Исправления к статье Д. Реповша и А. Скопенкова

Авторы опубликованной в прошлом номере статьи (Теория препятствий для начинающих // Математическое Просвещение, 2000. Сер. 3, №4. С. 154–180) прислали следующие уточнения и исправления:

1) Второй абзац на стр. 157 надо заменить на следующий:

Задача о гомотопической классификации непрерывных отображений — одна из важнейших в алгебраической топологии. Основная теорема топологии о гомотопической классификации непрерывных отображений $S^n \to S^n$ (т. е. «многомерных ветров») была доказана Хайнцем Хопфом в 1926 г. с использованием инварианта «степень», введенного Лейтзеном Эгбертом Яном Брауэром в 1911 г. В 1932 г. Хопф обобщил этот результат до классификации отображений n-полиэдра в S^n («по заказу» Павла Сергеевича Александрова). Приводимые здесь формулировка и доказательство теоремы Хопфа принадлежит Хасслеру Уитни (1937). Дальнейшее развитие теорема Хопфа – Уитни получила в работах Сэмюэля Эйленберга и Сондерса Маклейна (1940), Льва Семеновича Понтрягина (1941), Нормана Стинрода (1947), Джона Генри Константина Уайтхеда (1949) и Михаила Михайловича Постникова (1950).

2) В последнем абзаце доказательства теоремы Хопфа из §1 надо заменить «$\Gamma \in \mathbb{Z}^E$» на «$\Gamma \in \mathbb{Z}^V$».

3) В задаче 5.b из §1, 3-й строке снизу, надо убрать слово ‘эквивариантной’.

4) Первые три строки задачи 9 из §1 надо заменить на следующие:

9. (Теорема Понтрягина) Напомним, что $[S^3, S^2] \cong \mathbb{Z}$ (Хопф–Понтрягин–Фрейденталь, 1931–1938).

a) Для 3-полиэдра K и класса $\gamma \in H^2(K,\mathbb{Z})$ определите произведение $\cup : H^1(K,\mathbb{Z}) \times H^2(K,\mathbb{Z}) \to H^3(K,\mathbb{Z})$ и постройте биекцию $\deg^{-1}\gamma \to \dfrac{H^3(K,\mathbb{Z})}{H^1(K,\mathbb{Z}) \cup 2\gamma}$.

5) В задаче 9.b из §1 надо заменить «$f : K^{(3)} \to S^2$ на все K» на «$f|_{K^{(2)}} : K^{(2)} \to S^2$ на все K».

6) В задаче 10.a из §1 надо заменить «$f : K^{(n+1)} \to S^n$ на все K» на «$f|_{K^{(n)}} : K^{(n)} \to S^n$ на все K».

7) В теореме на с. 163 граф Δ и препятствие $v(\varphi) \in H_0(\Delta)$ определены только для *невырожденного* отображения φ, т. е. не отображающего ни один отрезок в точку.

8) В приведенной формулировке задачи 4.b и 4.c из §2 неверны. Верную формулировку см. в [3, §4].

Авторы приносят извинения за допущенные небрежности.

Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи. Ждем ваших писем (как с вновь предлагаемыми задачами, так и с решениями опубликованных задач).

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. В телесериале «Тайна Санты-Барбары» 15 действующих лиц. Серия называется *содержательной*, если в ней происходит одно из следующих событий. Либо кто-то узнает тайну, либо кто-то узнает, что кто-то знает тайну, либо кто-то узнает, что кто-то не знает тайну. Каково максимально возможное число содержательных серий? (тайна одна и первоначально ее не знает никто).

   (*С. В. Конягин*)

2. Али-Баба делит с разбойником 10 куч золотого песку. Али-Баба может в любой момент взять три кучи и уйти, либо он может выбрать 4 любые кучи и разделить каждую из куч на правую и левую часть. Разбойник образует из этих частей 4 новые кучи, объединяя каждую правую часть с одной из левых. Сможет ли Али-Баба унести с собой свыше 49 кг золотого песку, если всего было 50 кг?

   (*А. Я. Белов*)

3. $A_1, \ldots, A_n$ — ненулевые матрицы. Докажите, что найдется матрица B такая, что
   $$BA_1BA_2 \ldots BA_nB \neq 0.$$
   (*А. Я. Белов*)

4. Отрезок SP соединяет точку P на границе и фокус S эллипса. Точка R лежит на касательной к эллипсу в точке P (достаточно близко к P в направлении приближения к фокусу S). Параллельная SP прямая, проходящая через R, пересекает эллипс первый раз в точке Q. Точка T — основание

перпендикуляра, опущенного из R на отрезок SP. Найдите

$$\lim_{Q\to P}\frac{QT^2}{RQ}\,.$$

Длины полуосей a, b эллипса считать известными. *(А. Сендеричин)*

5. Докажите, что пересечение 10 правильных тетраэдров, вписанных в додекаэдр (вершины тетраэдров являются вершинами додекаэдра), есть икосаэдр. *(А. Я. Белов)*

6. а) Все коэффициенты многочлена $P(x)$ целые и среди них есть нечетные. Докажите, что найдется многочлен $Q(x)$, имеющий ровно два нечетных коэффициента и делящийся на $P(x)$.

   б) Существует ли многочлен $P(x, y)$ с целыми коэффициентами такой, что всякий многочлен $R(x, y)$, делящийся на $P(x, y)$, имеет более миллиона нечетных коэффициентов? *(А. Я. Белов)*

7. G — группа без кручения, т. е. нет неединичных элементов конечного порядка. Известно, что $(ab)^n = a^n b^n$. Докажите, что группа абелева, т. е. для любых a, b выполнено $ab = ba$. *(Г. А. Карасев)*

8. Разбейте плоскость на непересекающиеся отрезки равной длины. *(Cosa monstra)*

9. а) В клетках бесконечной клетчатой ленты записаны положительные числа. Известно, что каждое число не меньше среднего арифметического трех соседей слева и трех справа. Докажите, что числа равны.

