Внешний биллиард

С. Л. Табачников

1. Определение и примеры

Для игры во внешний биллиард нужен биллиардный стол — ограниченная выпуклая область на плоскости. Игра состоит в следующем. Начальная позиция биллиардного шара - это точка A вне биллиардного стола. Из точки A можно провести две касательные (точнее, опорные) прямые к границе биллиардного стола γ — левую l и правую r, если смотреть из точки A. Продолжим правую касательную за точку касания X до точки B так, что $BX = AX$ (см. рис. 1). Точка B и есть новое положение биллиардного шара. Обозначая внешнее биллиардное отображение через T (или, если нужно подчеркнуть зависимость от стола, через T_γ), имеем: $B = T(A)$.

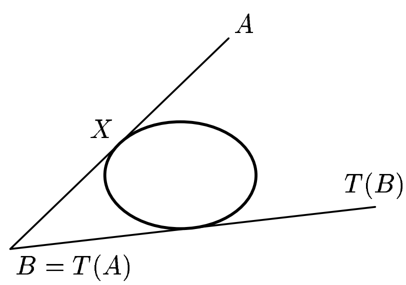

Рис. 1.

У данного определения есть один дефект: точка X может оказаться не единственной. Это произойдет, если граница биллиардного стола содержит отрезок прямой, например, если биллиардный стол — многоугольник. Этот недостаток определения неустраним и мы считаем, что отображение T не определено в тех точках, которые лежат на продолжениях отрезков, являющихся частью кривой γ. Это напоминает обычный (внутренний) биллиард: если биллиардный шар попадает в угол, его дальнейшее движение не определено.

Внешний биллиард изучен гораздо менее основательно, чем внутренний. Даже терминология не вполне устоялась: внешний биллиард известен также как «дуальный биллиард» и «антибиллиард» (по-английски, «outer», «exterior», «dual» и «antibilliard»). Я не знаю, кто первым изобрел внешний биллиард. Знаменитый математик второй половины XX века Юрген Мозер описал внешний биллиард в оказавшей большое влияние книге [5]. Мозер узнал о внешнем биллиарде из лекции австралийского математика Б. Ньюмана в конце 1950-х гг.

Рассмотрим несколько примеров.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 5, 2001(125–135)

Пример 1. Если внешний биллиардный стол — круг, то каждая точка движется по концентрической окружности. Тем самым, каждая концентрическая окружность — инвариантная кривая внешнего биллиардного отображения T.

Отметим, что внешнее биллиардное отображение не чувствительно к аффинным преобразованиям плоскости. Точнее говоря, пусть f — аффинное преобразование, а γ — внешняя биллиардная кривая. Тогда

$$f \circ T_\gamma = T_{f(\gamma)} \circ f$$

(см. рис. 2).

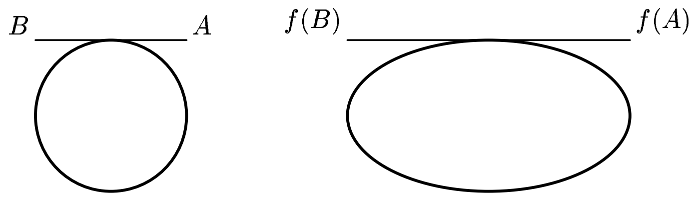

Рис. 2.

Поскольку эллипс — аффинный образ окружности, все, сказанное о круглом внешнем биллиардном столе, относится в равной мере и к эллиптическому.

Пример 2. Если внешний биллиардный стол — квадрат, то движение каждой точки — периодическое. Структура орбит изображена на рис. 3: каждая точка квадратика, отмеченного номером n, посещает все остальные квадратики с этим номером (их $4n$) по одному разу, прежде чем вернуться в исходное положение. Читатель легко установит аналогичные факты о треугольном внешнем биллиардном столе и о столе в форме правильного шестиугольника. В силу аффинной инвариантности, сказанное о квадрате относится и к произвольному параллелограмму.

Пример 3. Если внешний биллиардный стол — правильный пятиугольник, то наряду с периодическими орбитами, есть и бесконечные. Одна такая орбита

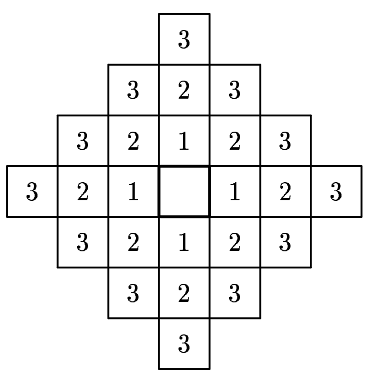

Рис. 3.

