Решения задач из предыдущих выпусков

1.2. Условие. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел N таких, что 2^N оканчивается на N.

Решение. Прежде всего, нетрудно проверить, что

$$2^{36} \text{ оканчивается на } 36. \tag{i}$$

Пусть

$$2^{36} = 10^4 N + 10^3 K + 36. \tag{ii}$$

Покажем, что 2^{10^3K+36} оканчивается на $10^3K + 36$. По ходу дела нам придется воспользоваться тем, что

$$2^{4\cdot 5^3} - 1 \text{ делится на } 5^4, \tag{iii}$$

это следует из бинома Ньютона: $(15+1)^{5^3} - 1 = 5^3 \cdot 15 \cdot N = 5^4 \cdot N_1$. Имеем:

$$2^{10^3K+36} - (10^3K+36) \overset{\text{(ii)}}{=} 2^{10^3K}(10^4N + 10^3K + 36) - (10^3K+36) =$$
$$= 2^{10^3K} \cdot 10^4 N + (10^3K+36)(2^{10^3K} - 1) \overset{\text{Id}}{=} 10^4 N_1 + N_2\left(\left(\left(2^4\right)^{5^3}\right)^{2K} - 1\right).$$

Второе слагаемое делится на 5^4 в силу (iii). С другой стороны, в силу (i) 10^3K+36 делится на 2^4, значит $2^{10^3K+36} - (10^3K+36)$ делится на 10^4, что и требовалось.

Мы совершили первый шаг индукции. Общее построение таково. Положим $a_{m+1} = 2^{a_m}$, b_m — число, образованное последними m цифрами числа a_m, $m \geqslant 2$. Тогда $2^{b_m} - b_m$ делится на 10^m. Предоставим читателю провести m-й шаг индукции самостоятельно.

(В. М. Тихомиров)

1.4. Условие. Дан треугольник ABC. K — точка касания вписанной в него окружности и стороны BC. Рассмотрим две окружности, касающиеся прямой BC, луча AK и окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$ (на рис. 1 изображены пунктиром). Доказать, что их радиусы равны.

Решение. Пусть E — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC, радиус этой окружности обозначим r_a, а γ — окружность, касающаяся продолжений отрезков AK, BK и также касающаяся описанной вокруг треугольника ABC окружности с внешней стороны.

Лемма 1. *Радиус γ равен r_a.*

Утверждение задачи сразу следует из леммы 1. Оказывается, обе пунктирные окружности на рис. 1 не только равны между собой, но и равны вневписанной окружности.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 5, 2001(218–229)

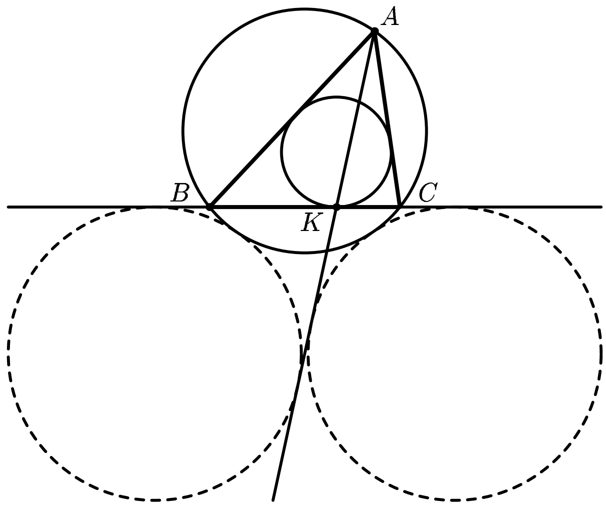

Рис. 1.

Лемма 1 выводится из следующего утверждения. Пусть K' — произвольная точка на стороне BC, γ' — окружность, касающаяся продолжений отрезков AK' и BK' (точки касания обозначим M и L соответственно) и также касающаяся описанной вокруг треугольника ABC окружности с внешней стороны.

Лемма 2. *Для любой точки $K' \in BC$ прямая ML проходит через точку E.*

Доказательство этого факта (и аналогичного факта для вписанной окружности) можно найти в книге И. Ф. Шарыгина «Задачи по геометрии (планиметрия)», библиотечка «Квант», №7, 1986 и в книге решений четвертой Соросовской Олимпиады (10 класс).

Покажем, как из леммы 2 выводится лемма 1, а значит, и утверждение задачи.

Доказательство леммы 1. Опустим перпендикуляр EV на сторону BC и продолжим его за точку E на его длину. Получим отрезок VW, перпендикулярный BC и такой, что $VW = 2VE = 2r_a$. Легко показать (из гомотетии окружностей), что отрезок BW проходит через K. Применяя лемму 2 для $K' = K$, заключаем, что точки E, M, L лежат на одной прямой. Возьмем точку H на стороне BC так, чтобы $WH \parallel ML$. Обозначим O середину WH. Треугольник MKL — равнобедренный, значит, и треугольник WKH также равнобедренный. Поэтому KO — биссектриса угла WKH. Более того, отрезок EL является средней линией в треугольнике WVH. Поэтому $WELO$ — параллелограмм. Это означает, что $OL = r_a$, $OL \perp BC$. Таким образом, O — центр окружности γ (как единственная точка пересечения перпендикуляра LO с биссектрисой угла WKH). Следовательно, радиус γ равен r_a, что и требовалось доказать.

