Лазарь Аронович Люстерник и теория экстремума

В. М. Тихомиров

В последний день позапрошлого года исполнилось сто лет со дня рождения выдающегося математика и замечательного человека — Лазаря Ароновича Люстерника.

Л. А. Люстерник родился в небольшом польском городке Здунска Воля, близ Лодзи 31 декабря 1899 года. В начале Первой мировой войны, желая избегнуть немецкой оккупации, он был вынужден перебраться в Смоленск. (Сёстры его остались в Польше и погибли во Вторую мировую войну.)

Люстерник поступил в Смоленскую гимназию (в которой ранее учился и которую в 1913 году закончил Павел Сергеевич Александров). В 1918 году, по окончании Смоленской средней школы (так стала именоваться гимназия), он поступает в Московский университет на физико-математический факультет.

Лазарь Аронович Люстерник принадлежал к блестящей плеяде учеников Николая Николаевича Лузина.

Его студенческие годы совпали с той порой нашей страны, о которой П. С. Александров писал так: «То были годы необычайного подъёма и увлечения внезапно открывшимися новыми творческими возможностями, годы подлинного цветения для многих молодых людей, впервые вкусивших радость творческого соприкосновения с наукой. Мало найдётся в истории математики периодов столь горячего энтузиазма, как начало двадцатых годов в Московском университете, когда в столь короткий срок, буквально в несколько лет, возникла большая научная школа, в значительной степени определившая развитие математики в нашей стране и сразу выдвинувшая целый ряд выдающихся ученых». Одним из наиболее ярких представителей в этом ряду был Лазарь Аронович Люстерник.

По окончании Университета (1921 г.) Лазарь Аронович был оставлен при нем в качестве «научного сотрудника 2-го разряда». В 1922 г. он становится аспирантом Института математики и механики МГУ.

В 1924 г., будучи аспирантом, Лазарь Аронович впервые выступает с докладом на Московском математическом обществе и сдает в печать первую научную работу. Лазарь Аронович обладал замечательным чувством юмора. После своего первого доклада на Московском математическом обществе, он был принят в члены этого общества, и тогда же ему был вручён ключ от специального туалета, куда допускались лишь члены Общества. «Это был первый закрытый распределитель в моей жизни», — так заключает Лазарь Аронович этот эпизод своей жизни.

Его «выпускная аспирантская работа» «Прямые методы вариационного исчисления» (1926 г.) по представлению Института математики и механики МГУ награждается премией Наркомпроса. В 1927 году Лазарь Аронович становится приват-доцентом МГУ и начинает читать там свои первые специальные курсы. В 1928 году он участвует в работе Международного математического конгресса в Болонье, где выступает с докладом «Топологические методы в дифференциальной геометрии». В том же 1928 году он избирается на должность профессора Нижегородского Госуниверситета. Но там он проработал недолго.

В 1930 году Люстерника избирают на должность профессора МГУ (в звании профессора, а одновременно и в степени доктора физико-математических наук, он утверждается в 1935 году с образованием в нашей стране ВАКа).

Широта научных интересов Лазаря Ароновича была необыкновенной: дифференциальные уравнения, топология, вариационное исчисление, функциональный анализ, геометрия, вычислительная математика, специальные функции и многое другое. Люстерник был и геометром, и аналитиком. Для его математического стиля характерно движение от простого к сложному, в основе далёких обобщений у него всегда лежала простая модель.

О некоторых работах по теории экстремума, в частности, о его исследованиях в вариационном исчислении и по методу сеток мы далее поговорим более подробно.

Обо всём этом он впоследствии сказал в стихах:

«Я стал работать в направленьях
Тогда в Москве совсем не модных —
Вариационном исчисленьи,
Задачах в частных производных…
Я метод сеток развивал.»

В 20-е – 30-е годы Лазарь Аронович (совместно со Львом Генриховичем Шнирельманом) создаёт совершенно новую математическую область — топологические методы нелинейного анализа. Лазарь Аронович вводит новый гомотопический инвариант — категорию, и в работе, совместной с Л. Г. Шнирельманом, успешно применяет это понятие к оценке числа критических точек гладкой функции на гладком многообразии. Итогом их исследований явилось решение классической проблемы Пуанкаре о трех геодезических, и этот результат вошел в число высших мировых достижений нашего века в математике. (Об этом направлении рассказывалось в нашей совместной с В. В. Успенским статье о Л. Г. Шнирельмане, опубликованной в предыдущем номере «Математического просвещения».)

