Семейство Фейербаха

Л. А. Емельянов Т. Л. Емельянова

Внутри любого разностороннего треугольника есть точка, через которую проходят две замечательные его окружности — вписанная и окружность девяти точек. (Для нашего исследования случай равнобедренного треугольника является вырожденным.) Они, как известно, касаются друг друга в этой точке. Этот факт, а также факт касания окружности девяти точек трех вневписанных окружностей треугольника, был доказан немецким математиком XIX века К. Фейербахом, именем которого довольно часто и называют окружность девяти точек.

Нами были обнаружены новые замечательные свойства этой точки (будем называть ее точкой Фейербаха), которые делают ее не менее значительной, чем те девять, давших название известной окружности. *Окружность десяти точек* — было бы более справедливо. В частности, через эту точку проходят еще и окружность, проходящая через основания биссектрис, а также окружность, проходящая через точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника.

Рассмотрим каждую из упомянутых выше окружностей как окружность, порожденную некоторым «чевианным» треугольником, около которого она описана. «Чевианным» для краткости будем называть треугольник с вершинами в основаниях чевиан исходного треугольника. Так, окружность девяти точек будем считать порожденной, например, ортотреугольником, ну а вписанную окружность — ее точками касания. Будем называть треугольник с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами треугольником Жергонна. (Точкой Жергонна называется точка пересечения соответствующих чевиан.) *Существуют ли еще «чевианные» треугольники, у которых описанная окружность проходит через точку Фейербаха?*

Задача 1. Окружность, проходящая через основания биссектрис, проходит через точку Фейербаха.

Решение. Обозначения: A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис $\triangle ABC$, F — точка Фейербаха, F_1, F_2, F_3 — точки касания вневписанных окружностей с окружностью девяти точек — внешние точки Фейербаха (рис. 1).

У вписанной и вневписанной окружностей есть два центра гомотетии. Например, для вписанной и вневписанной окружностей, расположенных

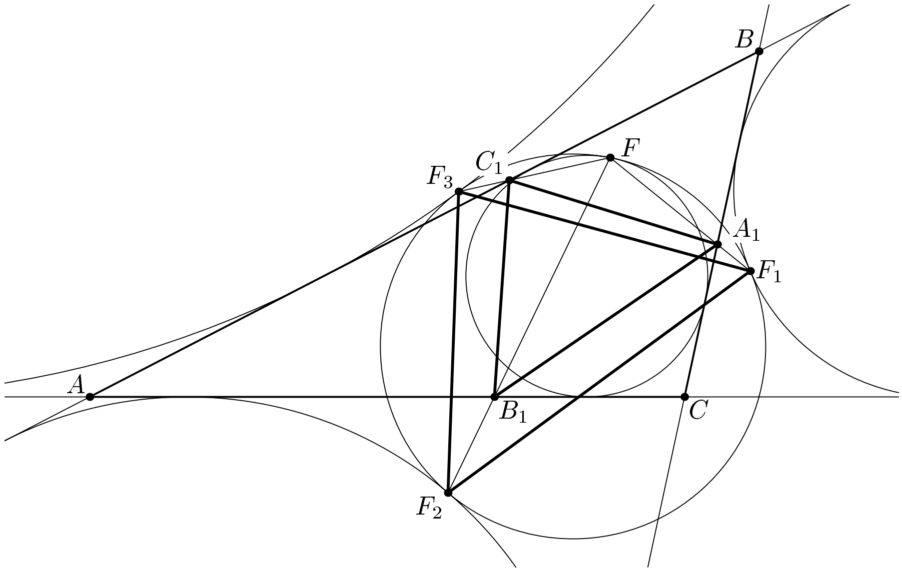


Рис. 1.

внутри угла ABC, внешним центром гомотетии, т. е. центром гомотетии с положительным коэффициентом, служит вершина угла B, а центром гомотетии с отрицательным коэффициентом служит основание биссектрисы B_1, которое является точкой пересечения их общих внутренних касательных. Точка касания F_2 вневписанной окружности и окружности девяти точек является, в свою очередь, их центром гомотетии с отрицательным коэффициентом. Точка F — центр гомотетии вписанной окружности и окружности девяти точек. По теореме о трех центрах гомотетии, точки F_2, B_1 и F лежат на одной прямой. Аналогично для троек F_3, C_1, F и F_1, A_1, F. Таким образом, треугольники $F_1F_2F_3$ и $A_1B_1C_1$ перспективны относительно точки Фейербаха. Кроме того, эти треугольники подобны (*Виктор Тебо*).[1)] Поэтому, угол $C_1B_1A_1$, равный углу $F_1F_2F_3$, составляет в сумме с углом C_1FA_1 $180°$, т. е. точки A_1, B_1, C_1, F лежат на одной окружности, ч. т. д.