(*В. Протасов*)

Аналитическое решение. Докажем, что радиусы окружностей, указанных в условии задачи, равны радиусу r_a вневписанной окружности C_a треугольника

ABC, касающейся стороны BC. Пусть l — вторая касательная к C_a, параллельная BC. Точку касания l и C_a обозначим K'. Легко видеть, что эта точка лежит на прямой AK.

Введем прямоугольную систему координат, ось абсцисс которой совпадает с l, а ось ординат проходит через A. Координаты A равны $(0, L)$, абсциссы точек пересечения прямых AK, AB, AC с осью абсцисс обозначим $\varkappa, \xi_1, \xi_2$ соответственно. Найдем соотношение между ними. Алгебраически условие касания окружности C_a и прямой AB (AC) означает, что у уравнения

$$(x-\varkappa)^2+(y-r_a)^2=r_a^2,$$

где $y = L - \dfrac{L}{\xi_i}x$, — кратный корень, т. е. дискриминант трехчлена равен 0. Подставляя выражение для y, получаем условие

$$\left(2\varkappa+\frac{2L(L-r_a)}{\xi_i}\right)^2-4\left(1+\frac{L^2}{\xi_i^2}\right)(\varkappa^2+L(L-2r_a))=0,$$

из которого после упрощения следует, что ξ_1, ξ_2 — корни квадратного уравнения (относительно ξ)

$$(L-2r_a)\xi^2-2(L-r_a)\varkappa\xi+L\varkappa^2-Lr_a^2=0. \tag{1}$$

Абсциссы η_1, η_2 точек касания (и центров) окружностей, касающихся BC, l, AK, являются корнями аналогичного (1) квадратного уравнения (но относительно η)

$$(L-2r_a)\varkappa^2-2(L-r_a)\varkappa\eta+L\eta^2-Lr_a^2=0. \tag{2}$$

Теперь нужно проверить, что эти окружности касаются описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности, т. е. совпадают с пунктирными окружностями на рисунке к условию задачи.

Координаты вершин B и C равны $(\frac{\xi_1}{L}(L-2r_a), 2r_a)$ и $(\frac{\xi_2}{L}(L-2r_a), 2r_a)$ соответственно. Поэтому из (1) получаем, что абсцисса центра O описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности равна

$$\tilde\eta=\frac{1}{2}\left(\frac{\xi_1}{L}(L-2r_a)+\frac{\xi_2}{L}(L-2r_a)\right)=\frac{L-2r_a}{2L}(\xi_1+\xi_2)=\frac{L-r_a}{L}\varkappa=\frac{\eta_1+\eta_2}{2}, \tag{3}$$

ординату O обозначим h, а радиус описанной окружности — R. Тогда абсциссы B и C являются корнями квадратного уравнения

$$(x-\tilde\eta)^2+(2r_a-h)^2=R^2,$$

которое поэтому можно переписать в виде

$$x^2-\frac{L-2r_a}{L}(\xi_1+\xi_2)x+\left(\frac{L-2r_a}{L}\right)^2\xi_1\xi_2=0.$$

Приравнивая свободные члены этих уравнений и используя (1), получаем

$$\tilde\eta^2+(2r_a-h)^2-R^2=\left(\frac{L-2r_a}{L}\right)^2\frac{L(\varkappa^2-r_a^2)}{L-2r_a}=(\varkappa^2-r_a^2)\frac{L-2r_a}{L}. \tag{4}$$

Теперь упростим левую часть (4), учитывая уравнение $\tilde\eta^2+(h-L)^2=R^2$ (вершина A лежит на описанной окружности). Заменяя $\tilde\eta^2-R^2$ на $-(h-L)^2$ и раскладывая разность квадратов на множители, получаем выражение для h

$$2h = L + 2r_a + \frac{\varkappa^2 - r_a^2}{L} \tag{5}$$

и для R^2

$$R^2 = \tilde{\eta}^2 + \frac{1}{4}\left(2r_a - L + \frac{\varkappa^2 - r_a^2}{L}\right)^2. \tag{6}$$

Осталось проверить, что окружности с центрами (η_i, r_a) и радиусом r_a касаются окружности с центром $(\tilde{\eta}, h)$ и радиусом R, т.е.

$$(\tilde{\eta} - \eta_i)^2 + (h - r_a)^2 = (R + r_a)^2. \tag{7}$$

Это условие, с учетом (1), (2), (3) и (6) можно записать в виде

$$\left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(L + \frac{\varkappa^2 - r_a^2}{L}\right)^2 = r_a^2 + \tilde{\eta}^2 + \frac{1}{4}\left(2r_a - L + \frac{\varkappa^2 - r_a^2}{L}\right)^2 + 2r_aR,$$

откуда после упрощений представляем его в виде выражения для R:

$$R = \frac{L(L - 2r_a) + \varkappa^2 + r_a^2}{2L}. \tag{8}$$

Непосредственным вычислением проверяется, что квадрат правой части (8) тождественно равен правой части (6).