Предвоенные исследования Лазаря Ароновича были посвящены теории обыкновенных дифференциальных уравнений (им были получены замечательные результаты по качественному поведению собственных функций нелинейных задач типа Штурма-Лиувилля), функциональному анализу (доказанная им теорема о касательном пространстве лежит в самой основе современной теории экстремальных задач, об этом также пойдёт речь далее), геометрии (общеизвестным стало его обобщение классического неравенства Брунна – Минковского об объёме векторной суммы выпуклых тел на случай произвольных множеств).

С 1934 года Лазарь Аронович, не прекращая связи с мехматом, стал работать в Математическом Институте им. В. А. Стеклова АН СССР. В годы войны под его руководством там выполнялись спец-исследования оборонного значения. В частности, им были разработаны и внедрены таблицы, позволяющие штурманам самолётов быстро определять по данным прибора положение самолёта. Для реализации этой работы требовались вычисления большого объёма. Это привело к необходимости создания и совершенствования вычислительных средств. Л. А. Люстерник проявил глубокое понимание перспектив развития прикладной математики. Некоторые его ученики и сотрудники уверяли меня, что сами термины «вычислительная математика» и «вычислительная техника» были впервые употреблены Лазарем Ароновичем!

В 1942 году Лазарем Ароновичем была в кратчайший срок (что было обусловлено органами НКВД) решена задача о составлении таблицы для определения курсового угла и расстояния — необходимые для пилота свéдения. Они до войны вычислялись достаточно сложно. В разработанной таблице по координатам начального и конечного пунктов сразу же определялись путевые углы и длина при следовании по геодезической. Для этого две функции трёх переменных были представлены, как суперпозиции функций двух переменных — одна точно, а другая с достаточной степенью приближения.

Лазарь Аронович был избран член-корреспондентом АН СССР в 1946 г., в том же году он был удостоен звания лауреата Сталинской премии — высшего премиального отличия в те времена.

В послевоенные 40-е годы, когда развернулась работа по созданию, как тогда называли, «отечественных АЦМ» (автоматических цифровых машин), Л. А. Люстерник стал заведующим отделом Института точной механики и вычислительной техники АН СССР. Он был одним из инициаторов открытия в СССР такого института, также как и создания в МГУ и в некоторых других вузах нашей страны кафедр вычислительной математики. Лазарь Аронович активно занялся совершенно новым для того времени кругом проблем, связанных с программированием. Благодаря нему в СССР появилась первая научная группа по работе на вычислительных машинах, а затем и первая советская книга по программированию (Л. А. Люстерник, А. А. Абрамов, В. И. Шестаков, М. Р. Шура-Бура «Решение математических задач на автоматических цифровых машинах», М.: Изд-во АН СССР, 1952). Лазарь Аронович явился и первым в СССР лектором по курсу программирования.

В 50-е – 60-е годы у Лазаря Ароновича происходит новый творческий взлёт — и появляется блестящий цикл его работ (совместных с Марком Иосифовичем Вишиком) по асимптотическим разложениям решений уравнений с малым параметром, задачам с барьерами и с быстро меняющимися граничными функциями, по возмущению несимметрических матриц и операторов.

Огромную роль сыграл Л. А. Люстерник в самой истории механико-математического факультета МГУ. Он был первым, кто прочел на факультете курс лекций по функциональному анализу и открыл по нему (совместно с Абрамом Иезекииловичем Плеснером) научно-исследовательский семинар. Вместе с Михаилом Александровичем Лаврентьевым он коренным образом модернизировал университетский курс вариационного исчисления. Одним из первых он объявил факультетский семинар по вычислительной математике — еще до организации соответствующей кафедры, профессором которой он впоследствии работал (до перехода на кафедру ОПУ — общих проблем управления). Он же организовал затем семинар по математическим вопросам управления производством. Добавим, что он был первым заведующим кафедрой функционального анализа мехмата МГУ, был среди организаторов первых Московских школьных математических олимпиад, первым ответственным редактором журнала «Успехи математических наук». Среди учеников Лазаря Ароновича 20 докторов наук и около 50 кандидатов наук.