Итак, еще одна известная окружность в треугольнике проходит через точку Фейербаха, т. е. «семейство Фейербаха» состоит уже, по крайней мере, из трех членов.

Что общего у треугольников, породивших эти три окружности? Иными словами, что общего у ортотреугольника, треугольника Жергонна и треугольника с вершинами в основаниях биссектрис?

[1)] И. Ф. Шарыгин. «Геометрия 9–11», задача №586.

Оказывается, их соответствующие стороны (как прямые) пересекаются в одной точке. (Соответствующими будем считать стороны «чевианных» треугольников, концы которых лежат на сторонах одного угла $\triangle ABC$.)

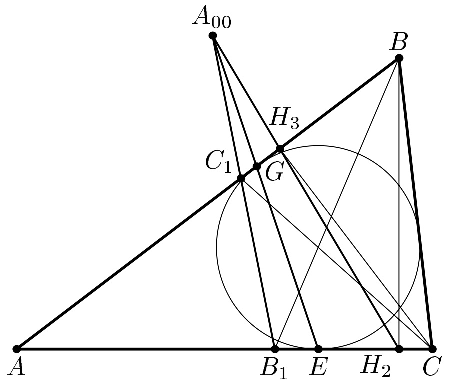


Рис. 2.

Задача 2. Пусть H_2 и H_3 — основания высот на сторонах AC и AB соответственно, B_1 и C_1 — основания биссектрис, E и G — точки касания вписанной окружности на тех же сторонах. Доказать, что прямые H_2H_3, B_1C_1 и EG пересекаются в одной точке (на рис. 2 точка A_{00}).

Предлагаем читателю решить эту задачу самостоятельно.

Точки пересечения соответствующих сторон ортотреугольника и треугольника Жергонна, о которых идет речь в задаче 2, играют важную роль в дальнейшем изложении. Будем называть эти точки *полюсами* треугольника. Каждая пара сторон треугольника имеет свой полюс.

Если стороны некоторого «чевианного» треугольника проходят через соответствующие полюсы, то не пройдет ли его описанная окружность через точку Фейербаха? Положительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема, в которой и будет построено все «семейство Фейербаха».[2)]

Теорема. *Дан $\triangle ABC$. Точки A_{00}, B_{00}, C_{00} — его полюсы. Будем говорить, что A_{00} соответствует вершине A или паре сторон AB и AC, B_{00} соответствует вершине B, C_{00} — вершине C. Возьмем на прямой AC произвольную точку Y и соединим ее с полюсами A_{00} и C_{00}. Прямые YA_{00} и YC_{00} пересекают прямые AB и BC соответственно в точках Z и X* (*рис.* 3). *Тогда*

а) *прямая XZ проходит через полюс B_{00};*

б) *точки X, Y, Z являются основаниями чевиан в $\triangle ABC$;*

в) *окружность, описанная около $\triangle XYZ$, проходит через точку Фейербаха.*

В дальнейшем нам удобно будет пользоваться языком проективных и полярных преобразований. Поэтому введем некоторые понятия и перечислим их основные свойства.

[2)] Другой способ построения этого семейства сформулирован в виде задачи №15 в конце статьи.