(*М. Н. Вялый*)

1.6. Условие. а) Дан многочлен $P(X)$. Для любого $X > 0$: $P(X) > 0$. Доказать, что что $P = Q/T$, где Q и T — многочлены с неотрицательными коэффициентами.
б)* Пусть P — квадратный трехчлен, α — аргумент его комплексного корня. Тогда степень Q не меньше π/α.

Решение. а) Прежде всего заметим, что любой многочлен с вещественными коэффициентами разлагается в произведение линейных и квадратных многочленов с вещественными коэффициентами, причем дискриминант всех этих квадратных трехчленов отрицателен. Из условия следует, что все линейные множители не имеют положительных корней и потому имеют вид $x + c$, где $c > 0$. Поэтому достаточно решить задачу для квадратного трехчлена. Далее, делая замену $x \to \lambda \cdot x$ и умножая квадратный трехчлен на подходящее λ', можно привести его к виду $P(x) = x^2 - \delta x + 1$. При этом $\delta < 2$ и нетривиальным является случай, когда $\delta > 0$. Это условие равносильно положительности вещественных частей корней многочлена P. Теперь приступим к решению.

Домножив многочлен $P(x) = x^2 - \delta x + 1$ на многочлен $\bar{P}(x) = x^2 + \delta x + 1$ получим выражение $P_1(y) = y^2 + (2 - \delta^2)y + 1$, где $y = x^2$. При этом аргументы корней многочлена P_1, как легко видеть, будут в два раза больше аргументов соответствующих корней P.

Аналогичным образом, построим по многочлену P_1 многочлен P_2 и т. д. Изначально аргумент одного из корней заключен между 0 и $\pi/2$. Поскольку аргументы корней всякий раз будут удваиваться, то на некотором шаге возникнет многочлен P_k, аргументы корней которого будут заключены между $\pi/2$ и π. Все его коэффициенты будут неотрицательны. Поскольку многочлены $\bar{P}_i$ имеют неотрицательные коэффициенты, многочлены $Q = \prod_{i=1}^{k-1} \bar{P}_i(x^{2^{i-1}})$ и $T = P_k(x^{2^{k-1}})$ удовлетворяют требованиям задачи.

Отметим, что можно было бы работать с последовательностью $\delta_i = 2 - \delta_{i-1}^2$ и убедиться явно в наличии неположительного члена.

Утверждение пункта б) означает, что предыдущая конструкция близка к оптимальной. Как и выше, рассматривается многочлен вида $P(x) = x^2 - \delta x + 1$, причем $\delta > 0$. Тогда $\delta = 2\cos\varphi$ и величина φ $(0 < \varphi < \pi/2)$ есть аргумент одного из корней P. Заметим, что коэффициент δ монотонен относительно положительного аргумента корня. Кроме того, если коэффициенты многочленов PT и T неотрицательны, а коэффициенты P_1 не меньше соответствующих коэффициентов P, то все коэффициенты P_1T тоже неотрицательны. Поэтому достаточно доказать, что если $\varphi = \frac{\pi}{2}\frac{1}{k}$, то минимальная степень Q равна k и больше k, если $\varphi < \frac{\pi}{2}\frac{1}{k}$. В дальнейшем мы будем считать степень многочлена T, удовлетворяющего условию задачи, минимально возможной.

Поскольку многочлен P фиксирован, коэффициенты многочлена $Q = PT$ будут линейно зависеть от коэффициентов t_k многочлена T. Будем двигать параметры t_k с постоянными скоростями, т. е. рассматривать семейства параметров $t'_k = t_k + v_k\tau$ (τ — «время»). Обращению в нуль коэффициентов многочленов Q или T отвечают линейные уравнения на параметры.

Пусть в процессе движения некоторый коэффициент обратится в нуль. Тогда рассмотрим новые начальные значения t_i, а на скорости v_i наложим ограничение, означающее, что этот коэффициент не меняется. Тогда он остается нулем и соответствующее ограничение будет иметь вид линейного уравнения с нулевой правой частью: $\sum \alpha_i v_i = 0$. В самом деле: линейность уже установлена, а утверждение про нулевую правую часть следует из того, что все коэффициенты сохраняются, когда все $v_i = 0$.

Будем до тех пор, пока это возможно, стремиться обратить в нуль как можно бо́льшее число коэффициентов многочленов T и R. Следующая лемма позволяет ограничиться рассмотрением только коэффициентов многочлена $Q = RT$.

Лемма 1. *Пусть $T(x) = 1 + t_1x + \ldots + t_kx^k + \cdots + t_rx^r$; $t_r > 0$. Тогда многочлен $T_1(x) = 1 + t_1x + \ldots + t_{k-1}x^{k-1}$ удовлетворяет условию задачи (т. е. все коэффициенты $Q_1 = PT_1$ неотрицательны) и имеет меньшую степень.*

Количество свободных параметров равно степени $\deg(T)$ многочлена T, а количество коэффициентов Q, которым отвечают уравнения, равно $\deg(Q) - 1 = \deg(T) + 1$ (свободный член не меняется). Мы воспользуемся следующим утверждением из линейной алгебры:

Лемма 2. *Любая однородная система n линейных уравнений от $k > n$ неизвестных имеет нетривиальное решение (в котором не все значения неизвестных нули).*

Доказательство этой леммы — индукция по числу уравнений и неизвестных.