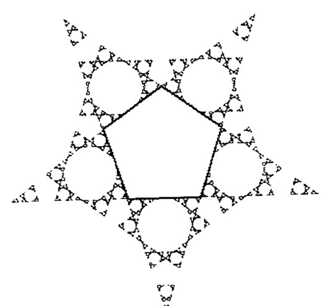

Рис. 4.

показана на рис. 4. Отметим бросающееся в глаза самоподобие изображенной орбиты (точнее, ее замыкания). Существование бесконечных орбит вовсе не очевидно, и доказательство (данное в [8] и [9]) опирается на отмеченное самоподобие. Оно же позволяет вычислить (дробную!) размерность множества бесконечных орбит, которая оказывается равной $\lg 6/\lg(\sqrt{5}+2) = 1.24\ldots$

Компьютерные эксперименты показывают, что нечто подобное происходит и с другими правильными n-угольниками (за исключением $n = 3, 4, 6$ — см. предыдущий пример).

2. Сохранение площади

Независимо от формы внешнего биллиардного стола, внешнее биллиардное отображение обладает свойством сохранять площадь. Докажем это.

Возьмем близкие точки X и X' на кривой γ. Выберем число $r > 0$ и проведем касательные отрезки длины r к γ в каждой точке между X и X'. Концы этих отрезков пробегают кривые AA' и BB', и при этом $T(AA') = BB'$. Проделаем то же построение, заменяя r на $r - \varepsilon$ (предполагая конечно, что ε — бесконечно малое); мы получим кривую CC' и ее образ DD'. Обозначим через Y точку пересечения отрезков AB и $A'B'$ и через δ (еще одно бесконечно малое!) угол между этими отрезками (см. рис. 5).

Вычислим площадь криволинейного четырехугольника $ACC'A'$ с точностью до малых второго порядка, то есть, пренебрегая ε^2 и δ^2. Имеем:

$$\text{Площадь}\,(AYA') = \frac{1}{2}\delta r^2, \qquad \text{Площадь}\,(CYC') = \frac{1}{2}\delta(r-\varepsilon)^2 = \frac{1}{2}\delta r^2 - \delta\varepsilon r,$$

а значит

$$\text{Площадь}\,(ACC'A') = \delta\varepsilon r.$$

Аналогично,

$$\text{Площадь}\,(BDD'B') = \delta\varepsilon r,$$

то есть отображение T сохраняет площадь бесконечно малого четырехугольника $ACC'A'$. Это и доказывает свойство внешнего биллиардного отображения сохранять площадь.

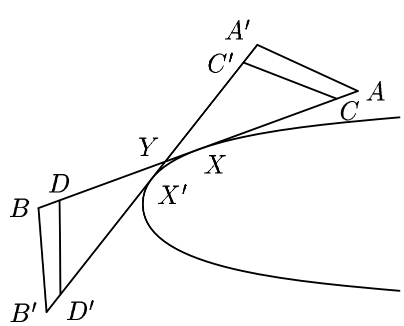

Рис. 5.

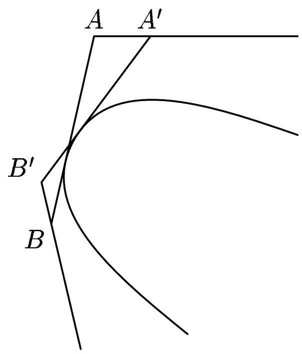

Рис. 6.

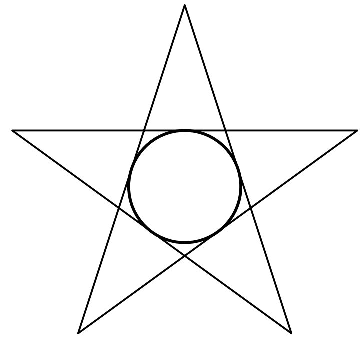

Рис. 7.

Сохранение площади имеет разнообразные следствия. Зададимся, например, таким вопросом. Предположим, что граница внешнего биллиардного стола γ — гладкая строго выпуклая кривая (т. е. ее кривизна всюду положительна). Пусть задано целое число $n \geqslant 3$. Существует ли у внешнего биллиардного отображения n-периодическая орбита?

