковывается.

Этот алгоритм, как нетрудно видеть, работает за время $O(n!)$. Однако, известны алгоритмы, работающие за экспоненциальное время, т.е. значительно быстрее. Опишем идею одного из таких алгоритмов.

Рассмотрим на заданном графе некоторый набор чисел, M, например, нули (естественно, в красной вершине по-прежнему 1). Примем M за нулевое приближение к функции Ричмана. На каждом шаге будем переходить от полученного на данном шаге набора чисел N к следующему приближению $\rho(N)$.

Предположим, что текущее приближение задает такой же порядок на вершинах, что и значения функции Ричмана. Описанным выше способом можно это проверить, решив систему уравнений. Если найденное решение системы является функцией Ричмана, то работа закончена, иначе переходим к следующему шагу.

Нельзя не отметить одну тонкость, связанную с работой такого алгоритма. По набору чисел N, полученному на очередной итерации, для построения системы уравнений необходимо определить порядок вершин. Разумеется, если число в одной вершине меньше числа в другой, то и эта вершина будет стоять раньше в искомом порядке. Однако, может так случиться, что в нескольких вершинах значения будут одинаковыми. Как в таком случае определить их порядок?

Оказывается, что алгоритм работает корректно не при любом правиле упорядочения вершин с одинаковым значением N. Приведем пример правила, которое гарантирует корректность алгоритма. Для группы вершин с одинаковым значением N положим, что та из них «меньше», из которой кратчайший путь к вершинам с меньшим значением N короче, если же длина этих путей одинакова, то кто меньше — неважно.

Заметим, что не любой набор чисел годится в начальное приближение: необходимо, чтобы для любой вершины существовал путь в синюю вершину, на котором числа начального приближения убывают.

У описанной идеи есть огромное количество вариантов вычисления следующего приближения. К примеру, можно в качестве следующего приближения использовать полученное решение системы уравнений, а можно придать каждому числу скорость в направлении среднего арифметического минимума и максимума в потомках, а затем подождать до первого обгона одного числа другим. Можно также задействовать нестандартные игровые элементы, изменяющие саму функцию Ричмана, вроде разрешения Синему до подбрасывания монетки выбрать из нескольких возможных вариантов набор ребер, ведущих из текущей вершины, или устройства, с некоторой вероятностью перебрасывающее фишку из одной вершины в другую (главное — следить, чтобы вероятность ничьей была 0). Затем в ходе работы алгоритма нестандартные элементы постепенно исчезают, и игра превращается в обычную. К сожалению, про все подобные алгоритмы известно мало, иногда даже не известно доказательство окончания их работы.

9. Игра Ричмана для трех игроков

Добавление третьего игрока вносит качественные изменения в игру Ричмана, делая ее несводимой к классической игре.

Это направление исследовалось сравнительно мало. Существуют различные варианты правил игры для троих игроков. Третий игрок (далее мы будем называть его Зеленым) получает свою «конечную» вершину (g) и начальный капитал $\mathbf{G}$. (Как и в игре двух игроков предполагается, что из любой вершины графа есть путь, ведущий в вершины r, g, b.) По сути в игре меняется лишь алгоритм проведения аукциона. По одной из версий игрок, сделавший наибольшую ставку, отдает ее тому игроку, ставка которого вторая по величине; по другой — его ставка делится между остальными пропорционально их ставкам.

Здесь мы рассмотрим только первую версию правил. В качестве пространства финансовых состояний игроков используем равносторонний треугольник с вершинами $\mathbf{B}, \mathbf{R}$ и $\mathbf{G}$. Состояние игроков будет изображаться в нем точкой, расстояния от которой до сторон равны капиталам игроков, которым принадлежат вершины, противоположные этим сторонам.

Таким образом, начальные условия игры определяются начальной вершиной графа и точкой в треугольнике состояний. В отличие от случая двух игроков, могут существовать целые области в треугольнике состояний, в которых ни у одного из игроков нет беспроигрышной стратегии. Ниже мы приводим такой пример.

Начнем с нескольких предварительных замечаний общего характера.

Мы интересуемся лишь выигрышными или беспроигрышными стратегиями для одного из игроков, скажем, Синего. Тогда можно считать, что Красный и Зеленый действуют в коалиции. Рассматривая коалиционную игру, можно конечные вершины r и g отождествить (обозначать ее будем r). Будем называть такое преобразование графа *коалиционной заменой*. При этом нельзя забывать, что если ставки и Красного, и Зеленого больше по величине ставки Синего, то Красный передает свою ставку Зеленому (или наоборот).

Один из возможных вариантов стратегии для коалиции состоит в том, что один из коалиционеров делает все время нулевые ставки. Тогда игра будет эквивалентна обычной игре для двух игроков. Обозначим функцию Ричмана в этой игре через $R(v)$. Из классической теории Ричмана следует, что если $\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}+\mathbf{R}} < R(v)$ $(\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}+\mathbf{G}} < R(v))$, то Синий проигрывает. Есть и специфический для игры трех игроков случай: если $\mathbf{R} > 2\mathbf{B}$ и $\mathbf{G} > \mathbf{B}$, то у коалиции есть выигрышная стратегия. Красный и Зеленый ставят по $\mathbf{B}$, Синий не может их перекупить. Ставка переходит к Зеленому, у которого станет $\mathbf{B} + \mathbf{G} > 2\mathbf{B}$, а у Красного $\mathbf{R} - \mathbf{B} > \mathbf{B}$. Условие сохраняется, и коалиция бесплатно сделала ход. Действуя таким образом, коалиционеры могут без потерь суммарного капитала прийти в r и выиграть.