   б) На клетчатой плоскости в клетках расставлены положительные числа так, что каждое записанное число равно среднему арифметическому 4 своих соседей. Докажите, что все числа равны.

   в) Верно ли аналогичное утверждение для пространственной решетки? *(И. Ф. Шарыгин)*

10. Случайные величины X, Y, Z равномерно распределены на единичном отрезке. Докажите, что величина $(XY)^Z$ также равномерно распределена. *(М. Кельберт)*

Решения задач из предыдущих выпусков

1.2. Условие. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел N таких, что 2^N оканчивается на N.

Решение. Прежде всего, нетрудно проверить, что

$$2^{36} \text{ оканчивается на } 36. \tag{i}$$

Пусть

$$2^{36} = 10^4 N + 10^3 K + 36. \tag{ii}$$

Покажем, что 2^{10^3K+36} оканчивается на $10^3K + 36$. По ходу дела нам придется воспользоваться тем, что

$$2^{4\cdot 5^3} - 1 \text{ делится на } 5^4, \tag{iii}$$

это следует из бинома Ньютона: $(15+1)^{5^3} - 1 = 5^3 \cdot 15 \cdot N = 5^4 \cdot N_1$. Имеем:

$$2^{10^3K+36} - (10^3K + 36) \overset{\text{(ii)}}{=} 2^{10^3K}(10^4N + 10^3K + 36) - (10^3K + 36) =$$
$$= 2^{10^3K} \cdot 10^4 N + (10^3K + 36)(2^{10^3K} - 1) \overset{\text{Id}}{=} 10^4 N_1 + N_2\left(\left(\left(2^4\right)^{5^3}\right)^{2K} - 1\right).$$

Второе слагаемое делится на 5^4 в силу (iii). С другой стороны, в силу (i) 10^3K+36 делится на 2^4, значит $2^{10^3K+36} - (10^3K + 36)$ делится на 10^4, что и требовалось.

Мы совершили первый шаг индукции. Общее построение таково. Положим $a_{m+1} = 2^{a_m}$, b_m — число, образованное последними m цифрами числа a_m, $m \geqslant 2$. Тогда $2^{b_m} - b_m$ делится на 10^m. Предоставим читателю провести m-й шаг индукции самостоятельно.

(*В. М. Тихомиров*)

1.4. Условие. Дан треугольник ABC. K — точка касания вписанной в него окружности и стороны BC. Рассмотрим две окружности, касающиеся прямой BC, луча AK и окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$ (на рис. 1 изображены пунктиром). Доказать, что их радиусы равны.

Решение. Пусть E — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC, радиус этой окружности обозначим r_a, а γ — окружность, касающаяся продолжений отрезков AK, BK и также касающаяся описанной вокруг треугольника ABC окружности с внешней стороны.

Лемма 1. *Радиус γ равен r_a.*

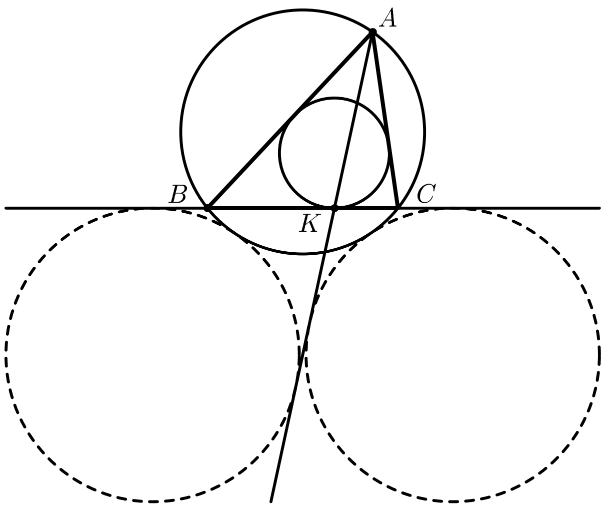

Рис. 1.

Утверждение задачи сразу следует из леммы 1. Оказывается, обе пунктирные окружности на рис. 1 не только равны между собой, но и равны вневписанной окружности.

Лемма 1 выводится из следующего утверждения. Пусть K' — произвольная точка на стороне BC, γ' — окружность, касающаяся продолжений отрезков AK' и BK' (точки касания обозначим M и L соответственно) и также касающаяся описанной вокруг треугольника ABC окружности с внешней стороны.

Лемма 2. *Для любой точки $K' \in BC$ прямая ML проходит через точку E.*

Доказательство этого факта (и аналогичного факта для вписанной окружности) можно найти в книге И. Ф. Шарыгина «Задачи по геометрии (планиметрия)», библиотечка «Квант», №7, 1986 и в книге решений четвертой Соросовской Олимпиады (10 класс).

Покажем, как из леммы 2 выводится лемма 1, а значит, и утверждение задачи.

Доказательство леммы 1. Опустим перпендикуляр EV на сторону BC и продолжим его за точку E на его длину. Получим отрезок VW, перпендикулярный BC и такой, что $VW = 2VE = 2r_a$. Легко показать (из гомотетии окружностей), что отрезок BW проходит через K. Применяя лемму 2 для $K' = K$, заключаем, что точки E, M, L лежат на одной прямой. Возьмем точку H на стороне BC так, чтобы $WH \parallel ML$. Обозначим O середину WH. Треугольник MKL — равнобедренный, значит, и треугольник WKH также равнобедренный. Поэтому KO — биссектриса угла WKH. Более того, отрезок EL является средней линией в треугольнике WVH. Поэтому $WELO$ — параллелограмм. Это означает, что $OL = r_a$, $OL \perp BC$. Таким образом, O — центр окружности γ (как единственная точка пересечения перпендикуляра LO с биссектрисой угла WKH). Следовательно, радиус γ равен r_a, что и требовалось доказать.