В силу данной леммы можно добиться того, чтобы $\deg(T)$ коэффициентов многочлена Q обратились в нуль. Нулем не окажется свободный член и старший коэффициент. Поэтому ненулевым кроме этих двух может оказаться еще только один коэффициент.

Покажем, как добиться того, чтобы этот коэффициент был предпоследним (т. е. при $x^{\deg(Q)-1}$).

Обозначим k-й коэффициент (при x^k) многочлена Q через q_k. Тогда $q_k = t_k + t_{k-2} - 2\cos\varphi \cdot t_{k-1}$. Пусть $t_k > 0$ для $k \leqslant \deg(Q) - 2$ и $t_k = 0$ для остальных $k \neq 1, \deg(Q)$. Покажем, как построить многочлен T', удовлетворяющий условию задачи, у которого первые k коэффициентов — нули.

Положим $t'_i = t_i$ при $i \leqslant k$ и $t'_i = \lambda t_i$ если $i > k$. При этом $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Ясно, что при таком варьировании у коэффициентов q_s для $s \leqslant k-1$ или $s \geqslant k+2$ сохраняются положительность, а также свойство «быть равным нулю».

Поскольку $q'_{k+1}/\lambda = q_{k+1} - (1/\lambda - 1)t_{k+1}$, то неотрицательность t_{k+1} также сохраняется. Что касается члена q_k, то он уменьшается и в какой-то момент становится равным нулю. Таким образом, осуществлен переход к ситуации, когда первые k коэффициентов у многочлена Q (не считая свободного члена) нулевые.

В этом случае коэффициенты t_k будут удовлетворять следующим рекуррентным соотношениям: $t_0 = 1, t_1 = \cos\varphi, t_s = 2\cos\varphi \cdot t_{s-1} - t_{s-2}$; $s = 2, \ldots, \deg(T)$. Поэтому многочлен T будет образован первыми k членами ряда Тейлора функции

$$\frac{1}{1 - 2\cos\varphi x + x^2} = \frac{1}{(z - \bar{z})} \cdot \left(\frac{1}{(x - z)} - \frac{1}{(x - \bar{z})}\right),$$

где $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Откуда $t_k = \dfrac{1}{2i\sin\varphi}(z^k - \bar{z}^k) = \sin(k\varphi)/sin(\varphi)$.

Если величина t_k, определенная предыдущим соотношением, перестает быть положительной, то ряд $\sum t_n x^n$, начиная с $(k+1)$-го члена, можно оборвать. Легко видеть, что верно и обратное.

Для завершения решения задачи остается отметить, что условие $\sin(k\varphi) = 0$ равносильно условию $k = \pi/\arg(\varphi)$. *(А. Я. Белов)*

1.9. Условие. Известно, что при любых действительных A, B ряд $\sum \dfrac{1}{|Ax_n + By_n|}$ расходится. Обязан ли расходиться ряд $\sum \dfrac{1}{|x_n| + |y_n|}$? А что если A и B могут быть комплексными?

Решение. В условии задачи не оговорено, как трактовать члены рядов с $Ax_n + By_n = 0$. Мы будем полагать, что речь идет о рядах

$$L(A, B) = \sum_{n: Ax_n + By_n \neq 0} \frac{1}{|Ax_n + By_n|}$$

и

$$S = \sum_{|x_n| + |y_n| \neq 0} \frac{1}{|x_n| + |y_n|} = \sum_{f(n) \neq 0} \frac{1}{f(n)}, \quad f(n) \stackrel{\text{def}}{=} |x_n| + |y_n|.$$

Для упрощения записи считаем далее, что во всех формулах из сумм исключаются члены, в которых один из знаменателей обращается в 0.

Ответ: «нет» в действительном случае и «да» в комплексном.

Комплексный случай. Пусть S сходится. Докажем, что тогда сходится и один из рядов $L(q,-1)$. Поскольку

$$\sum_{n:x_n=0}\frac{1}{|y_n|}\leqslant\sum\frac{1}{f(n)}=S,$$

сходимость ряда $L(q,-1)$ не меняется при отбрасывании членов с $x_n=0$. Обозначим ряд с отброшенными членами, для которых $x_n=0$, через $\tilde{L}(q)$, введём также обозначение $\lambda_n=-y_n/x_n$. Тогда

$$\tilde{L}(q)=\sum\frac{1+|\lambda_n|}{f(n)|q-\lambda_n|}. \tag{1}$$

При построении q будем использовать меру

$$\mu(X)=\frac{\sum_{\lambda_n\in X,x_n\neq 0}f(n)^{-1}}{\sum_{x_n\neq 0}f(n)^{-1}}.$$