Ответ на этот вопрос положительный, как показывает следующее рассуждение. Рассмотрим n-угольник наименьшей площади, описанный вокруг γ. Я утверждаю, что стороны этого многоугольника делятся пополам точками касания с кривой γ, то есть что это — n-периодическая орбита внешнего биллиардного отображения.

Действительно, если сторона AB не делится точкой касания пополам, то, слегка повернув отрезок AB в новое положение $A'B'$, можно уменьшить площадь многоугольника (см. рис. 6). Это рассуждение почти идентично предыдущему, доказывающему, что T сохраняет площадь.

Это же рассуждение доказывает, что у внешнего биллиардного отображения есть n-периодические орбиты, обходящие вокруг биллиардного стола k раз, где $1 \leqslant k \leqslant n/2$ (см. рис. 7, на котором $n = 5$, $k = 2$).

В действительности для каждых $n \geqslant 3$ и $1 \leqslant k \leqslant n/2$ найдется по крайней мере две периодические орбиты внешнего биллиардного отображения, но доказать это значительно сложнее. Аналогичный факт для внутреннего биллиарда был доказан Биркгофом в 1920-х гг.

Рассмотрим еще одно следствие сохранения площади. Предположим, что у внешнего биллиардного отображения есть выпуклая инвариантная кривая Γ (говоря об инвариантной кривой, я всегда предполагаю, что Γ обходит вокруг биллиардного стола ровно один раз). Можно ли восстановить биллиардный стол по Γ? Ответ дается следующей конструкцией.

Зафиксируем число $c > 0$ и рассмотрим семейство прямых, отсекающих от фигуры, ограниченной Γ, сегменты постоянной площади c. Полученное однопараметрическое семейство прямых имеет огибающую, т.е. такую кривую γ, которая касается прямых семейства в каждой своей точке (см. рис. 8).

Вообще говоря, кривая γ может не быть гладкой (этот вопрос подробно обсуждается в статье [10]), но мы предположим, что γ — гладкая кривая. Я утвер-

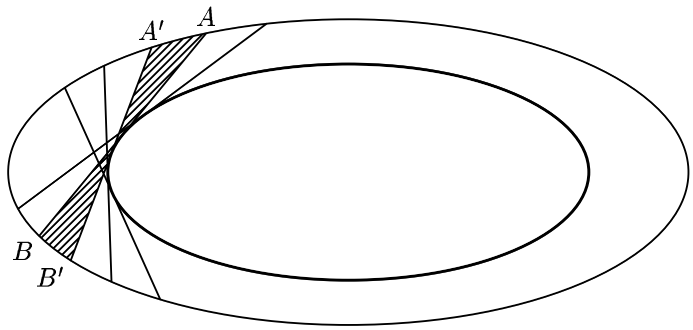

Рис. 8.

ждаю, что Γ — инвариантная кривая внешнего биллиардного отображения T_γ. Действительно, площади заштрихованных инфинитезимальных треугольников на рис. 8 равны, а это, как мы уже видели, означает, что отрезок AB делится точкой касания с кривой γ пополам.

Отметим, что описанная конструкция зависит от параметра c, поэтому кривая Γ задает целое однопараметрическое семейство биллиардных столов. Аналог этой конструкции для внутреннего биллиарда хорошо известен (производится с помощью нерастяжимой нити) — см., например, [2].

Вернемся к примеру 1 из предыдущего параграфа. Если внешний биллиардный стол — круг, то каждая точка вне него лежит на инвариантной кривой; в этом случае говорят, что внешнее биллиардное отображение интегрируемо. Интегрируемость — очень редкое явление; она означает, что отображение весьма регулярно, т. е. поведение точки при итерациях отображения полностью предсказуемо. Существует гипотеза, что интегрируемость внешнего биллиардного отображения имеет место, только если внешний биллиардный стол — эллипс. По всей видимости, доказать это весьма трудно (я верю, что эта гипотеза верна); аналогичная гипотеза для внутреннего биллиарда (приписываемая Биркгофу) тоже не доказана, несмотря на усилия многих математиков.

3. Двойственность между внешним и внутренним биллиардами

Читатель, вероятно, уже отметил своеобразную двойственность между внешним и внутренним биллиардами. Траектория внутреннего биллиарда — вписанный многоугольник, а внешнего — описанный, причем первый имеет экстремальный периметр, а последний — экстремальную площадь (см. предыдущий параграф). Чем объяснить такую двойственность между длиной и площадью?