(*В. Протасов*)

Аналитическое решение. Докажем, что радиусы окружностей, указанных в условии задачи, равны радиусу r_a вневписанной окружности C_a треугольника ABC, касающейся стороны BC. Пусть l — вторая касательная к C_a, параллельная BC. Точку касания l и C_a обозначим K'. Легко видеть, что эта точка лежит на прямой AK.

Введем прямоугольную систему координат, ось абсцисс которой совпадает с l, а ось ординат проходит через A. Координаты A равны $(0, L)$, абсциссы точек пересечения прямых AK, AB, AC с осью абсцисс обозначим $\varkappa, \xi_1, \xi_2$ соответственно. Найдем соотношение между ними. Алгебраически условие касания окружности C_a и прямой AB (AC) означает, что у уравнения

$$(x-\varkappa)^2 + (y-r_a)^2 = r_a^2,$$

где $y = L - \dfrac{L}{\xi_i}x$, — кратный корень, т.е. дискриминант трехчлена равен 0. Подставляя выражение для y, получаем условие

$$\left(2\varkappa + \frac{2L(L-r_a)}{\xi_i}\right)^2 - 4\left(1+\frac{L^2}{\xi_i^2}\right)(\varkappa^2 + L(L-2r_a)) = 0,$$

из которого после упрощения следует, что ξ_1, ξ_2 — корни квадратного уравнения (относительно ξ)

$$(L-2r_a)\xi^2 - 2(L-r_a)\varkappa\xi + L\varkappa^2 - Lr_a^2 = 0. \tag{1}$$

Абсциссы η_1, η_2 точек касания (и центров) окружностей, касающихся BC, l, AK, являются корнями аналогичного (1) квадратного уравнения (но относительно η)

$$(L-2r_a)\varkappa^2 - 2(L-r_a)\varkappa\eta + L\eta^2 - Lr_a^2 = 0. \tag{2}$$

Теперь нужно проверить, что эти окружности касаются описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности, т.е. совпадают с пунктирными окружностями на рисунке к условию задачи.

Координаты вершин B и C равны $(\frac{\xi_1}{L}(L-2r_a), 2r_a)$ и $(\frac{\xi_2}{L}(L-2r_a), 2r_a)$ соответственно. Поэтому из (1) получаем, что абсцисса центра O описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности равна

$$\tilde{\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi_1}{L}(L-2r_a) + \frac{\xi_2}{L}(L-2r_a)\right) = \frac{L-2r_a}{2L}(\xi_1+\xi_2) = \frac{L-r_a}{L}\varkappa = \frac{\eta_1+\eta_2}{2}, \tag{3}$$

ординату O обозначим h, а радиус описанной окружности — R. Тогда абсциссы B и C являются корнями квадратного уравнения

$$(x-\tilde{\eta})^2 + (2r_a - h)^2 = R^2,$$

которое поэтому можно переписать в виде

$$x^2 - \frac{L-2r_a}{L}(\xi_1+\xi_2)x + \left(\frac{L-2r_a}{L}\right)^2\xi_1\xi_2 = 0.$$

Приравнивая свободные члены этих уравнений и используя (1), получаем

$$\tilde{\eta}^2 + (2r_a - h)^2 - R^2 = \left(\frac{L-2r_a}{L}\right)^2 \frac{L(\varkappa^2 - r_a^2)}{L-2r_a} = (\varkappa^2 - r_a^2)\frac{L-2r_a}{L}. \tag{4}$$

Теперь упростим левую часть (4), учитывая уравнение $\tilde{\eta}^2 + (h-L)^2 = R^2$ (вершина A лежит на описанной окружности). Заменяя $\tilde{\eta}^2 - R^2$ на $-(h-L)^2$ и раскладывая разность квадратов на множители, получаем выражение для h

$$2h = L + 2r_a + \frac{\varkappa^2 - r_a^2}{L} \tag{5}$$

и для R^2

$$R^2 = \tilde{\eta}^2 + \frac{1}{4}\left(2r_a - L + \frac{\varkappa^2 - r_a^2}{L}\right)^2. \tag{6}$$

Осталось проверить, что окружности с центрами (η_i, r_a) и радиусом r_a касаются окружности с центром $(\tilde{\eta}, h)$ и радиусом R, т. е.

$$(\tilde{\eta} - \eta_i)^2 + (h - r_a)^2 = (R + r_a)^2. \tag{7}$$

Это условие, с учетом (1), (2), (3) и (6) можно записать в виде

$$\left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(L + \frac{\varkappa^2 - r_a^2}{L}\right)^2 = r_a^2 + \tilde{\eta}^2 + \frac{1}{4}\left(2r_a - L + \frac{\varkappa^2 - r_a^2}{L}\right)^2 + 2r_aR,$$

откуда после упрощений представляем его в виде выражения для R:

$$R = \frac{L(L-2r_a) + \varkappa^2 + r_a^2}{2L}. \tag{8}$$

Непосредственным вычислением проверяется, что квадрат правой части (8) тождественно равен правой части (6).

(*М. Н. Вялый*)

1.6. Условие. а) Дан многочлен $P(X)$. Для любого $X > 0$: $P(X) > 0$. Доказать, что что $P = Q/T$, где Q и T — многочлены с неотрицательными коэффициентами.
б)* Пусть P — квадратный трехчлен, α — аргумент его комплексного корня. Тогда степень Q не меньше π/α.

Решение. а) Прежде всего заметим, что любой многочлен с вещественными коэффициентами разлагается в произведение линейных и квадратных многочленов с вещественными коэффициентами, причем дискриминант всех этих квадратных трехчленов отрицателен. Из условия следует, что все линейные множители не имеют положительных корней и потому имеют вид $x + c$ где $c > 0$. Поэтому достаточно решить задачу для квадратного трехчлена. Далее, делая замену $x \to \lambda \cdot x$ и умножая квадратный трехчлен на подходящее λ', можно привести его к виду $P(x) = x^2 - \delta x + 1$. При этом $\delta < 2$ и нетривиальным является случай, когда $\delta > 0$. Это условие равносильно положительности вещественных частей корней многочлена P. Теперь приступим к решению.

