Олимпиады

30-я Американская Математическая Олимпиада, год 2001

Г. А. Гальперин

I: Как проводилась олимпиада. USAMO — такова аббревиатура названия последнего тура математической олимпиады, проводившейся в США весной 2001-го года в тридцатый раз. На этот тур было приглашено 250 победителей предыдущего тура AIME, на котором давалось (как и на двух других турах, ему предшествующих, с аббревиатурами AHSME и AJHSME) два-три десятка тестовых задач: из 5 ответов, предлагаемых после каждой задачи, следовало выбрать правильный и обвести его кружочком. В отличие от AHSME, AJHSME и AIME, на USAMO никаких тестовых задач нет: участникам самим надо давать ответы, а в решениях следует проводить строгие доказательства и рассуждения.

Все туры олимпиады, предшествующие USAMO, проводятся по школам, а USAMO — в крупных университетах соответствующих штатов США. Задание, предлагаемое для USAMO, составляется специальным «большим» жюри, раскиданным по территории США. Задолго до начала олимпиады каждый член «большого» жюри посылает в ее «штаб» от одной до пяти свежих задач; затем весь полученный комплект («pool») примерно из 50–60 задач рассылается всем членам жюри, и они в письменном виде шлют в штаб свои комментарии о качестве, сложности и приемлемости каждой отдельно взятой задачи. В результате еще двух итераций такого рода возникает «ядро» из 10–15 лучших задач. Это ядро задач затем обсуждается «ядром» жюри из 6 человек («малым жюри»); такое обсуждение («conference») происходит обычно по телефону в специально назначенный воскресный день, и на нем производится отбор 6 лучших задач для USAMO. Окончательная шлифовка формулировок отобранных задач поручается председателю жюри и его заместителю, которые

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 6, 2002(119–126)

изготавливают также специальный буклет из задач USAMO и их решений для тех, кто проверяет работы школьников.

Примерно через неделю после проведения тура USAMO небольшая часть «большого» жюри съехалась на проверку работ школьников в город Линкольн (Lincoln), штат Небраска (Nebraska). После тщательной проверки и перепроверки работ участников все результаты (очки, заработанные школьниками по каждой задаче) были внесены в компьютер, и соответствующая программа проранжировала участников по их результатам в порядке убывания. В компьютер были внесены также и предложения по специальным наградам. Эти награды представляют собой приличные денежные премии, вручаемые позже не самому школьнику, а тому университету, в который он пойдет учиться после окончания школы (так называемые scholarships). На руки же награждаемый получает только специальную грамоту, медаль и какой-нибудь довольно дорогой подарок, например компьютер «lap-top» последней марки. Имена участников были закодированы числами и только после того, как вся проверка была полностью завершена и ее результаты зафиксированы в компьютере, председатель жюри нажал последний раз клавишу компьютера, и... возник ранжированный список имен всех 250 участников. Результаты олимпиады в распечатанном виде были вручены членам жюри на прощальном завтраке в день их отлета по домам; в этот же день участникам разослали по почте их результаты.

Двенадцать школьников с наилучшими результатами стали победителями USAMO и были приглашены на награждение в столицу США — г. Вашингтон. В этом году, в отличие от прошлых лет, в Вашингтон пригласили 13 школьников вместо двенадцати: тринадцатым был *не-победитель* Майкл Хамбург, которого наградили премией американского математического института Клэй (Clay) за самое короткое и изящное решение последней, наиболее трудной задачи олимпиады (о ней речь впереди). Единственного победителя Рэйда Бартона, решившего все шесть задач олимпиады, наградили почетной премией Грэйтцера – Кламкина; вручал эту премию сам Мюррей Кламкин (Murray Klamkin), известный канадский композитор задач, специально приехавший из Канады в США для этого награждения.

Победителей, приглашенных в Вашингтон, чествовали три раза. Первый раз неофициально, в штаб-квартире Математической Ассоциации Америки (MAA), куда кроме членов жюри и официальных лиц съехались разнообразные спонсоры для объявления своих наград (главным спонсором была фирма «The Akamai Foundation»). Второй раз официально, в Академии Наук США, где школьников вызывали по одному на сцену вместе со своими родителями, братьями и сестрами (если таковые имелись), вручали медаль и грамоту, и фотографировали всю семью (а перед этим профессор Принстонского университета Фрэнк Морган (Frank Morgan) прочитал замечательную лекцию о мыльных пузырях и «Теореме о сдвоенном мыльном пузыре» («The Double Soap Bubble Theorem»)). И, наконец, третий раз победителей награждали на официальном банкете в дипломатическом зале Министерства Иностранных дел США (Diplomatic Reception Rooms of the United States Department of State), где школьникам вручались специальные призы по разным поводам. В промежутках между описанными событиями делалось много фотографий, например у совершенно необычной бронзовой скульптуры Альберта Эйнштейна перед входом в Академию Наук США, которую школьники облепили со всех сторон.