Ситуация прояснится, если рассмотреть биллиард не на плоскости, а на сфере. Роль прямых в сферической геометрии играют большие круги. Имеется замечательная двойственность между точками и ориентируемыми прямыми: полюсу отвечает экватор (см. рис. 9, на котором точки названы большими буквами, а соответствующие прямые — строчными). Отметим, что (сферическое) расстояние AB равно углу между прямыми a и b.

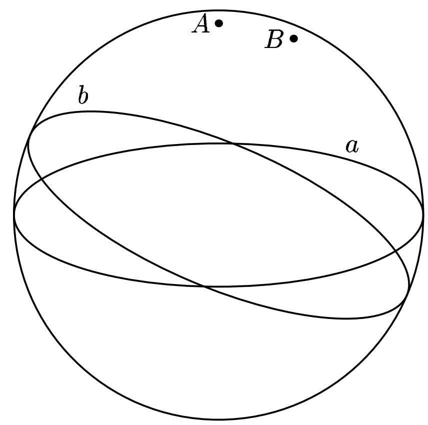

Рис. 9.

Важное свойство сферической двойственности состоит в следующем: если точка A лежит на прямой b, то двойственная точка B лежит на двойственной прямой a (докажите!).

Двойственность распространяется на сферические кривые. Гладкая ориентированная кривая γ определяет однопараметрическое семейство касательных прямых. Сопоставляя этим прямым двойственные точки, получаем однопараметрическое семейство точек, т. е. новую кривую γ^*. Это и есть кривая, двойственная кривой γ. Двойственную кривую γ^* можно построить так: каждую точку X исходной кривой γ нужно сдвинуть на расстояние $\pi/2$ (то есть на четверть большого круга) вдоль ориентированной нормали к γ в точке X; ориентация нормали определяется ориентацией кривой γ по правилу правой руки. Например, если γ — параллель северной широты α, то, в зависимости от ориентации γ, кривая γ^* — параллель северной или южной широты $\pi/2 - \alpha$.

Отметим важное свойство двойственности: кривая, двойственная двойственной, центрально-симметрична исходной, т. е.

$$(\gamma^*)^* = -\gamma.$$

Читатель, не знакомый со сферической двойственностью, получит удовольствие от доказательства сформулированного свойства; подробное обсуждение геометрии сферических кривых содержится в статье [1].

Рассмотрим отражение биллиардного шара от биллиардной кривой γ в точке X (см. рис. 10, левая часть). Двойственная картина изображена на рис. 10 справа (как и раньше, двойственные объекты обозначены одинаковыми буквами).

Закон биллиардного отражения гласит: «угол падения равен углу отражения», т. е. углы, образованные прямыми a и b с касательной l, равны. На двойственной картине это означает, что $AL = LB$, а значит, двойственное биллиардное отображение относительно кривой γ^* переводит точку A в точку B. Итак, сферические внешний и внутренний биллиарды двойственны друг другу.

А как объяснить двойственность между длиной и площадью? Траектория внутреннего биллиарда — вписанный многоугольник экстремального периме-

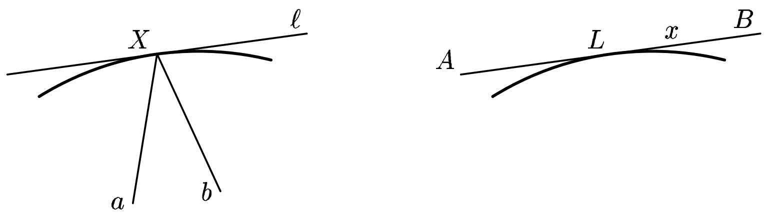

Рис. 10.

тра. Длины двойственны углам. Следовательно, траектория внешнего биллиарда — описанный многоугольник, имеющий экстремальную сумму углов. Сумма углов сферического n-угольника связана с его площадью:

$$\sum \alpha_i = \pi(n-2) + A$$

(конечно, полная площадь сферы равна 4π). Это — теорема Гаусса–Бонне для сферических многоугольников; см., например, [2].

Итак, орбита внешнего биллиардного отображения на сфере — это описанный многоугольник экстремальной площади. Плоскость можно представлять как сферу бесконечного радиуса. Сумма углов n-угольника перестает быть переменной (она равна $\pi(n-2)$), однако площадь сохраняет роль функции на описанных многоугольниках, чьи экстремумы отвечают орбитам внешнего биллиарда.