Домножив многочлен $P(x) = x^2 - \delta x + 1$ на многочлен $\bar{P}(x) = x^2 + \delta x + 1$ получим выражение $P_1(y) = y^2 + (2 - \delta^2)y + 1$, где $y = x^2$. При этом аргументы корней многочлена P_1, как легко видеть, будут в два раза больше аргументов соответствующих корней P.

Аналогичным образом, построим по многочлену P_1 многочлен P_2 и т. д. Изначально аргумент одного из корней заключен между 0 и $\pi/2$. Поскольку аргументы корней всякий раз будут удваиваться, то на некотором шаге возникнет многочлен P_k, аргументы корней которого будут заключены между $\pi/2$ и π. Все его коэффициенты будут неотрицательны. Поскольку многочлены $\bar{P}_i$ имеют неотрицательные коэффициенты, многочлены $Q = \prod_{i=1}^{k-1} \bar{P}_i(x^{2^{i-1}})$ и $T = P_k(x^{2^{k-1}})$ удовлетворяют требованиям задачи.

Отметим, что можно было бы работать с последовательностью $\delta_i = 2 - \delta_{i-1}^2$ и убедиться явно в наличии неположительного члена.

Утверждение пункта б) означает, что предыдущая конструкция близка к оптимальной. Как и выше, рассматривается многочлен вида $P(x) = x^2 - \delta x + 1$, причем $\delta > 0$. Тогда $\delta = 2\cos\varphi$ и величина φ $(0 < \varphi < \pi/2)$ есть аргумент одного из корней P. Заметим, что коэффициент δ монотонен относительно положительного аргумента корня. Кроме того, если коэффициенты многочленов PT и T неотрицательны, а коэффициенты P_1 не меньше соответствующих коэффициентов P, то все коэффициенты P_1T тоже неотрицательны. Поэтому достаточно доказать, что если $\varphi = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{k}$, то минимальная степень Q равна k и больше k, если $\varphi < \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{k}$. В дальнейшем мы будем считать степень многочлена T, удовлетворяющего условию задачи, минимально возможной.

Поскольку многочлен P фиксирован, коэффициенты многочлена $Q = PT$ будут линейно зависеть от коэффициентов t_k многочлена T. Будем двигать параметры t_k с постоянными скоростями, т. е. рассматривать семейства параметров $t'_k = t_k + v_k\tau$ (τ — «время»). Обращению в нуль коэффициентов многочленов Q или T отвечают линейные уравнения на параметры.

Пусть в процессе движения некоторый коэффициент обратится в нуль. Тогда рассмотрим новые начальные значения t_i, а на скорости v_i наложим ограничение, означающее, что этот коэффициент не меняется. Тогда он остается нулем и соответствующее ограничение будет иметь вид линейного уравнения с нулевой правой частью: $\sum \alpha_i v_i = 0$. В самом деле: линейность уже установлена, а утверждение про нулевую правую часть следует из того, что все коэффициенты сохраняются, когда все $v_i = 0$.

Будем до тех пор, пока это возможно, стремиться обратить в нуль как можно бóльшее число коэффициентов многочленов T и R. Следующая лемма позволяет ограничиться рассмотрением только коэффициентов многочлена $Q = RT$.

Лемма 1. *Пусть $T(x) = 1 + t_1x + \ldots + t_kx^k + \cdots + t_rx^r$; $t_r > 0$. Тогда многочлен $T_1(x) = 1 + t_1x + \ldots + t_{k-1}x^{k-1}$ удовлетворяет условию задачи (т. е. все коэффициенты $Q_1 = PT_1$ неотрицательны) и имеет меньшую степень.*

Количество свободных параметров равно степени $\deg(T)$ многочлена T, а количество коэффициентов Q, которым отвечают уравнения, равно $\deg(Q)$ −

$-1 = \deg(T) + 1$ (свободный член не меняется). Мы воспользуемся следующим утверждением из линейной алгебры:

Лемма 2. *Любая однородная система n линейных уравнений от $k > n$ неизвестных имеет нетривиальное решение (в котором не все значения неизвестных нули).*

Доказательство этой леммы — индукция по числу уравнений и неизвестных.

В силу данной леммы можно добиться того, чтобы $\deg(T)$ коэффициентов многочлена Q обратились в нуль. Нулем не окажется свободный член и старший коэффициент. Поэтому ненулевым кроме этих двух может оказаться еще только один коэффициент.

Покажем, как добиться того, чтобы этот коэффициент был предпоследним (т. е. при $x^{\deg(Q)-1}$).

Обозначим k-й коэффициент (при x^k) многочлена Q через q_k. Тогда $q_k = t_k + t_{k-2} - 2\cos\varphi \cdot t_{k-1}$. Пусть $t_k > 0$ для $k \leqslant \deg(Q) - 2$ и $t_k = 0$ для остальных $k \neq 1, \deg(Q)$. Покажем, как построить многочлен T', удовлетворяющий условию задачи, у которого первые k коэффициентов — нули.

Положим $t'_i = t_i$ при $i \leqslant k$ и $t'_i = \lambda t_i$ если $i > k$. При этом $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Ясно, что при таком варьировании у коэффициентов q_s для $s \leqslant k-1$ или $s \geqslant k+2$ сохраняются положительность, а также свойство «быть равным нулю».

Поскольку $q'_{k+1}/\lambda = q_{k+1} - (1/\lambda - 1)t_{k+1}$, то неотрицательность t_{k+1} также сохраняется. Что касается члена q_k, то он уменьшается и в какой-то момент становится равным нулю. Таким образом, осуществлен переход к ситуации, когда первые k коэффициентов у многочлена Q (не считая свободного члена) нулевые.