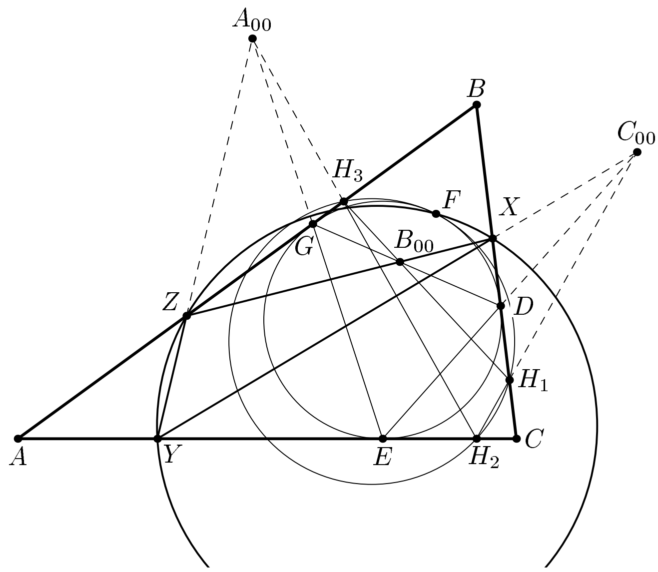
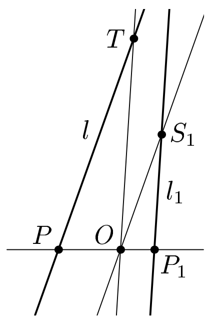


Рис. 3. *$H_1H_2H_3$ — ортотреугольник, DEG — треугольник Жергонна.*

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВОЙСТВА



1. Пусть l и l_1 — две различные прямые. Спроектируем прямую l на прямую l_1 из центра O, не лежащего ни на одной из этих прямых, т. е. сопоставим каждой точке P прямой l ту точку P_1 прямой l_1, в которой ее пересекает прямая OP. Точка T прямой l такая, что $OT \parallel l_1$, проектируется в бесконечно удаленную точку прямой l_1. Прообразом точки S_1 прямой l_1, для которой $OS_1 \parallel l$, будем считать бесконечно удаленную точку прямой l.

2. Пусть точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Выражение $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ называется *двойным* или *сложным отношением*, в котором две точки C и D делят отрезок AB, или двойным отношением четырех точек A, B, C, D. Оно может быть положительным или отрицательным, так как простое отношение $\frac{AC}{BC}$ может быть положительным или отрицательным в зависимости от того, лежит точка C внутри или вне отрезка AB.

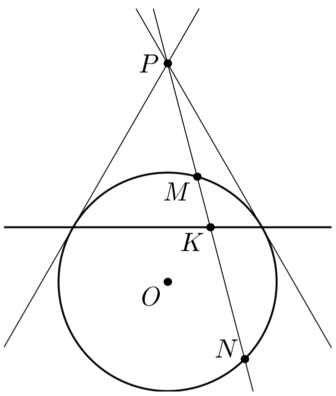
3. Точки A, B, C, D образуют *гармоническую четверку*, если их двойное отношение равно -1. В этом случае точки C и D делят отрезок AB в равных отношениях по абсолютной величине, но противоположных по знаку.

4. При центральном проектировании прямой сохраняется двойное отношение четырех точек.

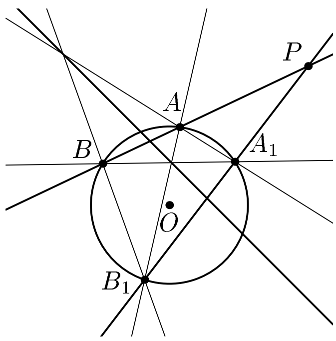
5. Прямые a, b, c, d, проходящие через одну точку, образуют гармоническую четверку, если точки их пересечения с некоторой прямой образуют гармоническую четверку.

6. Чтобы четверка прямых была гармонической, необходимо и достаточно, чтобы на какой-либо прямой, параллельной одной из этих четырех прямых, три других отсекали два равных отрезка.

7. Если через фиксированную точку P, не лежащую на окружности с центром O, провести произвольную прямую, пересекающую окружность в точках M и N, то геометрическое место точек K, которые вместе с точкой P делят отрезок MN гармонически, есть прямая линия, называемая *полярой* точки P относительно этой окружности. Точка P называется *полюсом* этой прямой относительно окружности. Эта прямая перпендикулярна прямой OP. Если точка лежит вне окружности, то полярой этой точки является прямая, соединяющая точки касания этой окружности с двумя прямыми, проходящими через эту точку. Если точка лежит на окружности, то полярой считается касательная к окружности, проведенная в этой точке.



8. Если три прямые проходят через одну точку, то соответствующие им полюсы относительно окружности лежат на одной прямой, и наоборот.