С приходом на кафедру ОПУ Лазарь Аронович сразу же стал читать на ней специальные курсы и вести научно-исследовательские семинары. Именно на этой кафедре он занялся разработкой нового научного направления — вероятностных методов в теории специальных функций. Незадолго до своей кончины им была опубликована основополагающая статья и в этой области.

С 1969 года под редакцией Л. А. Люстерника на мехмате МГУ стали выходить сборники трудов из серии «Математические вопросы управления производством». Серия возникла в связи с работой одноименного семинара под его руководством, но в дальнейшем включила в свой круг интересов и другие исследования, проводившиеся на кафедре ОПУ. Всего было издано девять сборников этой серии.

Последние годы своей жизни Лазарь Аронович провёл на кафедре общих проблем управления. До этого он работал на кафедре вычислительной математики, которая после организации нового университетского факультета — Вычислительной математики и кибернетики, перешла туда. Но Лазарь Аронович не пожелал расставаться с мехматом и из всех кафедр мехмата выбрал кафедру ОПУ. Я всегда воспринимал это, как подарок судьбы.

Лазарь Аронович, как и многие его великие сверстники, был легендарной фигурой. Про него можно было услышать много смешных рассказов. Часто люди боятся показаться смешными, и, как правило, это свидетельствует либо об ограниченности их личности, либо о том, что они преисполнены недоброжелательства. Светлая личность высвечивается лучами юмора. Вот два примера из жизни Лазаря Ароновича.

Однажды Евгений Михайлович Ландис, будучи студентом, должен был сдать спецкурс Люстернику. Они встретились в назначенное время, Люстерник задал вопрос и куда-то вышел. Вскоре он вернулся, но не начал экзамена, а стал разговаривать с Ландисом о математике (Ландис был активным участником многих семинаров). Это длилось около часа. Наконец, Люстерник нетерпеливо посмотрел на часы и сказал: «Ну куда же он пропал?». «Кто-то должен подойти?» — спросил Ландис. «Ну конечно, где же тот студент, которого мы с Вами должны были экзаменовать?».

В 1975 году Лазарь Аронович вышел на пенсию. Как-то незадолго до этого он определил тот момент, когда профессор МГУ должен выходить на пенсию. Многие знают, что для того, чтобы открыть парадную дверь главного входа МГУ требуются немалые усилия. Лазарь Аронович пошутил как-то, что профессор МГУ может работать лишь до того момента, когда он сам без посторонней помощи может открывать эту дверь.

Лазарь Аронович Люстерник скончался 23.07.1981.

В память о нем в сентябре 1999 года кафедра ОПУ, совместно с МИ РАН и Международным Банаховым центром, провели в Варшаве и Бендлево (близ Познани) мини-симпозиум, посвященный 100-летию со дня рождения Лазаря Ароновича Люстерника.

* * * * * *

А теперь коснёмся некоторых собственно математических тем в творчестве Лазаря Ароновича Люстерника.

Л. А. Люстерник стоял у истоков прямых методов и методов сеток в численном анализе. Еще в 1924 году он первым применил метод конечных разностей для доказательства существования решений уравнений с частными производными (уравнений Лапласа) в криволинейных областях. «Мне показалось естественным, — пишет он по этому поводу в своих воспоминаниях, — рассматривать вариационные задачи как пределы соответствующих задач для функций, заданных в конечном числе точек. Тогда, например, условие Якоби положительности второй вариации возникает, как предельное для условия Сильвестра. Поскольку в аспирантскую программу входило доказательство существования решения задачи Дирихле для плоского уравнения Лапласа, я попробовал доказать это предельным переходом от соответственной «сеточной задачи» и был даже удивлен, что такой «грубый» метод доказывал теорему в «тонких» случаях — даже когда граница не содержит континуальных компонент». От этой работы потянулся след, ощутимый и в наши дни. Тогда же состоялись плодотворные научные контакты Люстерника с Петровским, приведшие к первой публикации Ивана Георгиевича.

