

Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи. Ждем ваших писем (как с вновь предлагаемыми задачами, так и с решениями опубликованных задач).

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. В телесериале «Тайна Санты-Барбары» 15 действующих лиц. Серия называется *содержательной*, если в ней происходит одно из следующих событий. Либо кто-то узнает тайну, либо кто-то узнает, что кто-то знает тайну, либо кто-то узнает, что кто-то не знает тайну. Каково максимально возможное число содержательных серий? (тайна одна и первоначально ее не знает никто).

(С. В. Колягин)

2. Али-Баба делит с разбойником 10 куч золотого песка. Али-Баба может в любой момент взять три кучи и уйти, либо он может выбрать 4 любые кучи и разделить каждую из куч на правую и левую часть. Разбойник образует из этих частей 4 новые кучи, объединяя каждую правую часть с одной из левых. Сможет ли Али-Баба унести с собой свыше 49 кг золотого песка, если всего было 50 кг?

(А. Я. Белов)

3. A_1, \dots, A_n — ненулевые матрицы. Докажите, что найдется матрица B такая, что

$$BA_1BA_2 \dots BA_nB \neq 0. \quad (А. Я. Белов)$$

4. Отрезок SP соединяет точку P на границе и фокус S эллипса. Точка Q лежит на касательной к эллипсу в точке P (достаточно близко к P в направлении приближения к фокусу S). Параллельная SP прямая, проходящая через Q , пересекает эллипс первый раз в точке R . Точка T — основание

перпендикуляра, опущенного из R на отрезок SP . Найдите

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{QT^2}{RQ}.$$

Длины полуосей a, b эллипса считать известными.

(А. Сендеричин)

5. Докажите, что пересечение 10 правильных тетраэдров, вписанных в додекаэдр (вершины тетраэдров являются вершинами додекаэдра), есть икосаэдр. (А. Я. Белов)
6. а) Все коэффициенты многочлена $P(x)$ целые и среди них есть нечетные. Докажите, что найдется многочлен $Q(x)$, имеющий ровно два нечетных коэффициента и делящийся на $P(x)$.
б) Существует ли многочлен $P(x, y)$ с целыми коэффициентами такой, что всякий многочлен $R(x, y)$, делящийся на $P(x, y)$, имеет более миллиона нечетных коэффициентов? (А. Я. Белов)
7. G — группа без кручения, т. е. нет неединичных элементов конечного порядка. Известно, что для некоторого $n > 1$ выполняется тождество $(ab)^n = a^n b^n$. Докажите, что группа абелева, т. е. для любых a, b выполнено $ab = ba$. (Г. А. Карасев)
8. Разбейте плоскость на непересекающиеся отрезки равной длины. (Фольклор)
9. а) В клетках бесконечной клетчатой ленты записаны положительные числа. Известно, что каждое число не меньше среднего арифметического трех соседей слева и трех справа. Докажите, что числа равны.
б) На клетчатой плоскости в клетках расставлены положительные числа так, что каждое записанное число равно среднему арифметическому 4 своих соседей. Докажите, что все числа равны.
в) Верно ли аналогичное утверждение для пространственной решетки? (И. Ф. Шарыгин)
10. Случайные величины X, Y, Z равномерно распределены на единичном отрезке. Докажите, что величина $(XY)^Z$ также равномерно распределена. (М. Кельберт)