9. Пусть две прямые, проходящие через точку P, пересекают некоторую окружность в точках A и B, A_1 и B_1. Тогда пары прямых AA_1 и BB_1, AB_1 и A_1B пересекаются на поляре точки P относительно окружности.

10. Если через фиксированную точку P провести произвольную прямую, пересекающую стороны данного угла в точках M и N, то геометрическое место точек K, которые вместе с точкой P делят отрезок MN гармонически, есть прямая, называемая полярой точки P относительно угла. Эта прямая проходит через вершину угла.

Подробнее о проективных и полярных преобразованиях можно прочитать, например, в книге И. М. Яглома «Геометрические преобразования» и книге Ж. Адамара «Элементарная геометрия».

Задача 3. Пусть A_1, B_1, C_1 — основания чевиан в $\triangle ABC$, K — точка пересечения прямых A_1C_1 и AC (рис. 4). Доказать, что точки A, B_1, C, K образуют гармоническую четверку. Верно и обратное.

Решение. По теореме Менелая для $\triangle ABC$ и прямой A_1C_1,

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CK}{KA}=-1,$$

а по теореме Чевы $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{AB_1}{B_1C}$. Следовательно, $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{AK}{KC}=-1$, ч. т. д.

Ранее было введено понятие полюса $\triangle ABC$ как точки пересечения соответственных сторон ортотреугольника и треугольника Жергонна. Некоторые факты, излагаемые ниже, доказываются в общем виде, т. е. для полюсов, порожденных двумя любыми «чевианными» треугольниками.

Задача 4. Пусть точки A_1, B_1, C_1, а также A_2, B_2, C_2 — основания чевиан в $\triangle ABC$. Пусть C' — точка пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 (полюс, соответствующий вершине C), A' — точка пересечения прямых B_1C_1 и B_2C_2 (полюс, соответствующий вершине A), B' — точка пересечения прямых A_1C_1 и A_2C_2 (полюс, соответствующий вершине B). Доказать, что прямые $A'B'$, $B'C'$ и $A'C'$ проходят соответственно через точки C, A и B (рис. 5).

Решение. Пусть прямые $A'C'$ и AC пересекаются в точке R. Для доказательства того, что точка B лежит на прямой $A'C'$, достаточно показать, что двойные отношения точек A, C_2, B, C_1 и A, B_2, R, B_1

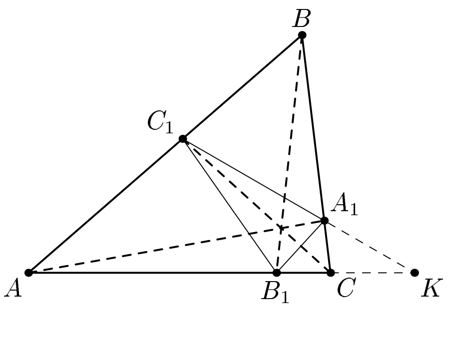


Рис. 4.

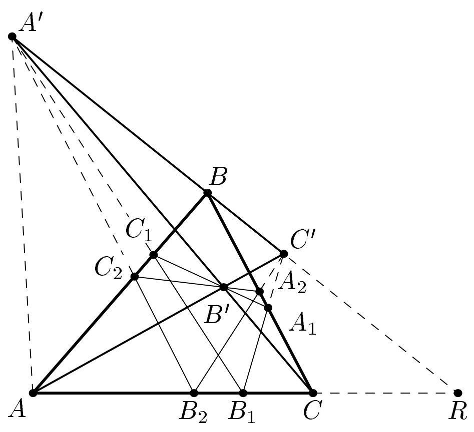


Рис. 5.

равны. По теореме Чевы

$$\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{AB_2}{B_2C} \cdot \frac{CA_2}{A_2B}\,, \qquad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B}\,.$$

Воспользовавшись этими соотношениями, а также тем, что двойные отношения точек C, A_2, B, A_1 и C, B_2, R, B_1 равны (проектирование из точки C'), получим

$$\frac{AC_2}{C_2B} : \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AB_2}{B_2C} \cdot \frac{CA_2}{A_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AB_2}{B_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2R} \cdot \frac{B_1R}{B_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AB_2}{B_2R} : \frac{AB_1}{B_1R}\,.$$

Требуемое равенство доказано.