II: О задачах. USAMO проводилась в 2001-м году 1 мая в два этапа: первый с 9 часов утра до полудня, второй с 1 часа дня до 4 часов дня. На каждом этапе предлагалось решить 3 трудные задачи, расположенные в порядке возрастания их сложности (так что самыми трудными были задачи #3 и #6). Как выше уже было сказано, в решениях задач USAMO надо предъявлять строгие доказательства, а не угадывать ответы. Характер USAMO во многом напоминает Международные олимпиады: те же 6 задач, $3 + 3$; задачи примерно такой же сложности; кроме изящных соображений, при решении нужно использовать математическую технику, порой достаточно глубокую — никакая задача не решается в «один ход» (чем знамениты Московские и Санкт-Петербургские олимпиады); как правило, каждая задача имеет больше одного решения.

Ниже мы приводим условия всех шести задач (см. часть III) и их решения (часть IV). Хочется также обратить особое внимание читателя на наиболее трудные, наиболее красивые, и, в то же время, наименее техничные задачи #3 и #6. Отметим, что геометрическая задача #6 оказалась самой «математической» и идейной: помимо того, что у нее есть большое количество элементарных решений, автору этой заметки удалось обобщить эту задачу на многомерный случай и на однородные (криволинейные) пространства, в частности на (многомерную) сферу и пространство Лобачевского. Читателю, знакомому с многомерными и однородными пространствами, предлагается найти обобщение приводимого ниже решения задачи #6 самостоятельно.

III: Условия задач.

Этап I (9:00–12:00)

1. В каждой из восьми шкатулок находится 6 цветных шариков. На раскраску всех шариков использовано n разных цветов, причем каждый шарик покрашен в один цвет. Известно, что все шарики в одной и той

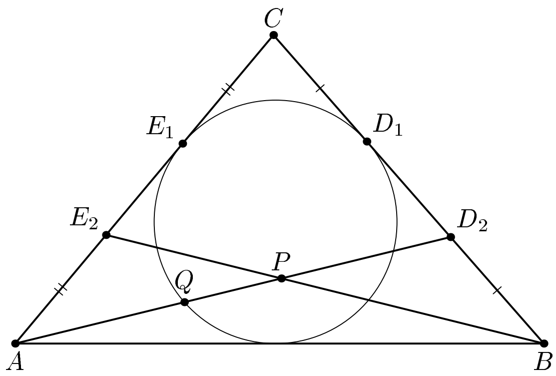

Рис. 1.

же шкатулке разноцветны и что никакая пара цветов не встречается одновременно более чем в одной шкатулке. Найти наименьшее возможное значение n, для которого такая раскраска шариков существует.

2. В треугольник ABC вписана окружность ω. Точки касания ω со сторонами BC и AC обозначены, соответственно, через D_1 и E_1. На сторонах BC и AC отмечены также точки D_2 и E_2, соответственно, для которых $CD_2 = BD_1$ и $CE_2 = AE_1$. Пусть P — точка пересечения отрезков AD_2 и BE_2, и Q — ближайшая к вершине A точка пересечения окружности ω и отрезка AD_2 (рис. 1). Доказать, что $AQ = D_2P$.

3. Неотрицательные числа a, b и c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Доказать, что $0 \leqslant ab + bc + ca - abc \leqslant 2$.

Этап II (13:00–16:00)

4. На плоскости даны треугольник ABC и точка P такие, что треугольник Δ, составленный из отрезков PA, PB и PC, тупоугольный. Наибольшая сторона треугольника Δ конгруэнтна отрезку PA. Доказать, что $\angle BAC$ острый.

5. Множество S целых (необязательно положительных) чисел удовлетворяет следующим условиям: (A) существуют такие числа $a, b \in S$, что НОД$(a, b) =$ НОД$(a-2, b-2) = 1$; (B) если x и y — элементы S (возможно, равные), то $x^2 - y \in S$. Доказать, что S совпадает с множеством всех целых чисел $\mathbb{Z}$.

6. Каждой точке плоскости поставлено в соответствие некоторое вещественное число. Известно, что для произвольного треугольника число, стоящее в центре вписанной в него окружности, равно среднему арифметическому чисел, стоящих в его вершинах. Доказать, что всем точкам плоскости приписано одно и то же число.

