

# Нам пишут. . .

---

---

## Программа курса лекций на двухгодичном потоке ФМШ им. М. А. Лаврентьева, СУНЦ НГУ

В. В. Войтишек

Вацлав Вацлавович Войтишек, доцент кафедры математики СУНЦ НМУ, предлагает сравнить приводимую ниже программу с программой «Матшкольник», опубликованной в №2 третьей серии «Математического просвещения».

### ДЕСЯТЫЙ КЛАСС. ПЕРВОЕ ПОЛУГОДИЕ

#### МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ НАУКИ

1. Комплексные числа. Формы записи. Основные действия, их геометрический смысл (включая инверсию и стереографическую проекцию). Формула Муавра. Корни из единицы.
2. Интеграл. Формулы бруса, трапеции, параболы. Метод удвоения. Натуральный логарифм: площадь подграфика  $0 \leq xy \leq 1$  при  $x \geq 1$ . Вычисление  $\pi$ .
3. Первая, вторая,  $n$ -я производная. Формула Тэйлора для квадратного трехчлена и основных функций. «Правило дождя». Задача о ракете. Формула Ньютона – Лейбница. Криволинейный интеграл.
4. Этапы анализа функции  $y = f(x)$ . Список основных функций и соответствий в  $\mathbb{R}^3$  (85 названий). Метод линий уровня.
5. Основные отображения  $w = f(z)$ . Понятие о римановой поверхности (15 примеров).
6. Матрицы, определители, характеристические уравнения (второй, третий порядок). Преобразование координат. Углы Эйлера. Обратная матрица.
7. Элементы анализа в  $\mathbb{R}^3$ . Параметрическое задание кривых и поверхностей. Градиент, касательная плоскость, якобиан.
8. Элементы топологии. Эйлера характеристика. Существование правильных многогранников. Классификация поверхностей.

9. Гиперболические поворот и функции. Преобразование Лоренца (по книге Л. И. Головиной «Линейная алгебра и некоторые ее приложения», изд. М.: Наука, 1985).
10. Решение систем уравнений. Симметрические полиномы. Орбиты. Формула Варинга.

### ДЕСЯТЫЙ КЛАСС. ВТОРОЕ ПОЛУГОДИЕ

#### Год спокойной математики

11. Способы приближения функций другими функциями. Полиномы и ряды Тэйлора и Фурье. Многочлены Чебышева, наименее отклоняющиеся от нуля.
12. Интерполяция. Формулы Лагранжа и Ньютона. Сплаины.
13. Коэффициенты Фурье. Сложение гармоник. Среднее квадратичное отклонение.
14. Целые числа и многочлены. НОД, НОК, схема Горнера, алгоритм Эвклида, цепные дроби. Золотое сечение, соизмеримость отрезков.
15. Многочлены над  $\mathbb{Z}$ . Нули целые, рациональные. Границы нулей. Метод касательных для их нахождения. Сжимающие отображения. Неподвижные точки.
16. Существование комплексных корней многочленов над  $\mathbb{Z}$  ( $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ). Метод Лобачевского для нахождения всех нулей многочлена.
17. Конические сечения. Шары Данделена. Различные определения и свойства конических сечений. Квадратура. Выпуклые части. Биполярные и эллиптические координаты.
18. Углубленное изучение этапов анализа функции. Четность. Периодичность. Монотонность. Обратимость. Выпуклость.
19. Поведение функции на краю  $\text{Dom}(y)$  — характер разрывов, асимптоты.
20. Построение графиков уравнений и неравенств. Фазовые портреты функции  $x(t)$ .

### ВЫПУСКНОЙ КЛАСС. ПЕРВОЕ ПОЛУГОДИЕ

21. Суммирование. Константа Эйлера. Классические последовательности и суммы.
22. Азбука пределов  $(x_n)$  и  $\lim f(x)$ . Теоремы Штольца. Условие Липшица. Сжатие.
23. Основные правила комбинаторики. Конечные группы.
24. Формула Муавра – Стирлинга для  $n!$
25. Вероятность. Выборки. Схема и теорема Я. Бернулли. Аксиомы А. Н. Колмогорова. Математическое ожидание, дисперсия, условная вероятность. Неравенство П. Л. Чебышёва. Что такое математическая статистика?
26. Элементы теории информации. Мера энтропии. Неравенство Йенсена.
27. Баричесентрические координаты. Средние величины. Классические неравенства.

28. Число в планиметрии (умножение вектора на число, меры углов, длин, площадей).
29. Число в стереометрии. Объем, площадь поверхности. Расстояния между точками, прямыми, плоскостями.
30. Элементы теории множеств. Счетность. Континуум. Канторово множество. Начальные сведения о мере Лебега. Фигуры Серпинского. Понятие области.
31. Профессия математика (перспективы). Математические центры России, зарубежья.
32. Институт математики СО РАН.