Заключим наш рассказ сюжетом:

Метод Ньютона, теорема об обратной функции и теорема Люстерника

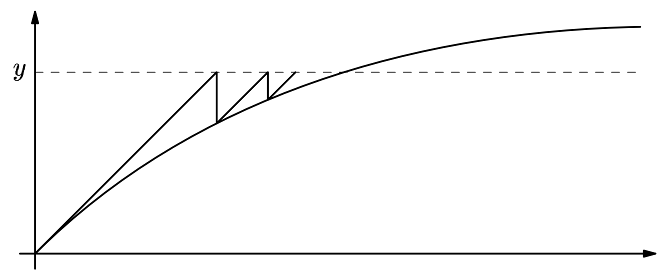
Свои основные открытия в области математического анализа И. Ньютон совершил в начале шестидесятых годов семнадцатого столетия, когда ему было около двадцати лет. В частности, он научился решать уравнения $f(x) = y$, где f — функция одного переменного. Свой метод он проиллюстрировал на примере решения уравнения $x^3 - 2x = 5$ (см. в книге И. Ньютон. Математические работы. М-Л, Изд-во технико-теоретической литературы, 1937, с. 9). В качестве начального приближения Ньютон выбирает число 2, далее полагает $x = 2 + p$ и, подставляя в исходное уравнение, приходит к новому: $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, «у которого, — пишет Ньютон, — следует определить корень p, чтобы прибавить его к первому результату. Отсюда (пренебрегая $p^3 + 6p$ по малости) имеем приблизительно $10p - 1 = 0$ или $p = 0.1$. Поэтому я пишу в результате 0.1 и полагаю $0.1 + q = p$; это выражение я подставляю, как и раньше, и при этом получается $q^3 + 6.3q^2 + 11.23q + 0.061 = 0$». Совершив ещё одну итерацию, Ньютон получает такое приближение: $x \approx 2.09455147$. (На самом деле ответ такой: $2.094551481\ldots$, т. е. Ньютон вычислил корень с точностью до восьмого знака после запятой!)

В нашем фрагменте по сути дела изложен метод Ньютона решения уравнения $f(x) = y$, состоящий в том, что после выбора начального приближения x_0 далее применяется итеративная процедура: $x_{k+1} = x_k + (f'(x_k))^{-1}(y - f(x_k))$, $k = 0, 1, 2 \ldots$.

Роль, которую суждено было сыграть методу Ньютона в истории математики, совершенно исключительная. Одно из важнейших приложений его — доказательство теоремы об обратной (и неявной) функции.

Сформулируем теорему об обратной функции в самом простейшем (опять-таки — одномерном) случае.

Теорема 1 (об обратной функции в одномерном случае). *Пусть f — функция одного переменного, определённая в окрестности нуля, равная нулю в нуле, непрерывно дифференцируемая в окрестности нуля причём $f'(0) \neq 0$. Тогда найдётся такое число $\delta > 0$, что для любого числа y такого, что $|y| < \delta$, существует единственное решение $x(y)$ уравнения $f(x) = y$.*



Геометрическая суть доказательства этой теоремы изображена нами на рисунке, а аналитическое содержание изображённого состоит в применении *модифицированного* метода Ньютона:

$$x_0 = 0, \quad x_{k+1} = x_k + (f'(0))^{-1}(y - f(x_k)), \ k \geqslant 0.$$

Этот результат естественно приписать самому Ньютону. Двумерные обобщения этой теоремы появились лишь в XIX веке, в конце XIX века и в первом десятилетии XX столетия эта теорема получила многомерное развитие, а в 1934 году Лазарь Аронович Люстерник дал бесконечномерное обобщение этой теоремы. Оно было опубликовано в журнале «Математический сборник» (Л. А. Люстерник. Об условных экстремумах функционалов. Матем. сб. т. 41, №3, 1934, с. 390 – 401.) Сначала мы сформулируем прямое обобщение теоремы 1, а затем, в качестве простого следствия из него, выведем сам результат Люстерника.