Рассмотрим теперь игру трех игроков на графе, изображенном на рисунке 3а) (начальная вершина отмечена). Области существования беспроигрышных (как выяснится, даже выигрышных) стратегий отмечены для каждого из игроков на рисунке 4. Из этого рисунка видно, что есть область (выпуклый пятиугольник) в которой ни у одного из игроков нет беспроигрышной стратегии.

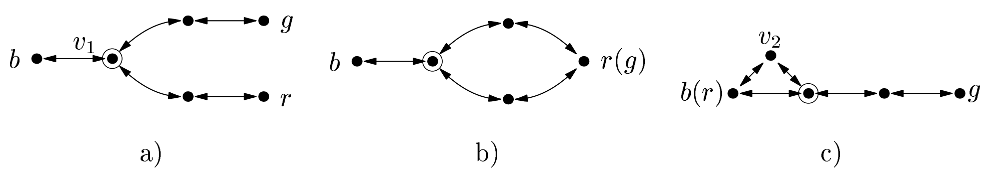

Рис. 3.

После коалиционных замен (отождествления конечных вершин коалиционеров) из него получаются графы на рисунках 3b) и 3c). Приводя их к случаю игры Синего против коалиции Красного и Зеленого, как описано выше, получаем в обоих случаях коалиционную игру на графе, изображенном на рисунке 2, но с разными начальными вершинами.

Рассмотрим эту игру (Синий против коалиции Красного и Зеленого на графе рисунка 2). Пусть начальная вершина — v_1. Из сказанного выше ясно, что если $\mathbf{R} > 2\mathbf{B}$ ($\mathbf{G} > 2\mathbf{B}$), то коалиция выигрывает (так как $R(v_1) = 1/3$). Далее, если $\mathbf{R} > \mathbf{B}$ и $\mathbf{G} > \mathbf{B}$, то коалиция тоже выигрывает: сначала Красный $\mathbf{B}$, а Зеленый — ничего. Тогда у Синего станет $2\mathbf{B}$, у Зеленого — $\mathbf{G} > \mathbf{B}$ и фишка передвинется, и, так как $R(v_2) = 2/3$, то Синий проиграет.

Предположим, что ни одно из этих условий не выполнено и ни одно из указанных неравенств не обращается в равенство, т. е. справедливы следующие условия: $\mathbf{R} < 2\mathbf{B}$, $\mathbf{G} < 2\mathbf{B}$, и $\mathbf{R} < \mathbf{B}$ или $\mathbf{G} < \mathbf{B}$ (невыпуклая область на рисунке 4). Тогда у Синего есть выигрышная стратегия. Первым ходом Синий ставит на аукцион весь свой капитал. Если его никто не перекупит, то он выиграет. Без ограничения общности считаем, что его перекупит Красный. Тогда $\mathbf{R} > \mathbf{B}$, откуда следует, что $\mathbf{G} < \mathbf{B}$. После сдвига фишки капиталы и Красного, и Зеленого стали меньше, чем $\mathbf{B}$. Теперь Синий подбирает $\varepsilon > 0$ так, чтобы $s = \max(\mathbf{R}_1, \mathbf{G}_1) + \varepsilon < \mathbf{B}$, где $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{G}_1$ — новые капиталы Красного и Синего соответственно, и делает ставку s. Он выиграет аукцион, сдвинет фишку и отдаст свою ставку одному из коалиционеров. Так как $s < \mathbf{B}$, то у него останется больше его начального капитала. Далее он ставит $2\mathbf{B} - s$. Перекупить его сможет лишь тот, кому он отдал деньги, а, значит после очередного сдвига фишки у Синего станет $4\mathbf{B} - 2s$, у одного из его противников капитал понизится, а у другого останется неизменным. Итого, капитал Синего повысится на $2\mathbf{B} - 2s$. Так как на следующем цикле ставка Синего не уменьшится, то его капитал бу-

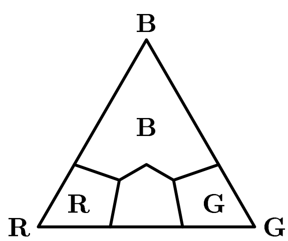

Рис. 4.

дет все быстрее расти, и в какой-то момент он сможет, находясь в вершине v_1, перекупить обоих противников.

Для начальной вершины v_2 аналогичным рассуждением доказывается, что для выигрыша Синего необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{B} > 2\mathbf{R}$ и $\mathbf{B} > 2\mathbf{G}$. Для исходного графа на рисунке 3а) получаем четырехугольные области, отмеченные на рисунке 4 буквами **R** и **G**.

Благодарности

Авторы благодарны М. Н. Вялому за предложение написать эту статью для «Математического просвещения»; А. Фроленкову за обсуждения; А. Акопяну за многочисленные обсуждения и полезные предложения. Авторы также хотят поблагодарить Н. Н. Константинова за замечательную идею летних конференций Турнира Городов.

Список литературы

[1] Материалы XII Летней Конференции Турнира Городов (электронная версия: `www.mccme.ru/olympiads/lktg`).

[2] *A. J. Lazarus, D. E. Loeb, J. G. Propp, D. Ullman* Richman games. Cambridge University Press, 1995.