Обозначим $l_0=1$, $m=30$. Разобъём квадрат $Q_0=\{z:|\operatorname{Re}z|\leqslant l_0/2,|\operatorname{Im}z|\leqslant\leqslant l_0/2\}$ прямыми, параллельными действительной и мнимой осям, на m^2 квадратов со стороной $l_1=l_0/m$ (принадлежность граничных точек произвольная). Для каждого из $(m-2)^2$ внутренних квадратов Q определим «окрестность» Q^+ как объединение этого квадрата и 8 смежных с ним. Поскольку каждый квадрат разбиения входит не более чем в 25 «окрестностей», то найдётся квадрат разбиения Q_1 такой, что $\mu(Q_1^+)\leqslant 25\mu(Q_0)/(m-2)^2$. Применив ту же процедуру к Q_1, получим квадрат Q_2 и т. д. Последовательность квадратов Q_i определяет некоторую точку q.

Докажем, что ряд (1) для q сходится. Обозначим $N_0=\{n:\lambda_n\notin Q_1^+\}$, $N_1==\{n:\lambda_n\notin Q_2^+\}\setminus N_0$ и т. д. Из процедуры построения следуют оценки

$$\sum_{n\in N_k}\frac{1}{f(n)}\leqslant\frac{25^k}{(m-2)^{2k}}S,\quad (n\in N_k)\Longrightarrow|q-\lambda_n|\geqslant\frac{1}{m^k}. \tag{2}$$

Выберем теперь такое R, чтобы при $|z|>R$ выполнялось $(1+|z|)/|q-z|<2$. Оценивая по отдельности члены с $\lambda_n>R$ и $\lambda_n\leqslant R$, получаем

$$\sum_{n\in N_k}\frac{1+|\lambda_n|}{f(n)|q-\lambda_n|}\leqslant(2+(R+1)m^k)\sum_{n\in N_k}\frac{1}{f(n)}\leqslant(R+2)\left(\frac{25m}{(m-2)^2}\right)^k S,$$

откуда при $25m/(m-2)^2<1$ следует сходимость ряда $\tilde{L}(q)$.

Действительный случай. Используя уже введённые обозначения, полагаем $f(n)=n\ln^2 n$ (этого достаточно для сходимости S). Последовательность λ_n построим следующим образом. Разделим её на две подпоследовательности: $\lambda_n=\lambda_s^{(t)}$, где $n=t+2s$, $t\in\{0,1\}$. Зададим $\lambda_n^{(1)}=n$. Последовательность $\lambda_n^{(0)}$ определим следующим образом. Занумеруем натуральными числами пары целых чисел (u,v), $v>0$, в порядке возрастания $\max\{|u|,v\}$ (в остальном нумерация произвольная). Обозначим n-ю пару (u_n,v_n), тогда $\lambda_n^{(0)}=u_n/v_n$. Заметим, что пара (u,v) встретится не позже, чем на $(\max\{|u|,v\}^2)$-м месте.

Проверим расходимость рядов $L(A,B)$ при таком выборе λ_n.

Пусть $B = 0$. Возьмём подпоследовательность $n_k = 1 + 2k$. Для неё

$$\sum_k \frac{1}{|Ax_{n_k}|} = \frac{1}{|A|} \sum_k \frac{1 + |\lambda_{n_k}|}{f(n_k)} = \frac{1}{|A|} \sum_k \frac{1 + k}{(1 + 2k)\ln^2(1 + 2k)},$$

так что ряд $L(A, 0)$ расходится.

При $B \neq 0$ обозначим $a = A/B$. Оценим вклад L_v, который даёт в ряд подпоследовательность $n_k = 2s_k$, где s_k нумеруют те пары (u, v), для которых

$$|a - \frac{u}{v}| < 1.$$

Для таких пар $\max\{|u|, v\} \leqslant v \max\{1, |a| + 1\} = Cv$, поэтому имеем

$$L_v = \sum_k \frac{1}{|Ax_{n_k} + By_{n_k}|} = \frac{1}{|B|} \sum_k \frac{1 + |u_k/v_k|}{f(n_k)|a - u_k/v_k|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4C^2|B|} \sum_{k=1}^{v/2} \frac{v}{kv^2 \ln^2(4C^2v^2)} \geqslant \frac{\ln v/2}{4C^2|B|v\ln^2(4C^2v^2)} = \Omega(\frac{1}{v\ln v}).$$

Так как $L(A, B) \geqslant \sum_v L_v$, ряд $L(A, B)$ расходится.

(*М. Вялый*)

1.10. Условие. Функция, заданная на всей вещественной прямой, бесконечно дифференцируема. В каждой точке некоторая производная (номер производной может зависеть от точки) равна нулю. Докажите, что эта функция — многочлен.

Решение 1[1]. Пусть $F_n = \{x \mid f^{(n)}(x) = 0\}$, $G_n = \mathbb{R} \setminus F_n$. Докажем вспомогательное утверждение (A): Если f не является многочленом на некотором открытом интервале Δ, то для любого n найдется составляющий интервал непустого открытого множества $G_n \cap \Delta$, на котором f не является многочленом.