В этом случае коэффициенты t_k будут удовлетворять следующим рекуррентным соотношениям: $t_0 = 1, t_1 = \cos\varphi, t_s = 2\cos\varphi \cdot t_{s-1} - t_{s-2}$; $s = 2, \ldots, \deg(T)$. Поэтому многочлен T будет образован первыми k членами ряда Тейлора функции

$$\frac{1}{1 - 2\cos\varphi x + x^2} = \frac{1}{(z-\bar{z})} \cdot \left(\frac{1}{(x-z)} - \frac{1}{(x-\bar{z})}\right),$$

где $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Откуда $t_k = \dfrac{1}{2i\sin\varphi}(z^k - \bar{z}^k) = \sin(k\varphi)/sin(\varphi)$.

Если величина t_k, определенная предыдущим соотношением, перестает быть положительной, то ряд $\sum t_n x^n$, начиная с $(k+1)$-го члена, можно оборвать. Легко видеть, что верно и обратное.

Для завершения решения задачи остается отметить, что условие $\sin(k\varphi) = 0$ равносильно условию $k = \pi/\arg(\varphi)$. *(А. Я. Белов)*

1.9. Условие. Известно, что при любых действительных A, B ряд $\sum \dfrac{1}{|Ax_n + By_n|}$ расходится. Обязан ли расходиться ряд $\sum \dfrac{1}{|x_n| + |y_n|}$? А что если A и B могут быть комплексными?

Решение. В условии задачи не оговорено, как трактовать члены рядов с $Ax_n + By_n = 0$. Мы будем полагать, что речь идет о рядах

$$L(A,B) = \sum_{n: Ax_n + By_n \neq 0} \frac{1}{|Ax_n + By_n|}$$

и

$$S = \sum_{|x_n|+|y_n|\neq 0} \frac{1}{|x_n|+|y_n|} = \sum_{f(n)\neq 0} \frac{1}{f(n)}, \quad f(n) \stackrel{\text{def}}{=} |x_n|+|y_n|.$$

Для упрощения записи считаем далее, что во всех формулах из сумм исключаются члены, в которых один из знаменателей обращается в 0.

Ответ: «нет» в действительном случае и «да» в комплексном.

Комплексный случай. Пусть S сходится. Докажем, что тогда сходится и один из рядов $L(q,-1)$. Поскольку

$$\sum_{n:x_n=0} \frac{1}{|y_n|} \leqslant \sum \frac{1}{f(n)} = S,$$

сходимость ряда $L(q,-1)$ не меняется при отбрасывании членов с $x_n = 0$. Обозначим ряд с отброшенными членами, для которых $x_n = 0$, через $\tilde{L}(q)$, введём также обозначение $\lambda_n = -y_n/x_n$. Тогда

$$\tilde{L}(q) = \sum \frac{1+|\lambda_n|}{f(n)|q-\lambda_n|}. \tag{1}$$

При построении q будем использовать меру

$$\mu(X) = \frac{\sum_{\lambda_n \in X, x_n \neq 0} f(n)^{-1}}{\sum_{x_n\neq 0} f(n)^{-1}}.$$

Обозначим $l_0 = 1$, $m = 30$. Разобъём квадрат $Q_0 = \{z : |\operatorname{Re} z| \leqslant l_0/2, |\operatorname{Im} z| \leqslant l_0/2\}$ прямыми, параллельными действительной и мнимой осям, на m^2 квадратов со стороной $l_1 = l_0/m$ (принадлежность граничных точек произвольная). Для каждого из $(m-2)^2$ внутренних квадратов Q определим «окрестность» Q^+ как объединение этого квадрата и 8 смежных с ним. Поскольку каждый квадрат разбиения входит не более чем в 25 «окрестностей», то найдётся квадрат разбиения Q_1 такой, что $\mu(Q_1^+) \leqslant 25\mu(Q_0)/(m-2)^2$. Применив ту же процедуру к Q_1, получим квадрат Q_2 и т. д. Последовательность квадратов Q_i определяет некоторую точку q.

Докажем, что ряд (1) для q сходится. Обозначим $N_0 = \{n : \lambda_n \notin Q_1^+\}$, $N_1 = \{n : \lambda_n \notin Q_2^+\} \setminus N_0$ и т. д. Из процедуры построения следуют оценки

$$\sum_{n\in N_k} \frac{1}{f(n)} \leqslant \frac{25^k}{(m-2)^{2k}} S, \quad (n \in N_k) \Longrightarrow |q-\lambda_n| \geqslant \frac{1}{m^k}. \tag{2}$$

Выберем теперь такое R, чтобы при $|z| > R$ выполнялось $(1+|z|)/|q-z| < 2$. Оценивая по отдельности члены с $\lambda_n > R$ и $\lambda_n \leqslant R$, получаем

$$\sum_{n\in N_k} \frac{1+|\lambda_n|}{f(n)|q-\lambda_n|} \leqslant (2+(R+1)m^k) \sum_{n\in N_k} \frac{1}{f(n)} \leqslant (R+2)\left(\frac{25m}{(m-2)^2}\right)^k S,$$

откуда при $25m/(m-2)^2 < 1$ следует сходимость ряда $\tilde{L}(q)$.

Действительный случай. Используя уже введённые обозначения, полагаем $f(n) = n\ln^2 n$ (этого достаточно для сходимости S). Последовательность λ_n построим следующим образом. Разделим её на две подпоследовательности: $\lambda_n = \lambda_s^{(t)}$, где $n = t + 2s$, $t \in \{0,1\}$. Зададим $\lambda_n^{(1)} = n$. Последовательность $\lambda_n^{(0)}$ определим следующим образом. Занумеруем натуральными числами пары целых чисел (u,v), $v > 0$, в порядке возрастания $\max\{|u|, v\}$ (в остальном нумерация произвольная). Обозначим n-ю пару (u_n, v_n), тогда $\lambda_n^{(0)} = u_n/v_n$. Заметим, что пара (u,v) встретится не позже, чем на $(\max\{|u|,v\}^2)$-м месте.