IV: Решения задач.

Решение задачи 1. *Ответ*: $n_{\min} = 23$. Приведем *некомбинаторное* решение, основанное на выпуклости гиперболы $y = 1/x$.

◀ Пусть $1, 2, \ldots, n$ — цвета шариков. Расставим все цвета построчно («по-шкатулочно») в таблицу **A** размером 8×6 (так что получим 8 строк-шкатулок с индексом i и 6 столбцов-шариков с индексом j.) Пусть b_{ij} обозначает число шариков того же цвета, что и шарик с номером j в шкатулке с номером i; заполним этими числами новую таблицу **B** размером 8×6. Очевидное, но решающее замечание: *сумма обратных величин* $1/b_{ij}$ *по всей таблице* **B** *равна* n. (Докажите это самостоятельно!)

Поэтому рассмотрим две строчечные суммы: $S_i = \sum_{j=1}^{6} b_{ij}$ и $s_i = \sum_{j=1}^{6}(1/b_{ij})$. Так как в строке i все шесть цветов различны, остальные семь шкатулок добавят в S_i максимум 7 шариков, так что имеем ограничение $S_i \leqslant 6 + 7 = 13$. Поскольку функция $y = 1/x$ выпукла вверх, то значение s_i *минимально*, когда одно из b_{ij} равно 3, а остальные пять чисел равны 2. Итак, $s_i \geqslant 1/3 + 5/2 = 17/6$. Согласно замечанию, $n = \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{6} 1/b_{ij} \geqslant 8 \cdot 17/6 = 68/3 > 22$, откуда $n \geqslant 23$.

Пример для $n = 23$ (по-шкатулочно):
$(1,3,4,5,6,7)$; $(1,8,9,10,11,12)$; $(1,13,14,15,16,17)$; $(2,3,8,13,18,19)$; $(2,4,9,14,20,21)$; $(2,5,10,15,22,23)$; $(6,11,16,18,20,22)$; $(7,12,19,21,23)$.▶

Решение задачи 2. Докажите самостоятельно, что: (1) *вневписанная окружность, касающаяся стороны* BC, *касается этой стороны именно в точке* D_2 (*где* $CD_2 = BD_1$); и, как (не очень простое) следствие из этого, что (2) D_1Q — *диаметр вписанной окружности* ω (так что $O \in D_1Q$ и $D_1O = OQ$, где O — центр ω, рис. 2).

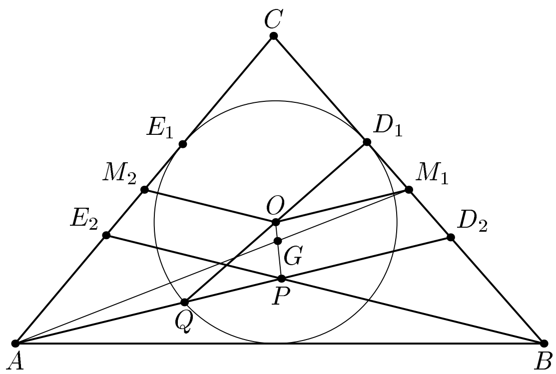

Рис. 2.

◀ Пусть теперь M_1 — середина стороны BC; тогда M_1 — середина отрезка D_1D_2 и OM_1 — средняя линия $_\triangle QD_1D_2$. Отсюда $M_1O \parallel QD_2$, $M_1O \parallel AD_2$, $QD_2 = 2M_1O$. Если M_2 — середина стороны AC, то, по аналогичным соображениям, $M_2O \parallel BE_2$. Пусть G — точка пересечения медиан $_\triangle ABC$ (т. е. $G = AM_1 \cap BM_2$).

Рассмотрим гомотетию δ с центром G и коэффициентом $k = -1/2$. По определению, $\delta(A) = M_1$ и $\delta(B) = M_2$. Параллельные прямые при гомотетии переходят в параллельные прямые и точки пересечения прямых переходят в точки пересечения их образов. Поэтому из $AD_2 \parallel M_1O$ следует $\delta(AD_2) = M_1O$; из $BE_2 \parallel M_2O$ следует $\delta(BE_2) = M_2O$; отсюда

$$\delta(AD_2 \cap BE_2) = \delta(AD_2) \cap \delta(BE_2) = M_1O \cap M_2O = O,$$

или короче $\delta(P) = O$. Из $\delta(A) = M_1$, $\delta(P) = O$ вытекает $AP = 2M_1O$. Но $QD_2 = 2M_1O$, значит $AP = QD_2$. Вычитая общий отрезок PQ, находим $AQ = PD_2$. ▶