Из (A) легко выводится утверждение задачи: предположим, что f не многочлен на $\mathbb{R}$, построим последовательность вложенных интервалов $\Delta_n = (a_n; b_n) \subset \subset G_n$, $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset \Delta_n$, пересечение которых непусто, что противоречит условию.

Предположим, что (A) не выполняется, т. е. что для некоторых n и Δ функция f — не многочлен на Δ, но ее ограничение на любой составляющий интервал множества $G_n \cap \Delta$ является многочленом. Обозначим символом $\sigma(x)$ $(x \in \Delta)$ максимальный промежуток, обладающий свойствами: $x \in \sigma(x) \subset \Delta$, $f\big|_{\sigma(x)}$ — многочлен. Проверьте, что если ограничения f на два примыкающих промежутка — многочлены, то f — многочлен на их объединении. Покажите, что если a — граничная точка $\sigma(x)$, то: 1) существует последовательность $x_k \in F_n$, $x_k \neq a$, $x_k \to a$; 2) $f^{(m)}(a) = 0$ для всех $m \geqslant n$; 3) $f^{(n)}$ обращается в нуль на $\sigma(x)$. Тогда, в частности, $f^{(n)}(x) = 0$ для всех $x \in G_n \cap \Delta$, что невозможно.

(*Д. Ю. Бураго*)

Решение 2. Пусть F_n — множество нулей функции $f^{(n)}$. Объединение замкнутых множеств F_n покрывает прямую, а доказать надо, что одно из этих множеств совпадает со всей прямой. Предположим противное: $F_n \neq \mathbb{R}$ при всех n.

[1] Из книги Б. М. Макаров, М. Г. Голузина, А. А. Лодкин, А. Н. Подкорытов «Избранные задачи по вещественному анализу». М.: Наука, 1992. С. 294–295.

Пусть $E_n = F_n'$ — множество предельных точек множества F_n. Достаточно доказать следующие три леммы:

Лемма 1. *Последовательность (E_n) возрастает.*

Лемма 2. *Если непустой открытый интервал (a,b) не пересекается с некоторым E_n, а один из его концов a,b принадлежит E_n, то (a,b) не содержится в E_m ни при каком $m > n$.*

Лемма 3. *Пусть (G_n) — убывающая последовательность непустых открытых множеств на прямой. Предположим, что для всех $n < m$ каждый максимальный интервал (a,b) в G_n пересекается с G_m, причем $a = \inf(a,b) \cap G_m$, если a конечно, и $b = \sup(a,b) \cap G_m$, если b конечно. Тогда множество $\bigcap G_n$ несчетно.*

Предположим, что эти леммы установлены. Положим $G_n = \mathbb{R} \setminus E_n$. Согласно леммам 1 и 2, последовательность (G_n) удовлетворяет условиям леммы 3. По лемме 3 множество $A := \bigcap G_n = \mathbb{R} \setminus \bigcup E_n$ несчетно. С другой стороны, так как $\bigcup F_n = \mathbb{R}$, то $A \subset \bigcup(F_n \setminus E_n)$. Множество $F_n \setminus E_n$ — это множество изолированных точек множества F_n. У любого множества на прямой множество изолированных точек счетно. (Указание: рассмотрите все интервалы с рациональными концами, каждый из которых содержит ровно одну точку данного множества.) Из включения $A \subset \bigcup(F_n \setminus E_n)$ вытекает, таким образом, что A должно быть счетным, и мы приходим к противоречию.

Остается доказать три леммы, сформулированные выше.

Доказательство леммы 1. Достаточно установить следующее: всякий неизолированный нуль дифференцируемой функции является неизолированным нулем ее производной. Это вытекает из теоремы Ролля: между всякими двумя нулями функции лежит нуль ее производной.

Доказательство леммы 2. Допустим, что (a,b) не пересекается с E_n, $a \in E_n$ и $(a,b) \subset E_m$ при некотором $m > n$. На интервале (a,b) функция f совпадает с многочленом степени k, где $n \leqslant k < m$. Отсюда $f^{(k)}(a) \neq 0$. Однако по лемме 1 $a \in E_n \subset E_k$, так что $f^{(k)}(a) = 0$. Противоречие.

Доказательство леммы 3. Если множество $\bigcap G_n$ содержит интервал, то оно несчетно. Предположим, что $\bigcap G_n$ не содержит интервала. Если (a,b) — максимальный интервал в G_n, то число компонент (максимальных интервалов) множества $(a,b) \cap G_m$ неограниченно растет с ростом m, так что при больших m можно выбрать два максимальных интервала в $(a,b) \cap G_m$ с непересекающимися замыканиями. Используя это замечание, легко построить по индукции ветвящуюся систему открытых интервалов I_s^k, $1 \leqslant s \leqslant 2^k$, и числа $n_1 < n_2 < \ldots$, такие, что: (1) при фиксированном k интервалы I_s^k имеют попарно непересекающиеся замыкания; (2) каждый интервал I_s^k является компонентой множества G_{n_k}; (3) $I_{2s-1}^{k+1} \cup I_{2s}^{k+1} \subset I_s^k$. Пусть B_k — объединение интервалов I_s^k, $1 \leqslant s \leqslant 2^k$, а C_k — объединение их замыканий. Множество $\bigcap C_k$ находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством всех бесконечных последовательностей нулей и единиц и гомеоморфно канторову совершенному множеству. Таким образом, $\bigcap C_k$ несчетно. Множество $\bigcap B_k$ также несчетно, поскольку разность $\bigcap C_k \setminus \bigcap B_k$ содержится в счетном множестве $\bigcup(C_k \setminus B_k)$ концов всех интервалов I_s^k. Так как $\bigcap B_k \subset \bigcap G_{n_k} = \bigcap G_n$, то множество $\bigcap G_n$ несчетно.