### ВЫПУСКНОЙ КЛАСС. ВТОРОЕ ПОЛУГОДИЕ

#### АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ КУРС В. В. ВОЙТИШЕКА

33. Развитие идей математики (с Ньютоном 357 лет, без Гильберта — 57). (январь)
34. Элементы проективной геометрии. Модель проективной плоскости. Теоремы Паппа, Дезарга, Паскаля, Бриансона. Конечные проективные пространства (по А. И. Ширшову). (февраль)
35. Подход к модели плоскости Н. И. Лобачевского (Э. Бельтрами, Ф. Клейн, А. Пуанкаре). (март) Топологии 105 лет.
36. Эквидистанты, орициклы, гиперциклы, расстояния, угол параллелизма Лобачевского (по книге Б. В. Шабата «Введение в комплексный анализ», часть I, изд. 3. М.: Наука, 1985).
37. Теорема Пифагора в плоскости Лобачевского. Пентаграмма Непера. (март-апрель)
38. Как вычисляли интеграл: задачи Архимеда, яблоко Кеплера, пика Торичелли, подход Лейбница, Коши, Римана, Лебега. (апрель-май)

#### ДРУГИЕ АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ КУРСЫ

39. Основные сведения о дифференциальных уравнениях. Графическое интегрирование, изоклины, метод ломаных. Фазовые плоскости.
40. Метод разделения переменных. Однородные уравнения. Знакомство с групповым анализом дифференциальных уравнений по Л. В. Овсянникову.

#### ЛИТЕРАТУРА ПО КУРСУ В. В. ВОЙТИШЕКА

- [ВИСКУ] Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том 1, том 2.
- [Кл] Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Том 1, том 2. М.: Наука, 1987.
- [ФаНиСо] Фаддев Д. К., Никулин М. С., Соколовский И. Ф. Элементы высшей математики для школьников. М.: Наука, 1987.
- [КиР] Курант Р., Робинс Г. Что такое математика? М.: Просв., 1967.
- [ПоГеВу] Погорелов А. В. Геометрия для вузов. М.: Наука, 1984.
- [Болт] Болтянский В. Г. Элементарная геометрия. М.: Просв., 1985.

- [Ш] Шашкин Ю. А. Неподвижные точки. М.: Наука, 1989. (сер. «Популярные лекции по математике», вып. 60)
- [бибК] Библиотечка «Квант» — математические выпуски 17, 21, 22, 23, 56, 61, 64, 77, 83.
- [К] Журнал «Квант» (РАН, РАО) — годовая подписка.
- [Э] Энциклопедии — БСЭ, ДЭ, МЭ, МЭС, ЭЭМ, ЭСКМ.
- [ЛаШа] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы ТФКП. Изд. 5. М.: Наука, 1987.
- [БеГ] Берже М. Геометрия. Том 1, 2. М.: Мир, 1984.
- [АВРы] Александров А. Д., Вернер А. П., Рыжик В. И. Геометрия. М.: Просв., 1988.
- [ВГ] Вейль Г. Математическое мышление. М.: Наука, 1989.
- [БиС] Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. М.: Наука, 1985.

ПРОГРАММА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ (ПО КУРСУ  
В. В. ВОЙТИШЕКА)

1. Повторение — сентябрь, октябрь.

Алгебра — решение типичных систем неравенств ( $\geq 1$ ) между элементарными функциями [БАНА, гл. 6]; [ДПР]; [ЯкПе-3, гл. 1, 3, 7, 8]. Геометрический смысл систем и решений в  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ .

Планиметрия — теорема Пифагора (12 доказательств) [КиС], [АГ], [Пр, часть 1]; окружность и задача Аполлония [Пр, часть 1, гл. 9]; задачи на построение [ПоГеВу, гл. 22]; площадь круга.

2. Текущие занятия — октябрь — май.

Анализ — нахождение производных порядка  $n \geq 2$  и построение графиков основных функций [Ку, том 1], [Вин, гл. 1], [БАНА]. Нахождение первообразных для функций из физики, экономики. [Ку, том 2, гл. 1, 2]. Использование разложений по формуле Тэйлора [Ку, том 1, §19]. Построение графиков соответствий (и неявных функций) в декартовой, полярной, цилиндрической системах координат, включая и параметрически заданные кривые ([Ку, том 1, 7.1–7.283; 24.1–24.70], [Вин, гл. 1]) и поверхности [ПоГеВу].

Решение задач Архимеда, используя принцип Кавальери [Ку, том 2, 8.63–8.70].

Геометрия — стереометрия — занимательные задачи по черчению, построение сечений [ЯкПе-3, гл. 16, 17]; параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей [КиС], [АГ], [ЯкПе-3]; теорема о трех перпендикулярах, коэффициент искажения площади при ортогональном проектировании [ПоГеВу].