Теорема 2 (об обратной функции в бесконечномерном случае). *Пусть X и Y — банаховы пространства, U — окрестность нуля в X, $F\colon U \to Y$ — отображение из X в Y, $F(0) = 0$, непрерывно дифференцируемое в окрестности нуля, причём $F'(0)$ отображает X на всё Y. Тогда найдётся такое $\delta > 0$, что для любого $y \in Y$ такого, что $\|y\|_Y < \delta$, существует решение $x(y)$ уравнения $F(x) = y$ такое, что $\|x(y)\|_X \leqslant K\|y\|_Y$ (для некоторой константы $K > 0$).*

Понятие банахова пространства обобщает понятие конечномерного евклидова пространства. Ныне студенты университета знакомятся с этим понятием на первых курсах, оно (и начала теории банаховых пространств) стали теперь абсолютно общепринятыми. А в том далёком 1934 году теории банаховых пространств исполнилось всего лишь два года. Автором теории был замечательный польский математик Стефан Банах, который в 1932 году опубликовал свой знаменитый мемуар «Théorie des opérations linéaires» (Теория линейных операций), в котором заложил основы теории, ставшей одной из существенных составных частей функционального анализа. Знания по теории банаховых пространств в те годы в Москве черпались из двух экземпляров этой книги. Один принадлежал Плеснеру (и потому, вероятно, был доступен Люстернику), другой — Колмогорову. Поразительно, что Лазарь Аронович так быстро сумел извлечь из новой теории столь фундаментальный результат.

Школьник, не владеющий понятием банахова пространства, может считать, что X — это, например, трёхмерное, а Y — двумерное пространство с евклидовой нормой. При доказательстве используются только самые обычные свойства нормы (в основном, неравенство треугольника) и один важнейший принцип линейного анализа (т. е. теории банаховых пространств), а именно, теорема Банаха об обратном операторе, которую мы сформулируем в виде теоремы *о правом обратном*: *пусть X и Y — банаховы пространства и $\Lambda\colon X \to Y$ — линейный, непрерывный оператор, отображающий X на всё Y, тогда существуют оператор $R\colon Y \to X$ и константа $C > 0$ такие, что $\Lambda R y = y$ $\forall y \in Y$ и $\|R(y)\|_X \leqslant C\|y\|_Y$.* (Люстерник, естественно, использует этот факт, но ссылается почему-то не на Банаха, а на Хаусдорфа, не указывая даты его работы; историкам математики разумно разобраться, что это за работа и как она связана с теоремой Банаха.) А теперь приведём доказательство теоремы 2.

Доказательство. Доказательство теоремы основывается на том же модифицированном методе Ньютона:

$$x_0 = 0, \quad x_{k+1} = x_k + R(y - F(x_k)),\ k \geqslant 0,$$

где R — оператор, правый обратный к $F'(0)$. Остаётся доказать, что для малых y метод итераций сходится к решению $x(y)$ уравнения $F(x) = y$. При этом бесконечномерный случай нисколько не сложнее одномерного.

Обозначим $F'(0) = \Lambda$, тогда $\Lambda R y = y$ и $\|Ry\|_X \leqslant K\|y\|_Y$ $\forall y \in Y$. Выберем число $\delta > 0$ столь малым, чтобы отображение F было непрерывно-дифференцируемым в δ-окрестности нуля и из $\|x'\| < \delta$ и $\|x\| < \delta$ вытекало бы неравенство

$$\|F(x') - F(x) - \Lambda(x' - x)\| \leqslant \frac{1}{2K}\|x' - x\|.$$

Пусть $\|y\|_Y < \dfrac{\delta}{2K}$. Тогда $\|x_1\|_X = \|Ry\|_Y \leqslant K\|y\|_Y < \delta/2 < \delta$. По индукции покажем, что $\|x_n\|_X < \delta$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть элементы $\{x_k\}_{k=1}^n$ обладают этим свойством и $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда в силу того, что $y - F(x_k) - \Lambda(x_{k+1} - x_k) = 0$, получаем:

$$\begin{aligned}
&\|x_{k+1} - x_k\|_X \leqslant \\
&\qquad \leqslant K\|y - F(x_k)\|_Y = K\|y - F(x_k) - y + F(x_{k-1}) + \Lambda(x_k - x_{k-1})\|_Y \leqslant \\
&\leqslant \frac{K}{2K}\|x_k - x_{k-1}\|_X = \frac{1}{2}\|x_k - x_{k-1}\|_X \leqslant \frac{1}{4}\|x_{k-1} - x_{k-2}\|_X \leqslant \dots \leqslant \frac{1}{2^k}\|x_1\|_X.
\end{aligned}$$

Отсюда в силу неравенства треугольника будем иметь

$$\|x_n\|_X = \|x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - \ldots + x_2 - x_1 + x_1\|_X \leqslant (\frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + 1)\|x_1\|_X < \delta.$$