4. Может ли орбита уйти в бесконечность?

Посмотрим на внешний биллиард «с высоты птичьего полета», т. е. зададимся вопросом: как устроены орбиты очень далеко от биллиардного стола? Если смотреть издалека, то биллиардная кривая γ представляется точкой, а внешнее биллиардное отображение T — центральной симметрией. Эволюция точки под действием отображения T^2 выглядит как непрерывное движение вдоль центрально-симметричной замкнутой кривой Γ, причем это движение удовлетворяет второму закону Кеплера: секториальная скорость постоянна (т. е. в равные времена радиус-вектор заметает равные площади; единица времени — это, конечно, одна итерация отображения T^2). На рис. 11 изображены некоторые внешние биллиардные кривые γ (верхняя строка) и соответствующие инвариантные

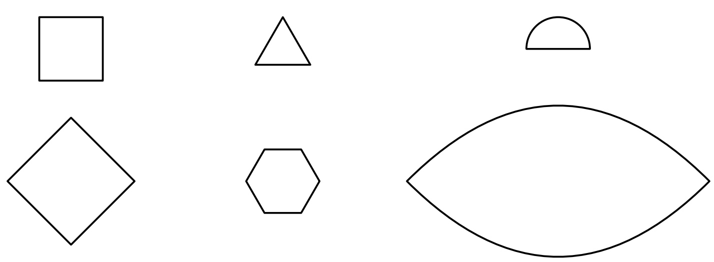

Рис. 11.

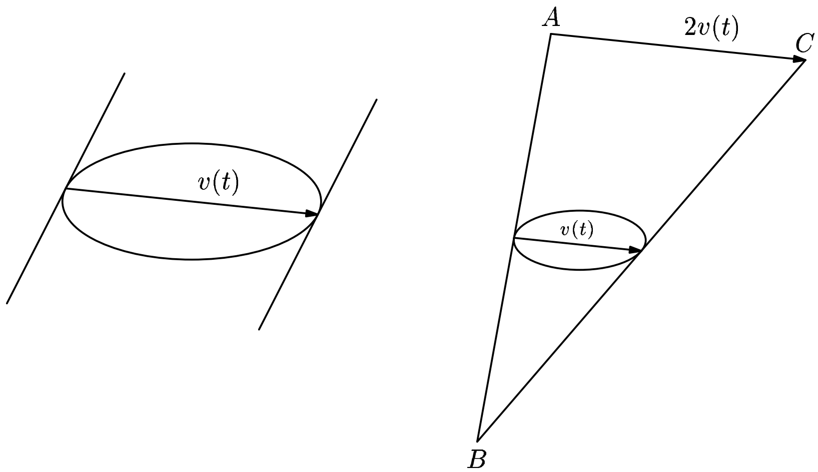

Рис. 12.

кривые в бесконечности Γ (последний столбец состоит из полукруга и из двух равных дуг парабол, пересекающихся под прямым углом).

Сейчас я объясню эти наблюдения. Для определенности, рассмотрим случай гладкой кривой γ (читателю предлагается самостоятельно изучить случай, когда γ — выпуклый многоугольник). Рассмотрим какую-нибудь параметризацию внешней биллиардной кривой $\gamma(t)$ и обозначим через $v(t)$ вектор, конец которого — точка $\gamma(t)$, а начало — точка касания опорной прямой к γ, параллельной вектору $\gamma'(t)$ (см. левую часть рис. 12).

Для точек, очень удаленных от биллиардного стола, угол ABC на правой части рис. 12 пренебрежимо мал, поэтому искомая инвариантная кривая в бесконечности $\Gamma(t)$ (определенная лишь с точностью до подобия) должна иметь касательный вектор, пропорциональный $v(t)$. Иными словами, мы хотим решить дифференциальное уравнение

$$\Gamma'(t) \sim v(t).$$

Ясно, что решение (если оно существует) единственно с точностью до гомотетии — ведь направление кривой Γ задано во всех ее точках вектором v.

Напомним, что векторное произведение $a \times b$ — это ориентированная площадь параллелограмма, образованного векторами a и b. В частности, $a \times b = 0$ тогда и только тогда, когда векторы a и b пропорциональны.

