

Доказательство теоремы Понселе по Дарбу

В. В. Прасолов

Теорема Понселе состоит в следующем. Пусть заданы две коники Γ_1 и Γ_2 , не касающиеся друг друга. В комплексной ситуации из каждой точки $A_1 \in \Gamma_1$, отличной от точек пересечения Γ_1 и Γ_2 , можно провести ровно две касательных к Γ_2 . Поэтому можно построить ломаную $A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}$ так, чтобы её вершины A_i лежали на Γ_1 , а прямые $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_{n+1}$ касались Γ_2 (подразумевается, что $A_{i+2} \neq A_i$). Предположим, что для некоторой точки A_1 точка A_{n+1} совпала с A_1 , т. е. получилась замкнутая n -звенная ломаная. Тогда и при любом выборе точки $A_1 \in \Gamma_1$ тоже получится замкнутая n -звенная ломаная.

Одно из наиболее понятных доказательств теоремы Понселе предложил Дарбу [Д]. Он заметил, что теорему Понселе удобно доказывать, используя систему координат, в которой положение точки A задаётся двумя касательными к некоторой фиксированной конике, проведёнными из точки A . В качестве фиксированной коники можно выбрать произвольную конику, поскольку проективным преобразованием любую (невырожденную) конику можно перевести в любую другую. Выберем конику, которая в однородных координатах $(x : y : z)$ задаётся уравнением $y^2 = xz$. Точки этой коники имеют координаты $(1 : t : t^2)$; при $t = \infty$ получаем точку $(0 : 0 : 1)$. Касательная в точке $(x_0 : y_0 : z_0)$ задаётся уравнением $2y_0y = x_0z + z_0x$, т. е. $t^2x - 2ty + z = 0$, где t — параметр, соответствующий точке $(x_0 : y_0 : z_0)$. Чтобы найти однородные координаты точки пересечения в точках с параметрами t_1 и t_2 , нужно решить систему линейных уравнений

$$t_i^2x - 2t_iy + z = 0, \quad i = 1, 2.$$

Решая её, получаем

$$2y = x(t_1 + t_2), \quad z = xt_1t_2.$$

ПРИМЕР 1. Исходная коника $y^2 = xz$ в координатах (t_1, t_2) задаётся уравнением $(t_1 + t_2)^2 = 4t_1t_2$, т. е. $(t_1 - t_2)^2 = 0$.

ПРИМЕР 2. Касательная к исходной конике в точке $(1 : \alpha : \alpha^2)$ задаётся уравнением $(t_1 - \alpha)(t_2 - \alpha) = 0$.

Нам потребуется описание семейства кривых минимальной степени, проходящих через все точки пересечения n прямых общего положения на плоскости. Каждая из этих прямых пересекает такую кривую в $n - 1$ точках, поэтому степень кривой не может быть меньше $n - 1$.

ЛЕММА (ДАРБУ). Уравнение любой кривой степени $n-1$, проходящей через все точки пересечения прямых, заданных линейными уравнениями $p_1 = 0, \dots, p_n = 0$, имеет вид

$$p_1 \cdot \dots \cdot p_n \left(\frac{\lambda_1}{p_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{p_n} \right) = 0,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — некоторые константы (предполагается, что все точки пересечения данных прямых попарно различны).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть рассматриваемая кривая задаётся уравнением $C = 0$. Возьмём прямую l , пересекающую прямые p_1, \dots, p_n в n различных точках x_1, \dots, x_n , и выберем числа λ_i так, чтобы в точках x_i выполнялось равенство

$$C - p_1 \cdot \dots \cdot p_n \left(\frac{\lambda_1}{p_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{p_n} \right) = 0. \quad (1)$$

Для этого нужно положить

$$\lambda_i = \frac{C(x_i)}{p_1(x_i) \cdot \dots \cdot \hat{p}_i(x_i) \cdot \dots \cdot p_n(x_i)}.$$

Тогда равенство (1) выполняется в n различных точках каждой прямой p_i . Если равенство (1) выполняется не для всех точек плоскости, то оно задаёт кривую степени не выше $n-1$. Но эта кривая должна содержать все прямые p_i , поэтому её степень не может быть меньше n . Приходим к противоречию, поэтому $C = p_1 \cdot \dots \cdot p_n \left(\frac{\lambda_1}{p_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{p_n} \right) = 0$.

Выберем в качестве прямых p_1, \dots, p_n касательные к конике $y^2 = xz$ в точках с параметрами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Согласно лемме Дарбу кривая степени $n-1$, проходящая через точки пересечения этих прямых, задаётся уравнением

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{(t_1 - \alpha_i)(t_2 - \alpha_i)} = 0.$$

Тождество

$$\frac{\lambda_i}{t_1 - \alpha_i} - \frac{\lambda_i}{t_2 - \alpha_i} = \frac{(t_2 - t_1)\lambda_i}{(t_1 - \alpha_i)(t_2 - \alpha_i)}$$

показывает, что после умножения на $t_2 - t_1$ это уравнение можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{t_1 - \alpha_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{t_2 - \alpha_i}.$$

Напомним, что точки, для которых $t_1 = t_2$, лежат на исходной конике $y^2 = xz$. Пусть

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{t - \alpha_i} = \frac{P_{n-1}(t)}{Q_n(t)} = R(t),$$

где $Q_n(t) = (t - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (t - \alpha_n)$ и $P_{n-1}(t)$ — многочлен степени не выше $n-1$.