Проверим расходимость рядов $L(A,B)$ при таком выборе λ_n.

Пусть $B = 0$. Возьмём подпоследовательность $n_k = 1 + 2k$. Для неё

$$\sum_k \frac{1}{|Ax_{n_k}|} = \frac{1}{|A|}\sum_k \frac{1+|\lambda_{n_k}|}{f(n_k)} = \frac{1}{|A|}\sum_k \frac{1+k}{(1+2k)\ln^2(1+2k)},$$

так что ряд $L(A,0)$ расходится.

При $B \neq 0$ обозначим $a = A/B$. Оценим вклад L_v, который даёт в ряд подпоследовательность $n_k = 2s_k$, где s_k нумеруют те пары (u,v), для которых

$$|a - \frac{u}{v}| < 1.$$

Для таких пар $\max\{|u|,v\} \leqslant v\max\{1, |a|+1\} = Cv$, поэтому имеем

$$L_v = \sum_k \frac{1}{|Ax_{n_k} + By_{n_k}|} = \frac{1}{|B|}\sum_k \frac{1+|u_k/v_k|}{f(n_k)|a - u_k/v_k|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4C^2|B|}\sum_{k=1}^{v/2} \frac{v}{kv^2\ln^2(4C^2v^2)} \geqslant \frac{\ln v/2}{4C^2|B|v\ln^2(4C^2v^2)} = \Omega(\frac{1}{v\ln v}).$$

Так как $L(A,B) \geqslant \sum_v L_v$, ряд $L(A,B)$ расходится.

(*М. Вялый*)

1.10. Условие. Функция, заданная на всей вещественной прямой, бесконечно дифференцируема. В каждой точке некоторая производная (номер производной может зависеть от точки) равна нулю. Докажите, что эта функция — многочлен.

Решение 1[1]. Пусть $F_n = \{x \mid f^{(n)}(x) = 0\}$, $G_n = \mathbb{R} \setminus F_n$. Докажите вспомогательное утверждение (A): Если f не является многочленом на некотором открытом интервале Δ, то для любого n найдется составляющий интервал непустого открытого множества $G_n \cap \Delta$, на котором f не является многочленом.

Из (A) легко выводится утверждение задачи: предположим, что f не многочлен на $\mathbb{R}$, построим последовательность вложенных интервалов $\Delta_n = (a_n; b_n) \subset \subset G_n$, $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset \Delta_n$, пересечение которых непусто, что противоречит условию.

Предположим, что (A) не выполняется, т. е. что для некоторых n и Δ функция f — не многочлен на Δ, но ее ограничение на любой составляющий интервал

[1] Из книги Б. М. Макаров, М. Г. Голузина, А. А. Лодкин, А. Н. Подкорытов «Избранные задачи по вещественному анализу». М.: Наука, 1992. С. 294–295.

множества $G_n \cap \Delta$ является многочленом. Обозначим символом $\sigma(x)$ $(x \in \Delta)$ максимальный промежуток, обладающий свойствами: $x \in \sigma(x) \subset \Delta$, $f\big|_{\sigma(x)}$ — многочлен. Проверьте, что если ограничения f на два примыкающих промежутка — многочлены, то f — многочлен на их объединении. Покажите, что если a — граничная точка $\sigma(x)$, то: 1) существует последовательность $x_k \in F_n$, $x_k \neq a$, $x_k \to a$; 2) $f^{(m)}(a) = 0$ для всех $m \geqslant n$; 3) $f^{(n)}$ обращается в нуль на $\sigma(x)$. Тогда, в частности, $f^{(n)}(x) = 0$ для всех $x \in G_n \cap \Delta$, что невозможно.

(*Д. Ю. Бураго*)

Решение 2. Пусть F_n — множество нулей функции $f^{(n)}$. Объединение замкнутых множеств F_n покрывает прямую, а доказать надо, что одно из этих множеств совпадает со всей прямой. Предположим противное: $F_n \neq \mathbb{R}$ при всех n.

Пусть $E_n = F_n'$ — множество предельных точек множества F_n. Достаточно доказать следующие три леммы:

Лемма 1. *Последовательность (E_n) возрастает.*

Лемма 2. *Если непустой открытый интервал (a, b) не пересекается с некоторым E_n, а один из его концов a, b принадлежит E_n, то (a, b) не содержится в E_m ни при каком $m > n$.*

Лемма 3. *Пусть (G_n) — убывающая последовательность непустых открытых множеств на прямой. Предположим, что для всех $n < m$ каждый максимальный интервал (a, b) в G_n пересекается с G_m, причем $a = \inf(a, b) \cap G_m$, если a конечно, и $b = \sup(a, b) \cap G_m$, если b конечно. Тогда множество $\bigcap G_n$ несчетно.*

Предположим, что эти леммы установлены. Положим $G_n = \mathbb{R} \setminus E_n$. Согласно леммам 1 и 2, последовательность (G_n) удовлетворяет условиям леммы 3. По лемме 3 множество $A := \bigcap G_n = \mathbb{R} \setminus \bigcup E_n$ несчетно. С другой стороны, так как $\bigcup F_n = \mathbb{R}$, то $A \subset \bigcup (F_n \setminus E_n)$. Множество $F_n \setminus E_n$ — это множество изолированных точек множества F_n. У любого множества на прямой множество изолированных точек счетно. (Указание: рассмотрите все интервалы с рациональными концами, каждый из которых содержит ровно одну точку данного множества.) Из включения $A \subset \bigcup (F_n \setminus E_n)$ вытекает, таким образом, что A должно быть счетным, и мы приходим к противоречию.

Остается доказать три леммы, сформулированные выше.