Утверждение. *Решением дифференциального уравнения является следующая вектор-функция:*

$$\Gamma(t) = \frac{v'(t)}{v(t) \times v'(t)}.$$

Доказательство. Имеем:

$$\Gamma' = \frac{v''}{v \times v'} - \frac{v'(v \times v'')}{(v \times v')^2},$$

поэтому

$$v \times \Gamma' = \frac{v \times v''}{v \times v'} - \frac{(v \times v')(v \times v'')}{(v \times v')^2} = 0.$$

Следовательно, $\Gamma'(t) \sim v(t)$, что и требовалось.

Итак, у нас есть формула для кривой Γ. Остается объяснить закон Кеплера. Движение по кривой $\Gamma(t)$ происходит со скоростью $2v(t)$, а секториальная скорость равна

$$2v(t) \times \Gamma(t) = 2\frac{v \times v'}{v \times v'} = 2,$$

то есть не зависит от времени (снова подчеркнем, что значение константы не имеет особого смысла, так как все определено лишь с точность до подобия).

Мы видим, что динамика внешнего биллиардного отображения (а точнее, его второй итерации) в бесконечности хорошо аппроксимируется непрерывным движением вдоль кривых, гомотетичных Γ. Важно понимать, однако, что это — всего лишь приближение к гораздо более сложной динамике. Тем не менее, описанная аппроксимация имеет важные следствия.

Первое следствие относится к случаю, когда кривая γ достаточно гладкая (насколько я знаю, достаточно шестикратной дифференцируемости). В этом случае, используя теорию КАМ (Колмогоров – Арнольд – Мозер), можно доказать, что отображение T_γ действительно имеет инвариантные кривые сколь угодно далеко от биллиардного стола (см. [5, 6]). Такая инвариантная кривая служит «оградой», которую не может пересечь орбита внешнего биллиардного отображения. Следовательно, ни одна орбита отображения T_γ не может уйти в бесконечность.

Второе следствие относится к случаю, когда биллиардный стол — выпуклый многоугольник. В этом случае Γ — центрально-симметричный выпуклый k-угольник (определенный с точностью до гомотетии). Каждой стороне Γ отвечает «время» t — отношение длины стороны к скорости v, с которой происходит движение вдоль этой стороны (эта скорость — одна из диагоналей многоугольника γ; см. предыдущее обсуждение). Набор чисел $\bar{t} = (t_1, \dots, t_k)$ определен с точностью до общего множителя. Внешний биллиардный стол называется *квазирациональным*, если все компоненты $\bar{t}$ можно сделать рациональными (а тогда — и целыми).

Примером квазирационального многоугольника служит многоугольник, все вершины которого имеют целые координаты. Другой пример — правильный многоугольник, для которого $\bar{t} = (1, \dots, 1)$.

В статье [6] Ю. Мозер поставил следующий вопрос: может ли орбита внешнего биллиарда уйти в бесконечность, если внешний биллиардный стол — выпуклый многоугольник? Частичный ответ дается следующей теоремой.

Теорема. *Если внешний биллиардный стол — квазирациональный многоугольник, то ни одна орбита внешнего биллиардного отображения не может уйти в бесконечность.*

Доказательство этой теоремы не использует «тяжелой артиллерии» современной математики, но тем не менее, совсем не просто. Читатель может найти детали в статьях [4, 7, 3]. Полный ответ на вопрос Мозера до сих пор не известен (компьютерные эксперименты дают основания думать, что если внешний биллиардный стол — полукруг, то некоторые орбиты уходят в бесконечность).

Отметим следствие сформулированной теоремы: если внешний биллиардный стол — многоугольник, все вершины которого имеют целые координаты, то все орбиты внешнего биллиардного отображения периодические.

Действительно, целочисленность вершин означает, что каждая орбита внешнего биллиардного отображения дискретна, а теорема означает, что орбита ограничена. Ограниченная и дискретная орбита конечна, что и требуется.

Насколько я знаю, более простого доказательства сформулированного следствия, не использующего вышеуказанной теоремы, не известно; было бы интересно найти такое доказательство.

Еще один открытый вопрос, тоже относящийся к случаю, когда внешний биллиардный стол — выпуклый многоугольник: может ли внешнее биллиардное отображение вовсе не иметь периодических траекторий?

Отметим в заключение параграфа, что внешний биллиард имеет смысл и в геометрии Лобачевского, причем свойство сохранения площади остается в силе. Изучение таких биллиардов — интересная открытая задача.