Задача 5. Доказать, что определенная в условии задачи 4 прямая $B'C'$ является полярой точки A' относительно угла BAC.

Решение. Точки A, B_1, C, K — гармоническая четверка (рис. 6). Следовательно, прямые $B'A$, $B'B_1$, $B'C$, $B'K$ — гармоническая четверка. Эти прямые, в свою очередь, порождают гармоническую четверку точек M, B_1, A', C_1, где M — точка пересечения прямых $B'C'$ и B_1C_1. Следовательно, прямая $B'C'$ вместе с точкой A' делит отрезок B_1C_1 гармонически и, кроме того, проходит через вершину угла BAC. Значит, прямая $B'C'$ — поляра для точки A'.

Задача 6. Если одним из полюсообразующих треугольников, например $\triangle A_1B_1C_1$, является треугольник Жергонна, то прямая $B'C'$ является также полярой точки A' относительно вписанной в $\triangle ABC$ окружности.

Решение. Прямые AB и AC касаются вписанной окружности в точках C_1 и B_1 (рис. 7), значит, являются полярами точек C_1 и B_1 относительно вписанной окружности, следовательно, пересекаются в одной

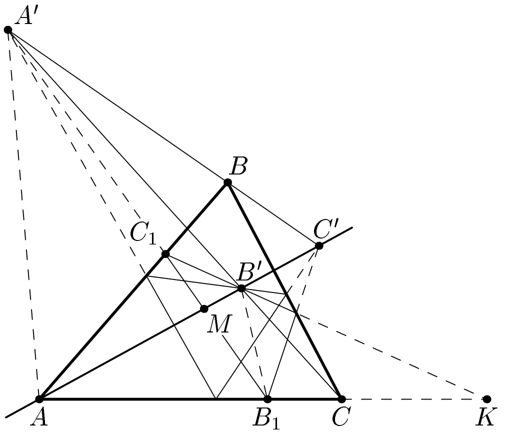


Рис. 6.

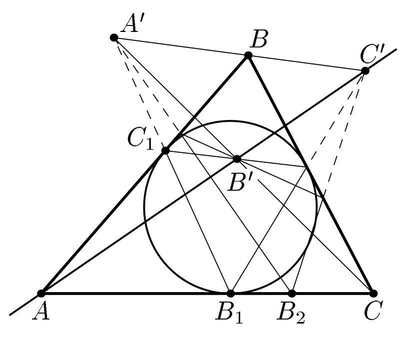


Рис. 7.

точке с полярой точки A'. Значит, точка A лежит на этой поляре. А поскольку прямая $B'C'$ проходит через точку A и, кроме того, вместе с точкой A' делит хорду B_1C_1 гармонически, она и является полярой точки A' относительно вписанной окружности.

Замечание. В $\triangle A'B'C'$ каждая вершина является полюсом противоположной стороны (относительно вписанной в $\triangle ABC$ окружности). Такой треугольник называется *автополярным*.

Доказательство пунктов а) и б) теоремы

Проведем доказательство пунктов а) и б) для общего случая, когда полюсообразующими треугольниками являются произвольные «чевианные» треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

а) Обозначим U и V точки пресечения прямых $A'B'$ с AB, $B'C'$ с BC соответственно (рис. 8а). Двойные отношения точек A, Z, C_1, U и V, X, A_1, C равны, поскольку эти четверки получаются из четверки A, Y, B_1, C центральным проектированием соответственно из точек A' и C'. Следовательно, прямая ZX проходит через точку B'.