Итак, x_n определены для всех n и, как легко понять, эта последовательность является последовательностью Коши. Значит, $x_n \to x(y)$ при $n \to \infty$. Ввиду того, что $\|y - F(x_n)\|_Y \leqslant \dfrac{\delta}{K2^n}$ получаем, что $F(x(y)) = y$ и $\|x(y)\|_X \leqslant 2\|x_1\|_X \leqslant \leqslant 2K\|y\|_Y$. □

Замечание. Если бы мы начали свой итеративный процесс не с нуля, а с достаточно малого x, мы пришли бы к элементу $\varphi(x, y)$ такому, что $F(x+\varphi(x, y)) = y$ и при этом $\|\varphi(x, y)\|_X \leqslant C\|y - F(x)\|_Y$.

Теперь сформулируем и докажем теорему Люстерника о касательном пространстве. Пусть X — нормированное пространство и M — некоторое его подмножество. Элемент x называется *касательным* к M в точке $\widehat{x} \in M$, если существует отображение $r\colon [-1, 1] \to X$ такое, что $\widehat{x} + tx + r(t) \in M$ $\forall t \in [-1, 1]$ и $\|r(t)\| = o(t)$ при $t \to 0$. Множество касательных векторов к M в точке $\widehat{x}$ обозначается $T_{\widehat{x}}M$. Если это множество является подпространством X, то оно называется *касательным пространством* ко множеству M в точке $\widehat{x}$.

Теорема 3 (Люстерника о касательном пространстве). *Пусть X и Y — банаховы пространства, U — окрестность точки $\widehat{x}$ и $F\colon U \to Y$ — отображение, непрерывно-дифференцируемое в U, причём $F'(\widehat{x})$ отображает X на всё Y. Тогда если $M = \{x \in X \mid F(x) = F(\widehat{x})\}$, то $T_{\widehat{x}}M = \operatorname{Ker} F'(\widehat{x})$.*

Доказательство. Не ограничив себя в общности, считаем, что $\widehat{x} = 0$ и $F(0) = 0$. Пусть $x \in T_0M$. Тогда $0 = F(0) = F(tx + r(t)) = tF'(\widehat{x})x + o(t)$, откуда сразу следует, что $F'(0)x = 0$, т. е. $T_0M \subset \operatorname{Ker} F'(0)$.

С другой стороны, если $x \in T_0M$, то, положив $r(t) = \varphi(tx, 0)$, получаем $F(tx + r(t)) = F(tx + \varphi(tx, 0)) = 0$ (а значит, $tx + r(t) \in M$), и при этом

$$\|r(t)\|_X = \|\varphi(tx, 0)\|_X \leqslant K\|F(tx)\|_Y = K\|tF'(0)x + o(t)\|_Y = o(t),$$

т. е. $\operatorname{Ker} F'(0) \subset T_0M$. Теорема доказана.

Происхождение этой теоремы, по-видимому, связано с работой Л. А. Люстерника совместно с М. А. Лаврентьевым над учебником по вариационному исчислению. Он был издан в следующем году (М. А. Лаврентьев, Л. А. Люстерник. Основы вариационного исчисления. М-Л.: ОНТИ, 1935, т. 1, 2.) Лазарь Аронович явно указывает в статье, что одной из целей статьи являлось включение вариационного исчисления в общую схему теории экстремума в функциональном анализе. Но почему-то в самом учебнике теория условий экстремума была построена традиционным путём, без применения методов функционального анализа.

Когда спустя сорок пять лет мы с Владимиром Михайловичем Алексеевым написали наш учебник по оптимальному управлению (В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979), мы подарили его Лазарю Ароновичу. Спустя некоторое время (когда В. М. Алексеева уже не было в живых) Лазарь Аронович вдруг позвонил мне. Он поблагодарил за подаренную книгу и сказал с некоторым смущением, что не подозревал о том, что его теорема может лечь в основание общей теории экстремума.

Скорее всего, Лазарь Аронович лукавил немного, конечно, он нечто подобное «подозревал», но что-то, наверное, отвлекло его тогда от осуществления широкой программы модернизации теории экстремальных задач, а потом он позабыл о своих замыслах.

А теорема Люстерника ныне — одна из самых цитируемых его теорем.