(*В. В. Успенский*)

2.2. Условие. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причем $Q(0) = 0$. Докажите, что если $P(Q(x))$ — чётная функция, то $Q(x)$ — чётная или нечётная функция.

Решение. Утверждение задачи непосредственно вытекает из следующих фактов про многочлены:

Лемма 1. *Пусть Q – многочлен. Тогда $\big||Q(x)| - |Q(-x)|\big|$ есть либо константа, либо стремится к бесконечности при $x \to \infty$.*

Лемма 2. *Пусть $P \neq const$ – многочлен и $\big||x_n| - |y_n|\big| \to \infty$. Тогда $\big||P(x_n)| - |P(y_n)|\big| \to \infty$.*

Доказательство этих утверждений несложно и опускается.

(*А. Я. Белов*)

3.3. Условие. (а) Существует ли такая непрерывная функция $f(x)$, что $f(f(f(x))) = e^{-x}$?

(б) Тот же вопрос для разрывной функции.

(в) Тот же вопрос для функции с конечным числом точек разрыва.

Решение.

Ответ: а) не существует, б) существует, в) не существует.

(а) Не существует. Пусть непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению $f(f(f(x))) = e^{-x}$. Так как e^{-x} взаимно однозначна, то и $f(x)$ взаимно однозначна. Будучи непрерывной, она тогда строго монотонна. Поскольку e^{-x} убывает, то и $f(x)$ убывает. Если ее множество значений — вся вещественная прямая, то это верно и для $f(f(f(x)))$, тогда как e^{-x} всюду положительна. Значит, $f(x)$ ограничена сверху или снизу. Если $f(x)$ ограничена снизу числом c, то $f(f(x))$ ограничена снизу тем же числом, а сверху — значением $f(c)$. Противоречие. Аналогично, если $f(x)$ ограничена сверху, то $f(f(x))$ также ограничена с обеих сторон. Как следствие, это верно и для $f(f(f(x)))$. Однако e^{-x} не ограничена сверху. Значит, искомой функции не существует.

(б) Таких функций бесконечно много. Действительно, луч $(-\infty; 0]$ под действием e^{-x} отображается на луч $(+\infty; 1]$. Тот, в свою очередь, отображается на полуинтервал $(0; 1/e]$, и т. д. При бесконечном продолжении этого процесса заполняется вещественная прямая, за исключением некоторого отрезка $[A; B]$, причем $0 < A \leqslant B < 1$, $e^{-A} = B$, $e^{-B} = A$. Заметим теперь, что производная функции $g(x) = e^{-e^{-x}} - x$ равна $e^{-e^{-x}-x} - 1$ и при положительных x заведомо отрицательна (нетрудно показать, что она отрицательна при всех вещественных x). Так как $g(A) = g(B) = 0$, то $A = B$. Как следствие, $e^{-A} = A$.

Разобъем теперь все отрицательные числа на тройки. Если x_1, x_2, x_3 — одна из таких троек, то положим $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3$, а при $n > 3$ $x_n = e^{-x_{n-3}} = f(x_{n-1})$. Числа в этой последовательности не повторяются, поскольку функция e^{-x} взаимно однозначна и всюду положительна. По той же причине две последовательности для разных троек не пересекаются. Положим также $f(A) = A$. Из доказанного выше следует, что $f(x)$ определена на всей вещественной прямой, причем $f(f(f(x))) = e^{-x}$.

(в) Такой функции не существует. Пусть $f(f(f(x))) = e^{-x}$ для всех вещественных x. Пусть также A — (единственный) корень уравнения $e^{-x} = x$. Если C — точка разрыва для $f(x)$, то C является точкой разрыва и для $e^{-f(x)}$. Но $e^{-f(x)} = f(f(f(f(x) = f(e^{-x})$, поэтому e^{-x} — точка разрыва для $f(x)$. Аналогично, точкой разрыва является $e^{-e^{-x}}$, и т. д. Как показано в решении пункта (б), при $C \neq A$ элементы полученной последовательности не повторяются. Значит, если $f(x)$ имеет хотя бы один разрыв при $x \neq A$, то таких разрывов бесконечно много.