5. Многомерный внешний биллиард

Внутренний биллиард определен в пространстве любой размерности, например, в обычном трехмерном пространстве. А как обстоит дело с внешним биллиардом?

Оказывается, внешний биллиард можно определить в любом четномерном пространстве (плоскость четномерна!). Вещественное пространство размерности $2n$ можно рассматривать как комплексное пространство размерности n. Нам понадобится операция умножения на $\sqrt{-1}$, которую мы обозначим через J — это линейное отображение пространства $\mathbb{C}^n$ в себя. На плоскости J — это просто поворот на $\pi/2$ в положительном направлении, а в $\mathbb{C}^n$ оператор J можно представлять себе как одновременный поворот каждого координатного пространства $\mathbb{C}$ на $\pi/2$.

Внешний биллиардный стол — это так же, как и раньше, выпуклая ограниченная область. Обозначим ее границу — выпуклую замкнутую гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$, через M. Внешнее биллиардное отображение можно было бы определить, если бы в каждой точке M была определена единственная касательная прямая. Проблема же в том, что таких прямых слишком много. Разрешается эта трудность так.

Обозначим через ν внешний единичный нормальный вектор к M (предполагая, что M — гладкая строго выпуклая гиперповерхность). Вектор $J(\nu)$ касается M и задает ориентированную касательную прямую в каждой точке M. Можно доказать, что через каждую точку A вне биллиардного стола проходит ровно две такие касательные прямые, причем одна из них, r, имеет направление к M, а другая, l, — от M. Теперь ясно, как определить внешнее биллиардное отображение: находим такую точку $X \in M$, что соответствующая прямая r проходит через A, и отражаем A в точке X, чтобы получить новую точку $B = T(A)$ (сравните с началом параграфа 1).

Что данное определение «правильное», показывает следующий аналог свойства сохранения площади. Наряду с обычным скалярным произведением, четномерное пространство обладает другой билинейной операцией — симплектической структурой. Симплектическая структура обобщает векторное произведение на плоскости, то есть ориентированную площадь параллелограмма. Обозначается симплектическая структура через ω и задается следующей формулой:

$$\omega(a, b) = J(a) \cdot b,$$

где a и b — векторы, а точкой обозначено скалярное произведение. В отличие от последнего, ω — кососимметричная операция:

$$\omega(a, b) = -\omega(b, a).$$

Так вот, для любого внешнего биллиардного стола, внешнее биллиардное отображение сохраняет симплектическую структуру. Эта теорема (доказанная в [8, 9]) имеет следствия, известные нам в случае плоскости. Например, у внешнего биллиардного отображения есть периодические траектории всех периодов, начиная с 3.

Тем не менее, о многомерном внешнем биллиарде не известно почти ничего. Например, может ли орбита уходить в бесконечность? В многомерной ситуации теория КАМ больше не обеспечивает существования инвариантных гиперповерхностей. Другой интересный вопрос касается случая, когда внешний биллиардный стол — выпуклый многогранник (скажем, тетраэдр в четырехмерном пространстве). Этот вопрос тоже полностью открыт.

Список литературы

[1] *Арнольд В.* Геометрия сферических кривых и алгебра кватернионов // Успехи Матем. Наук, 1995. Т. 50, вып. 1. С. 3–68.

[2] *Берже М.* Геометрия. М. Мир, 1984.

[3] *Gutkin E., Simanyi N.* Dual polygonal billiards and necklace dynamics // Comm. Math. Phys., 1991. V. 143. P. 431–450.

[4] *Kolodziej R.* The antibilliard outside a polygon // Bull. Pol. Acad. Sci., 1989. V. 37. P. 163–168.

[5] *Moser J.* Stable and random motions in dynamical systems // Ann. of Math. Stud., 1973. V. 77.

[6] *Moser J.* Is the solar system stable? // Math. Intell., 1978. V. 1. P. 65–71.

[7] *Shaidenko A., Vivaldi F.* Global stability of a class of discontinuous dual dilliards // Comm. Math. Phys., 1987. V. 110. P. 625-640.

[8] *Табачников С.* Дуальные биллиарды // Успехи Матем. Наук, 1993. Т. 48, вып. 6. С. 75–102.

[9] *Tabachnikov S.* Billiards // SMF “Panoramas et Syntheses”, 1995. No 1.

[10] *Табачников С., Фукс Д.* Сегменты постоянной площади // Квант, 1990. №8. С. 26–31.