Равенство $R(t_1) = R(t_2)$ эквивалентно равенству $R_\mu(t_1) = R_\mu(t_2)$, где

$$R_\mu(t) = \frac{P_{n-1}(t)}{Q_n(t) + \mu P_{n-1}(t)}.$$

Это означает, что для всех μ точки пересечения касательных в точках с параметрами $\alpha_1(\mu), \dots, \alpha_n(\mu)$, где $\alpha_1(\mu), \dots, \alpha_n(\mu)$ — корни многочлена $Q_n(t) + \mu P_{n-1}(t)$, лежат на одной и той же кривой степени $n - 1$. Действительно, рациональную функцию $R_\mu(t)$ можно представить в виде

$$R_\mu(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i(\mu)}{t_1 - \alpha_i(\mu)};$$

здесь предполагается, что числа $\alpha_1(\mu), \dots, \alpha_n(\mu)$ попарно различны.¹⁾

Для $n = 3$ и $n = 4$ теорему Понселе теперь легко доказать. При $n = 3$ берём треугольник, вписанный в конику Γ_1 и описанный вокруг коники Γ_2 . Существует однопараметрическое семейство троек прямых, которые касаются коники Γ_2 и точки пересечения которых лежат на конике Γ_1 . При $n = 3$ все точки пересечения прямых являются вершинами рассматриваемой ломаной, а кроме того, никаких проблем с возможным слиянием точек $\alpha_i(\mu)$ не возникает по геометрическим соображениям.²⁾

Для $n = 4$ тоже нет проблем с возможным слиянием точек $\alpha_i(\mu)$, потому что в этом случае могут слиться только точки $\alpha_i(\mu)$, соответствующие соседним звеньям ломаной, а тогда получается касание коник Γ_1 и Γ_2 . Но для $n = 4$ уже не все точки пересечения прямых являются вершинами рассматриваемой ломаной: для четырёхугольника помимо вершин есть ещё и точки пересечения продолжений сторон. Через эти 6 точек пересечения сторон четырёхугольника и их продолжений нужно провести кривую степени 3, причём кривая, проходящая через вершины четырёхугольника, должна быть данной коникой Γ . Такая кривая должна быть объединением коники Γ и прямой l , соединяющей точки пересечения продолжений сторон. Существует однопараметрическое семейство четвёрок прямых, которые касаются данной коники и точки пересечения которых лежат на Γ и l . Вообще говоря, вершина четырёхугольника могла бы при движении «переехать» с коники Γ на прямую l . Но Γ и l не имеют вещественных точек самопересечения.

При $n \geq 5$ проблемы с возможным слиянием точек $\alpha_i(\mu)$ и с переезжанием вершин ломаной с одной ветви кривой на другую становятся более сложными. Поэтому подойдём к задаче по-другому.

Рассмотрим ломаную $A_1 A_2 A_3 \dots$, вершины которой лежат на конике Γ_1 , а звенья касаются коники Γ_2 . Мы снова будем задавать положение точки координатами, связанными с коникой Γ_2 . Будем предполагать, что точка A_i имеет

¹⁾Совпадение чисел $\alpha_i(\mu)$ и $\alpha_j(\mu)$ при $i \neq j$ соответствует тому, что при данном значении μ вместо замкнутой n -звенной ломаной появляется (n/k) -звенная ломаная, которая обходит k раз. В действительности такого не бывает, но это требует отдельного доказательства.

²⁾В условии теоремы Понселе предполагается, что коники Γ_1 и Γ_2 не касаются. Из слияния двух точек $\alpha_i(\mu)$, соответствующих соседним звеньям ломаной, вытекает касание коник. А в треугольнике любая пара сторон соседняя.

координаты (α_{i-1}, α_i) . Коника Γ_1 задаётся уравнением $f(t_1, t_2) = 0$, где

$$f(t_1, t_2) = at_1^2t_2^2 + bt_1t_2(t_1 + t_2) + c(t_1^2 + t_2^2) + dt_1t_2 + e(t_1 + t_2) + f.$$

Выясним, каким уравнением задаётся кривая, на которой лежат точки пересечения прямых $A_{i-1}A_i$ и $A_{i+1}A_{i+2}$. Для этого нужно исключить α_i из соотношений $f(\alpha_{i-1}, \alpha_i) = 0$ и $f(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 0$.