Доказательство леммы 1. Достаточно установить следующее: всякий неизолированный нуль дифференцируемой функции является неизолированным нулем ее производной. Это вытекает из теоремы Ролля: между всякими двумя нулями функции лежит нуль ее производной.

Доказательство леммы 2. Допустим, что (a, b) не пересекается с E_n, $a \in E_n$ и $(a, b) \subset E_m$ при некотором $m > n$. На интервале (a, b) функция f совпадает с многочленом степени k, где $n \leqslant k < m$. Отсюда $f^{(k)}(a) \neq 0$. Однако по лемме 1 $a \in E_n \subset E_k$, так что $f^{(k)}(a) = 0$. Противоречие.

Доказательство леммы 3. Если множество $\bigcap G_n$ содержит интервал, то оно несчетно. Предположим, что $\bigcap G_n$ не содержит интервала. Если (a, b) — максимальный интервал в G_n, то число компонент (максимальных интервалов) множества $(a, b) \cap G_m$ неограниченно растет с ростом m, так что при больших m

можно выбрать два максимальных интервала в $(a,b)\cap G_m$ с непересекающимися замыканиями. Используя это замечание, легко построить по индукции ветвящуюся систему открытых интервалов I_s^k, $1 \leqslant s \leqslant 2^k$, и числа $n_1 < n_2 < \ldots$, такие, что: (1) при фиксированном k интервалы I_s^k имеют попарно непересекающиеся замыкания; (2) каждый интервал I_s^k является компонентой множества G_{n_k}; (3) $I_{2s-1}^{k+1} \cup I_{2s}^{k+1} \subset I_s^k$. Пусть B_k — объединение интервалов I_s^k, $1 \leqslant s \leqslant 2^k$, а C_k — объединение их замыканий. Множество $\bigcap C_k$ находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством всех бесконечных последовательностей нулей и единиц и гомеоморфно канторову совершенному множеству. Таким образом, $\bigcap C_k$ несчетно. Множество $\bigcap B_k$ также несчетно, поскольку разность $\bigcap C_k \setminus \bigcap B_k$ содержится в счетном множестве $\bigcup (C_k \setminus B_k)$ концов всех интервалов I_s^k. Так как $\bigcap B_k \subset \bigcap G_{n_k} = \bigcap G_n$, то множество $\bigcap G_n$ несчетно.

(*В. В. Успенский*)

2.2. Условие. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причем $Q(0) = 0$. Докажите, что если $P(Q(x))$ — чётная функция, то $Q(x)$ — чётная или нечётная функция.

Решение. Утверждение задачи непосредственно вытекает из следующих фактов про многочлены:

Лемма 1. *Пусть Q – многочлен. Тогда $\big||Q(x)| - |Q(-x)|\big|$ есть либо константа, либо стремится к бесконечности при $x \to \infty$.*

Лемма 2. *Пусть $P \neq const$ – многочлен и $\big||x_n| - |y_n|\big| \to \infty$. Тогда $\big||P(x_n)| - |P(y_n)|\big| \to \infty$.*

Доказательство этих утверждений несложно и опускается. (*А. Я. Белов*)

3.3. Условие. (а) Существует ли такая непрерывная функция $f(x)$, что $f(f(f(x))) = e^{-x}$?

(б) Тот же вопрос для разрывной функции.

(в) Тот же вопрос для функции с конечным числом точек разрыва.

Решение.

Ответ: а) не существует, б) существует, в) не существует.

(а) Не существует. Пусть непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению $f(f(f(x))) = e^{-x}$. Так как e^{-x} взаимно однозначна, то и $f(x)$ взаимно однозначна. Будучи непрерывной, она тогда строго монотонна. Поскольку e^{-x} убывает, то и $f(x)$ убывает. Если ее множество значений — вся вещественная прямая, то это верно и для $f(f(f(x)))$, тогда как e^{-x} всюду положительна, значит $f(x)$ — ограничена сверху или снизу. Если $f(x)$ ограничена снизу числом c, то $f(f(x))$ ограничена снизу тем же числом, а сверху — значением $f(c)$. Противоречие. Если $f(x)$ ограничена сверху, то $f(f(x))$ также ограничена с обеих сторон. Как следствие, это верно и для $f(f(f(x)))$. Однако e^{-x} не ограничена сверху. Значит, искомой функции не существует.

(б) Таких функций бесконечно много. Действительно, луч $(-\infty; 0]$ под действием e^{-x} отображается на луч $(+\infty; 1]$. Тот, в свою очередь, отображается на полуинтервал $(0; 1/e]$, и т. д. При бесконечном продолжении этого процесса заполняется вещественная прямая, за исключением некоторого отрезка $[A; B]$, причем $0 < A \leqslant B < 1$, $e^{-A} = B$, $e^{-B} = A$. Заметим теперь, что производная функции $g(x) = e^{-e^{-x}} - x$ равна $e^{-e^{-x}-x} - 1$ и при положительных x заведомо отрицательна (нетрудно показать, что она отрицательна при всех вещественных x). Так как $g(A) = g(B) = 0$, то $A = B$. Как следствие, $e^{-A} = A$.

Разобъем теперь все отрицательные числа на тройки. Если x_1, x_2, x_3 — одна из таких троек, то положим $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3$, а при $n > 3$ $x_n = e^{-x_{n-3}} = f(x_{n-1})$. Числа в этой последовательности не повторяются, поскольку функция e^{-x} взаимно однозначна и всюду положительна. По той же причине две последовательности для разных троек не пересекаются. Положим также $f(A) = A$. Из доказанного выше следует, что $f(x)$ определена на всей вещественной прямой, причем $f(f(f(x))) = e^{-x}$.