Решение задачи 3. Эта задача имеет довольно громоздкое и техническое (но нетривиальное!) тригонометрическое решение, начинающееся словами: «Сделаем замену $a = 2\sin(A/2)$, $b = 2\sin(B/2)$, $c = 2\sin(C/2)$, где A, B и C — углы треугольника». Задачу можно решить также с помощью правила множителей Лагранжа, но и это (стандартное с точки зрения математика-профессионала) решение довольно громоздко, хотя и весьма надежно. Однако богатый опыт членов жюри подсказывал, что у изящно сформулированной задачи должно иметься изящное же решение. Оно в конце концов и было найдено.

◀ Заметим сначала, что по крайней мере одно из трех чисел a, b, c не превосходит 1, иначе $a^2 + b^2 + c^2 + abc > 4$. Пусть, например, $a \leqslant 1$. Тогда сразу получается нижняя оценка: $ab + bc + ca - abc = a(b + c) + (1 - a)bc \geqslant \geqslant 0$. Нетрудно показать, что равенство достигается только на следующих тройках чисел: $(2, 0, 0)$; $(0, 2, 0)$ и $(0, 0, 2)$.

Докажем теперь верхнюю оценку. Решающую роль будет играть следующий простой факт: среди любых трех чисел a, b, c либо какие-то два $\leqslant 1$, либо какие-то два $\geqslant 1$ (принцип Дирихле для трех точек и двух полупрямых с общим концом $x = 1$). Без ограничения общности будем считать, что этими числами являются b и c, так что $(1 - b)(1 - c) \geqslant 0$. Поскольку всегда $b^2 + c^2 \geqslant 2bc$, получаем $4 = a^2 + b^2 + c^2 + abc \geqslant a^2 + 2bc + abc$. Отсюда $4 - a^2 \geqslant bc\ (2 + a)$ и $2 - a \geqslant bc$. После этого верхняя оценка получается мгновенно:

$$\begin{aligned} ab + bc + ac - abc &\leqslant ab + (2 - a) + ac(1 - b) = \\ &= 2 - a\Big[(1 - b) - c(1 - b)\Big] = 2 - a(1 - b)(1 - c) \leqslant 2, \end{aligned}$$

поскольку $a(1 - b)(1 - c) \geqslant 0$. ▶

Равенство достигается только если одновременно $b^2 + c^2 = 2bc$ (т. е. при $b = c$) и $a(1-b)(1-c) = 0$. Тогда, если $a \neq 0$, то $b = c = 1$, откуда и $a = 1$; если $a = 0$, то из условия задачи $2b^2 = 4$ и $b = c = \sqrt{2}$. Циклические перестановки символов a, b, c дают все возможные ответы: $(1,1,1)$; $(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$; $(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$.

Решение задачи 4. Имеется несколько решений этой задачи (одно из них основано на обобщенной теореме Птолемея). Самое простое — векторное решение.

◀ Поместим начало координат в точку A и для произвольной точки Q будем обозначать через q вектор $\overrightarrow{AQ}$ и через $|q|$ длину вектора q. Дано: $|p-b|^2 + |p-c|^2 < |p|^2$. Это неравенство эквивалентно такому (точка означает скалярное произведение векторов): $p \cdot p + b \cdot b + c \cdot c - 2p \cdot b - 2p \cdot c < 0$. Добавляя $2b \cdot c$ к обеим частям, получаем $|p-b-c|^2 < 2b \cdot c$; следовательно, $b \cdot c > 0$. А тогда $\cos \angle BAC = \dfrac{b \cdot c}{|b||c|} > 0$, т. е. $\angle BAC$ острый. ▶

Решение задачи 5. ◀ Будем говорить, что множество S *устойчиво под действием преобразования* $x \mapsto f(x)$, если из $x \in S$ следует $f(x) \in S$. Если $c, d \in S$, то из условия (B) имеем, что S устойчиво под действием $x \mapsto c^2 - x$ и $x \mapsto d^2 - x$. Тогда S устойчиво и под действием $x \mapsto c^2 - (d^2 - x) = x + (c^2 - d^2)$; аналогично и под действием $x \mapsto x + (d^2 - c^2)$. Поэтому, если n есть целочисленная линейная комбинация чисел вида $c^2 - d^2$, где $c, d \in S$, то S устойчиво под действием $x \mapsto x + n$ и $x \mapsto x - n$. В частности, это верно для $n = m$, где $m = \text{НОД}\{c^2 - d^2 : c, d \in S\}$.