Пусть теперь $f(x)$ имеет единственный разрыв при $x = A$. Поскольку $f(A) = f(e^{-A}) = f(f(f(f(x)))) = e^{-f(A)}$, то $f(A) = A$. Слева от A функция непрерывна; если в этой области она принимает значения и больше, и меньше A, то там встречается и значение, равное A. Но это противоречит взаимной однозначности $f(x)$, которая следует из взаимной однозначности e^{-x}. Если $f(x) < A = f(A)$ при $x < A$, то это выполнялось бы для $f(f(x))$ и e^{-x}, но последнее неверно. Значит, $f(x) > A$ при $x < A$. Аналогично $f(x) < A$ при $x > A$.

Любое число, большее чем A, содержится в области значений $e^{-x} = f(f(f(x)))$. Поэтому любое число, меньшее чем A, содержится в области значений $f(f(x))$ (с учетом взаимной однозначности $f(x)$). Все эти числа являются значениями $f(x)$, и с учетом равенства $f(A) = A$ эта функция отображает вещественную прямую на себя. Но тогда тем же свойством обладает и $f(f(f(x)))$, в то время как e^{-x} всюду положительна. Значит, искомой функции не существует.

(*А. Канель*)

4.8. Условие. Решите функциональное уравнение для непрерывных вещественных функций вещественного переменного:

$$F(x + y) = A(x) + B(x)C(y).$$

Решение.

Постараемся свести исходное уравнение к частному случаю. Положим

$$F_1(x) = F(x) - F(0); \quad C_1(y) = C(y) - C(0);$$
$$A_1(x) = A(x) - F(0) + B(x)C(0). \tag{1}$$

Тогда $F_1(0) = C_1(0) = 0$,

$$F_1(x + y) = A_1(x) + B(x)C_1(y). \tag{2}$$

Положим в (2) $y = 0$:

$$F_1(x) = A_1(x). \tag{3}$$

Если $F_1(x) \equiv 0$, то (ввиду (2) – (3)) или $B(x)$, или $C_1(y)$ является тождественным нулем. Используя (1) ($F(0)$ и $C(0)$ можно взять произвольными), получаем классы функций, указанные в конце решения под номерами 1 и 2.

Пусть теперь $F_1(x) \not\equiv 0$. Положим в (2) $x = 0$. С учетом (3) $F_1(y) = B(0)C_1(y)$. Как следствие, $B(0) \neq 0$. Положим $B_1(x) = B(x)/B(0)$. Тогда

$$F_1(x + y) = F_1(x) + B_1(x)F_1(y). \tag{4}$$

Используем ассоциативность сложения:

$$F_1(x+y+z) = F_1(x+y) + B_1(x+y)F_1(z) =$$
$$= F_1(x) + B_1(x)F_1(y) + B_1(x+y)F_1(z);$$
$$F_1(x+y+z) = F_1(x) + B_1(x)F_1(y+z) =$$
$$= F_1(x) + B_1(x)F_1(y) + B_1(x)B_1(y)F_1(z).$$

Отсюда $(B_1(x+y) - B_1(x)B_1(y))F_1(z) = 0$. Поскольку $F_1(z) \not\equiv 0$, то $B_1(x+y) = B_1(x)B_1(y)$. Таким свойством среди непрерывных функций обладают только экспоненты и тождественный нуль. Но $B(0) \neq 0$, и (4) принимает вид $F_1(x+y) = F_1(x) + e^{ax}F_1(y)$ для некоторого a. Если $a = 0$, то $F_1(x+y) = F_1(x) + F_1(y)$. Среди непрерывных функций таким свойством обладают только однородные линейные ($y = kx$), что приводит к классу функций 3. Если же $a \neq 0$, то ввиду коммутативности сложения $F_1(x) + e^{ax}F(y) = F_1(x+y) = F_1(y) + e^{ay}F_1(x)$. Отсюда при $x, y \neq 0$ $\dfrac{F_1(x)}{e^{ax}-1} = \dfrac{F_1(y)}{e^{ay}-1} = c$ для некоторого c, и $F_1(x) = c(e^{ax} - 1)$. Это выполнено и при $x = 0$ (поскольку $F_1(0) = 0$). Отсюда возникает класс функций 4.

В итоге получаем следующие решения:

1) $F(x) \equiv A(x) \equiv K$ (K — произвольная константа); $B(x) \equiv 0$; $C(y)$ — произвольная непрерывная функция.

2) $F(x) \equiv K_1$; $B(x)$ — произвольная непрерывная функция; $C(y) \equiv K_2$; $A(x) = K_1 - B(x)K_2$ (K_1, K_2 — произвольные константы).

3) $F(x) = K_1x + K_2$; $A(x) = K_1x + K_2 - K_3K_4$; $B(x) = K_3$; $C(y) = \dfrac{K_1}{K_3}y + K_4$ (K_1, K_2, K_3, K_4 — произвольные константы, $K_3 \neq 0$).

4) $F(x) = K_1(e^{ax} - 1) + K_2$; $A(x) = e^{ax}(K_1 - K_3K_4) + K_2 - K_1$; $B(x) = K_3e^{ax}$; $C(y) = \dfrac{K_1(e^{ax}-1)}{K_3} + K_4$ (a, K_1, K_2, K_3, K_4 — произвольные константы, $a \neq 0$, $K_3 \neq 0$).

(А. Канель, Б. Френкин)