(в) Такой функции не существует. Пусть $f(f(f(x))) = e^{-x}$ для всех вещественных x. Пусть также A — (единственный) корень уравнения $e^{-x} = x$. Если C — точка разрыва для $f(x)$, то C является точкой разрыва и для $e^{-f(x)}$. Но $e^{-f(x)} = f(f(f(f(x) = f(e^{-x})$, поэтому e^{-x} — точка разрыва для $f(x)$. Аналогично, точкой разрыва является $e^{-e^{-x}}$, и т. д. Как показано в решении пункта (б), при $C \neq A$ элементы полученной последовательности не повторяются. Значит, если $f(x)$ имеет хотя бы один разрыв при $x \neq A$, то таких разрывов бесконечно много.

Пусть теперь $f(x)$ имеет единственный разрыв при $x = A$. Поскольку $f(A) = f(e^{-A}) = f(f(f(f(x)))) = e^{-f(A)}$, то $f(A) = A$. Слева от A функция непрерывна; если в этой области она принимает значения и больше, и меньше A, то там встречается и значение, равное A. Но это противоречит взаимной однозначности $f(x)$, которая следует из взаимной однозначности e^{-x}. Если $f(x) < A = f(A)$ при $x < A$, то это выполнялось бы для $f(f(x))$ и e^{-x}, но последнее неверно. Значит, $f(x) > A$ при $x < A$. Аналогично $f(x) < A$ при $x > A$.

Любое число, большее чем A, содержится в области значений $e^{-x} = f(f(f(x)))$. Поэтому любое число, меньшее чем A, содержится в области значений $f(f(x))$ (с учетом взаимной однозначности $f(x)$). Все эти числа являются значениями $f(x)$, и с учетом равенства $f(A) = A$ эта функция отображает вещественную прямую на себя. Но тогда тем же свойством обладает и $f(f(f(x)))$, в то время как e^{-x} всюду положительна. Значит, искомой функции не существует.

(*А. Канель, изложено Б. Френкиным*)

4.8. Условие. Решите функциональное уравнение для непрерывных вещественных функций вещественного переменного:

$$F(x+y) = A(x) + B(x)C(y).$$

Решение. Постараемся свести исходное уравнение к частному случаю. Положим

$$F_1(x) = F(x) - F(0); \quad C_1(y) = C(y) - C(0);$$
$$A_1(x) = A(x) - F(0) + B(x)C(0). \tag{1}$$

Тогда $F_1(0) = C_1(0) = 0$,

$$F_1(x+y) = A_1(x) + B(x)C_1(y). \tag{2}$$

Положим в (2) $y = 0$:

$$F_1(x) = A_1(x). \tag{3}$$

Если $F_1(x) \equiv 0$, то или $B(x)$, или $C_1(y)$ ввиду (2) – (3) является тождественным нулем. Используя (1) ($F(0)$ и $C(0)$ можно взять произвольными), получаем классы функций, указанные в конце решения под номерами 1 и 2.

Пусть теперь $F_1(x) \not\equiv 0$. Положим в (2) $x = 0$. С учетом (3) $F_1(y) = B(0)C_1(y)$. Как следствие, $B(0) \neq 0$. Положим $B_1(x) = B(x)/B(0)$. Тогда

$$F_1(x+y) = F_1(x) + B_1(x)F_1(y). \tag{4}$$

Используем ассоциативность сложения:

$$\begin{aligned}
F_1(x+y+z) &= F_1(x+y) + B_1(x+y)F_1(z) = \\
&= F_1(x) + B_1(x)F_1(y) + B_1(x+y)F_1(z); \\
F_1(x+y+z) &= F_1(x) + B_1(x)F_1(y+z) = \\
&= F_1(x) + B_1(x)F_1(y) + B_1(x)B_1(y)F_1(z).
\end{aligned}$$

Отсюда $(B_1(x+y) - B_1(x)B_1(y))F_1(z) = 0$. Поскольку $F_1(z) \not\equiv 0$, то $B_1(x+y) = B_1(x)B_1(y)$. Таким свойством среди непрерывных функций обладают только экспоненты и тождественный нуль. Но $B(0) \neq 0$, и (4) принимает вид $F_1(x+y) = F_1(x) + e^{ax}F_1(y)$ для некоторого a. Если $a = 0$, то $F_1(x+y) = F_1(x) + F_1(y)$. Среди непрерывных функций таким свойством обладают только однородные линейные ($y = kx$), что приводит к классу функций 3. Если же $a \neq 0$, то ввиду коммутативности сложения $F_1(x) + e^{ax}F(y) = F_1(x+y) = F_1(y) + e^{ay}F_1(x)$. Отсюда при $x, y \neq 0$ $\dfrac{F_1(x)}{e^{ax}-1} = \dfrac{F_1(y)}{e^{ay}-1} = c$ для некоторого c, и $F_1(x) = c(e^{ax}-1)$. Это выполнено и при $x = 0$ (поскольку $F_1(0) = 0$). Отсюда возникает класс функций 4.

В итоге получаем следующие решения:

1) $F(x) \equiv A(x) \equiv K$ (K — произвольная константа); $B(x) \equiv 0$; $C(y)$ — произвольная непрерывная функция.

2) $F(x) \equiv K_1$; $B(x)$ — произвольная непрерывная функция; $C(y) \equiv K_2$; $A(x) = K_1 - B(x)K_2$ (K_1, K_2 — произвольные константы).

3) $F(x) = K_1x + K_2$; $A(x) = K_1x + K_2 - K_3K_4$; $B(x) = K_3$; $C(y) = \dfrac{K_1}{K_3}y + K_4$ (K_1, K_2, K_3, K_4 — произвольные константы, $K_3 \neq 0$).

4) $F(x) = K_1(e^{ax}-1) + K_2$; $A(x) = e^{ax}(K_1 - K_3K_4) + K_2 - K_1$; $B(x) = K_3e^{ax}$; $C(y) = \dfrac{K_1(e^{ax}-1)}{K_3} + K_4$ (a, K_1, K_2, K_3, K_4 — произвольные константы, $a \neq 0$, $K_3 \neq 0$).

(*А. Канель, Б. Френкин*)