Из условия (A) следует, что $S \neq \varnothing$. Поэтому остается только доказать, что $m = 1$. Допустим противное: $m \neq 1$.

Возьмем простой делитель p числа m; тогда $c^2 - d^2 \equiv 0 \pmod{p}$ при всех $c, d \in S$. Отсюда либо $d \equiv c \pmod{p}$, либо $d \equiv -c \pmod{p}$. По условию (B), если $c \in S$, то $c^2 - c \in S$, так что либо $c^2 - c \equiv c \pmod{p}$ (и тогда $c^2 \equiv 2c \pmod{p}$), либо $c^2 - c \equiv -c \pmod{p}$ (и тогда $c^2 \equiv 0 \pmod{p}$). Отсюда получаем следующее утверждение:

(C) для каждого $c \in S$ либо $c \equiv 0 \pmod{p}$, либо $c \equiv 2 \pmod{p}$.

По условию (A) найдутся такие числа $a, b \in S$, что $\text{НОД}(a, b) = 1$, значит по крайней мере одно из чисел a, b не кратно p; обозначим это не кратное p число через α. Итак, $\alpha \in S$ и $\alpha \not\equiv 0 \pmod{p}$. Точно так же, из $\text{НОД}(a-2, b-2) = 1$ следует, что p не может делить одновременно как $a - 2$, так и $b - 2$. Следовательно, имеется элемент в S, обозначим его β, для которого $\beta \not\equiv 2 \pmod{p}$. Из сказанного и из полученного выше условия (C) вытекает единственная возможность: $\alpha \equiv 2 \pmod{p}$ и $\beta \equiv 0 \pmod{p}$. Но по условию (B), $\beta^2 - \alpha \in S$. Положим $c = \beta^2 - \alpha$ и подставим его в условие (C). Из $\beta^2 - \alpha \equiv 0 - 2 = -2 \pmod p$ следует:

$$\text{либо} \ \ -2 \equiv 0 \pmod p), \quad \text{либо} \ \ -2 \equiv 2 \pmod p.$$

Каждое из этих равенств справедливо только при $p = 2$. А тогда условие (C) должно быть переформулировано так:

(C) все элементы множества S четны.

Но это утверждение противоречит условию (A)! Таким образом, допустив, что $m \neq 1$, мы получили противоречие. Значит, $m = 1$ и, следовательно, $S = \mathbb{Z}$. ▶

Решение задачи 6. Точки будем обозначать прописными буквами, а числа, приписанные точкам, будем обозначать теми же, но строчными, буквами. Для совпадающих точек или чисел мы будем использовать знак равенства «=», для несовпадающих – знак неравенства «≠».

Лемма 1. *Пусть A, B, C, D — такие четыре точки на прямой ℓ, что отрезок CD содержит отрезок AB, а середины этих отрезков совпадают. Тогда $c - d = 3(a - b)$.*

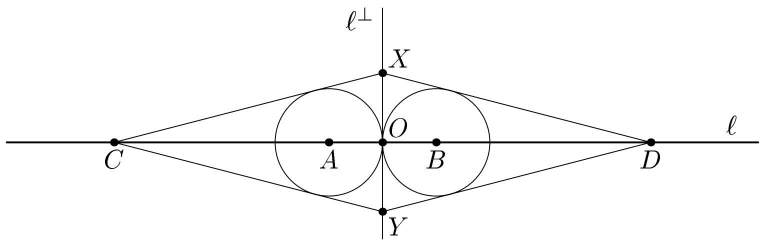

Рис. 3.

Доказательство. Пусть O — середина отрезка AB. Построим окружности $\mathbf{c}_A$ и $\mathbf{c}_B$ с центрами A и B и радиусом $AO = OB$. Проведем касательные CX, CY к окружности $\mathbf{c}_A$, и DX, DY к окружности $\mathbf{c}_B$; здесь X и Y — точки на перпендикуляре $\ell^\perp$, восставленном к ℓ в точке O (рис. 3). Из $_\triangle CXY$ получаем: $c + x + y = 3a$; из $_\triangle DXY$: $d + x + y = 3b$. Следовательно, $c - d = 3(a - b)$.

◀ Нам надо доказать, что произвольным точкам A и B плоскости приписаны одинаковые числа: $a = b$.

Рассмотрим три пары вложенных отрезков $EF \supset CD \supset AB$ с общей серединой. Применяя лемму, получаем:

$$e - f = 3(c - d) = 3(a - b) \quad \Longrightarrow \quad 9(a - b) = 3(a - b) \quad \Longrightarrow \quad a = b,$$

что и требовалось доказать. ▶