Функцию f можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) &= \alpha(t_1)t_2^2 + \beta(t_1)t_2 + \gamma(t_1) = \\ &= \alpha(t_2)t_1^2 + \beta(t_2)t_1 + \gamma(t_2). \end{aligned}$$

Чтобы исключить α_i из уравнений

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha_{i-1})\alpha_i^2 + \beta(\alpha_{i-1})\alpha_i + \gamma(\alpha_{i-1}) &= 0, \\ \alpha(\alpha_{i+1})\alpha_i^2 + \beta(\alpha_{i+1})\alpha_i + \gamma(\alpha_{i+1}) &= 0, \end{aligned}$$

нужно составить результат

$$\begin{vmatrix} \alpha(\alpha_{i-1}) & \beta(\alpha_{i-1}) & \gamma(\alpha_{i-1}) & 0 \\ 0 & \alpha(\alpha_{i-1}) & \beta(\alpha_{i-1}) & \gamma(\alpha_{i-1}) \\ \alpha(\alpha_{i+1}) & \beta(\alpha_{i+1}) & \gamma(\alpha_{i+1}) & 0 \\ 0 & \alpha(\alpha_{i+1}) & \beta(\alpha_{i+1}) & \gamma(\alpha_{i+1}) \end{vmatrix} = \Phi(\alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}).$$

Точки пересечения прямых $A_{i-1}A_i$ и $A_{i+1}A_{i+2}$ лежат на кривой, заданной уравнением $\Phi(t_1, t_2) = 0$. Непосредственно из определения видно, что $\Phi(t_1, t_2) = \Phi(t_2, t_1)$ и Φ делится на $t_1 - t_2$, поэтому Φ делится на $(t_1 - t_2)^2$. Рассматриваемый результат является многочленом степени 4 (по каждой переменной), поэтому получаем симметричное квадратичное соотношение $f_1(\alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}) = 0$, которое задаёт конику.

Покажем, что и при любом k точки пересечения прямых $A_{i-1}A_i$ и $A_{i+k-1}A_{i+k}$ будут лежать на одной конике. Предположим, что уже известны симметричные квадратичные (по каждой переменной) соотношения

$$f(\alpha_{i-1}, \alpha_i) = 0, \quad f_1(\alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}) = 0, \quad \dots, \quad f_{k-1}(\alpha_{i-1}, \alpha_{i+k-1}) = 0.$$

Мы хотим получить соотношение $f_k(\alpha_{i-1}, \alpha_{i+k}) = 0$. Для этого нужно исключить α_{i+k-1} из системы уравнений $f_{k-1}(\alpha_{i-1}, \alpha_{i+k-1}) = 0$, $f(\alpha_{i+k-1}, \alpha_{i+k}) = 0$. В результате получим соотношение 4-й степени $\Phi(\alpha_{i-1}, \alpha_{i+k}) = 0$. Функция $f(\alpha_{i+k-1}, t)$ обращается в нуль не только при $t = \alpha_{i+k}$, но и при $t = \alpha_{i+k-2}$. Поэтому $\Phi(\alpha_{i-1}, \alpha_{i+k-2}) = 0$. Это означает, что многочлен $\Phi(x, y)$ делится на $f_{k-2}(x, y)$, т. е. делится на соотношение, связывающее α_{i-1} и α_{i+k-2} . Остаётся проверить, что многочлен $f_k = \Phi/f_{k-2}$ симметричен.

Чтобы симметричность соотношения, связывающего α_{i-1} и α_{i+k} , была очевидна, можно это соотношение получить по-другому. Будем последовательно исключать $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{i+k-1}$ из соотношений $f(\alpha_{i-1}, \alpha_i) = 0, f(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 0, \dots, f(\alpha_{i+k-1}, \alpha_{i+k}) = 0$, причём каждый раз полученный многочлен будем сокращать на f_j . Если воспользоваться симметричностью многочленов f, f_1, \dots, f_{k-1} и обратить последовательность вычислений, т. е. исключать $\alpha_{i+k-1}, \dots, \alpha_{i+1}, \alpha_i$, из $f(\alpha_{i+k-1}, \alpha_{i+k}) = 0, \dots, f(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 0, f(\alpha_{i-1}, \alpha_i) = 0$, то в результате получим тот же самый многочлен f_k . Поэтому многочлен f_k симметричен.

Теперь при $n \geq 5$ теорема Понселе легко доказывается, поскольку точки A_1, \dots, A_5 однозначно задают конику, а значит, точки пересечения прямых $A_i A_{i+1}$ и $A_{i+n-1} A_{i+n} = A_{i+n-1} A_i$ лежат на той же самой конике.

Если $n = 2m$, то кривая, по которой движутся точки пересечения продолжений звеньев вписанно-описанной ломаной, должна состоять не из m коник, а из $m - 1$ коник и одной прямой, поскольку степень этой кривой равна $n - 1$. Поясним, почему одна из коник (и какая именно) вырождается в прямую.

Уравнение $f_k(\alpha_{i-1}, x) = 0$ имеет корни $\alpha_{i \pm k}$. Если $k = m$, то эти корни совпадают, поэтому многочлен f_m должен быть квадратом симметричной линейной функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[Д] Дарбу Г. Принципы аналитической геометрии. Л.-М.: ГОНТИ, 1938.