Геометрия — планиметрия — инверсия и стереографическая проекция [К, №7, 86], [ПоГеВу], [ВИСКУ, том 2], [Кл, том 1], [КиР], [ЛаШа], [Пр, часть 2, гл. 28].

Алгебра — формулы сложения круговых функций [БАНА], [ДПР], [ЯкПе-3]. Обратные круговые функции [ДПР], [Ку, том 1]. Действия с комплексными числами [Ку, том 1], [ФиС]. Корни из единицы.

Действия с матрицами, определителями, характеристическими уравнениями [ФиС].

### ИТОГ

На первом экзамене учащийся решает, например, такие задачи:

1. В каком отношении делит плоскость (прямая) объем (площадь) правильного многогранника (многоугольника), если она проходит через вершину, середину ребра и центр грани?
2. Пусть  $M$  — множество всех действительных чисел на  $z$ -плоскости и тех  $z \in \mathbb{C}$ , что расположены на расстоянии 2 от числа  $1 + 2i$ . Перечислить дробно-линейные преобразования, переводящие  $M$  в себя.
3. Вычислить ([Ку, том 2, 8.70.4]) объем тела, если  $by = x(a - z)$ ,  $bx = x(z - a)$ ,  $x = b$ ,  $z = 0$  — граница тела.

### НОВЫЕ ТЕМЫ

(ГОД СПОКОЙНОЙ МАТЕМАТИКИ), (ЯНВ.)

1. Алгоритмы, связанные с многочленами [ФиС].
2. Ряды Фурье. Простейшие разложения [Ку, том 2].
3. Конические сечения (пособие В. В. Войтишека «Введение в математику», НГУ, 1978).
4. Этапы анализа функции (нахождение нулей, четность, периодичность, монотонность, обратимость) [Ку, том 1].

### В ВЫПУСКНОМ КЛАССЕ

5. Этапы анализа (окончание): выпуклость, асимптоты, фазовые портреты [Ку, том 1].
6. Комбинаторика, подсчет вероятностей [Ку, том 1].
7. Нахождение сумм [Ку, том 2], вычисление пределов последовательностей, функций [Ку, том 1].
8. Использование алгебраических формул (включая определители) для нахождения величин, связанных с геометрическими фигурами на плоскости и в пространстве [БиС].
9. Градиент, касательная плоскость, якобиан.
10. Решение задач вступительного экзамена за последние три года в НГУ, МГУ, МФТИ, МИФИ, МГТУ, ПГУ, по журналу «Квант» и задачки В. С. Белоносова и М. В. Фокина, изд. 5, СО РАН, НГУ, 2000.

ПРИМЕЧАНИЕ. Остальные темы школьной математики (см. [БАНА], [АГ]) учащиеся и преподаватели выбирают, затем изучают самостоятельно.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [КиС] Киселев А. П. Элементарная геометрия. Книга для учителей. М.: Просв., 1980.

- [БАНА] Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа 10–11. Изд. 2. М.: Просв., 1992.
- [Ку] Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. М.: Наука. Том 1, 1984. Том 2, 1986.
- [АГ] Атанасян Л. С. и др. Геометрия 10–11. М.: Просв, 1992.
- [Пр] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Изд. 2, часть 1, часть 2. М.: Наука, 1989.
- [ПраШ] Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. М.: Наука, 1989.
- [ДПР] Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. Изд. 5. М.: Наука, 1976.
- [ЯкПе-3] Пособие по математике для поступающих в вузы под ред. Яковлева Г. Н. Изд. 3. М.: Наука, 1988.
- [ФиС] Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. Изд. 11. М.: Наука, 1977.
- [Вин] Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Задачи и упражнения по математическому анализу. М.: МГУ, 1988.

### Уточнения

В прошлом номере обсуждалась задача С. Берлова со Всероссийской Олимпиады 1999 года и доказательство более общего факта, найденное И. Межировым непосредственно на олимпиаде. А. Шень (который поместил материалы об этой задаче в *The Mathematical Intelligencer*) получил в ответ на свою публикацию следующее уточнение.

Я. Каро ([ya\\_caro@kvgeva.org.il](mailto:ya_caro@kvgeva.org.il)) пишет, что первым эту задачу решил К. Сутнер (*Sutner K. Linear Cellular Automata and the Garden of Eden // The Mathematical Intelligencer, 1989. Vol. 11. No. 2 P. 49–53.*).

Более элементарное доказательство (среди прочих результатов) можно найти в *Caro Y. Simple proofs to three parity theorems // Ars Combinatoria, 1996. Vol. 42. P. 175–180.*

Тод Фейл ([feil@denison.edu](mailto:feil@denison.edu)) сообщил о своей совместной с М. Андерсоном статье в *Amer. Math Monthly* (vo. 71, No. 4, Oct 1998, pp. 300–303), где они приводят, наряду с прочими замечаниями и наблюдениями по поводу этой задачи, более элементарное описание разрешимых конфигураций.