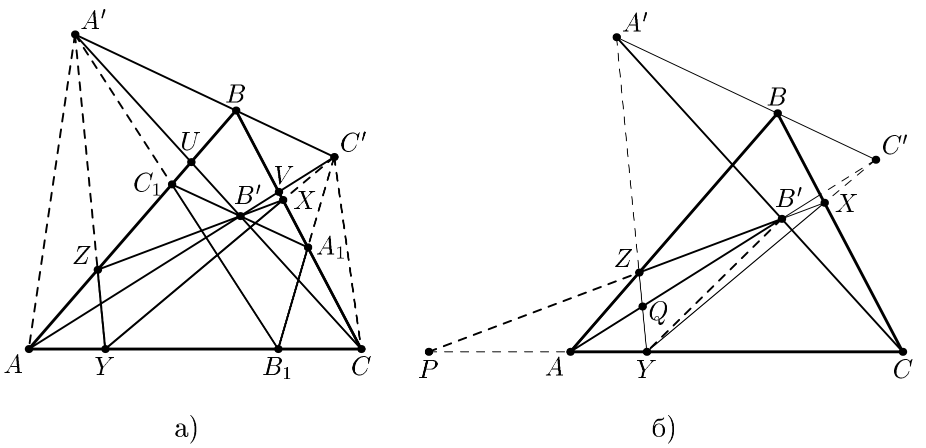


Рис. 8.

б) Пусть Q — точка пересечения прямых YA' и AB', P — точка пересечения прямых AC и ZX (рис. 8б). A', Z, Q, Y — гармоническая четверка, так как A' — полюс, а AB' — соответствующая ему поляра относительно угла BAC. Значит, прямые $B'A'$, $B'Z$, $B'A$, $B'Y$ образуют гармоническую четверку, а поскольку они пересекают прямую AC соответственно в точках C, P, A, Y, то и они тоже образуют гармоническую четверку. Следовательно, X, Y, Z — основания чевиан (задача 3), ч. т. д.

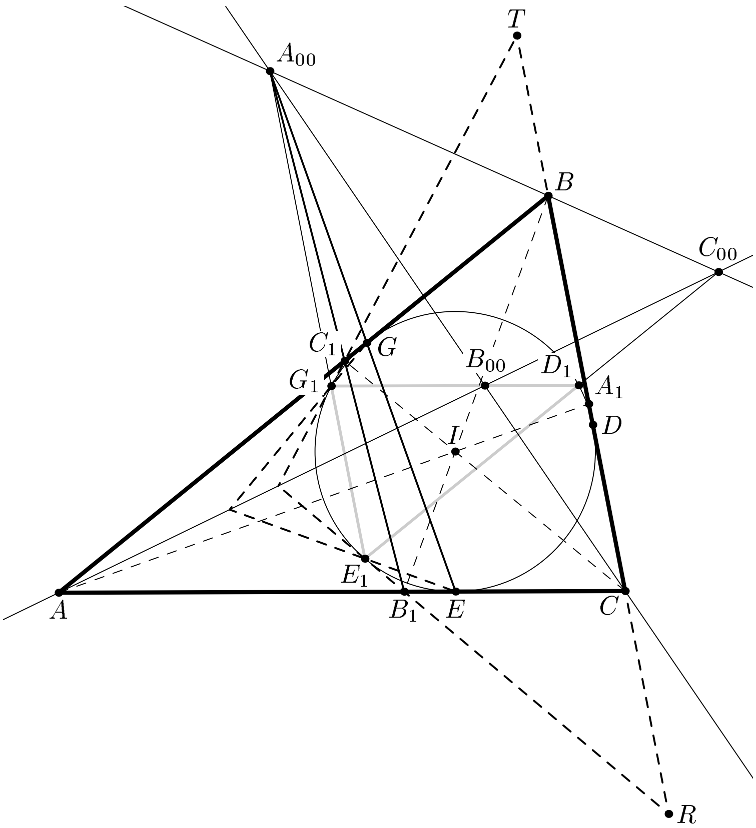


Рис. 9.

Задача 7. Точки B_1 и C_1 — основания биссектрис на сторонах AC и AB, E и G — точки касания вписанной окружности с этими сторонами. Точка E_1 симметрична точке E относительно биссектрисы BB_1, точка G_1 симметрична точке G относительно биссектрисы CC_1. Доказать, что прямая E_1G_1 проходит через полюс A_{00}. (Здесь и далее точки A_{00}, B_{00} и C_{00} — полюсы, порожденные треугольником Жергонна и ортотреугольником.)

Решение. Вторая касательная ко вписанной окружности из точки B_1 проходит через точку E_1 (рис. 9), следовательно, прямая EE_1 — поляра точки B_1 относительно вписанной окружности. Аналогично, прямая GG_1 — поляра точки C_1. Поскольку точки B_1, C_1 и A_{00} лежат на одной прямой (задача 2), то прямые EE_1 и GG_1 пересекаются на прямой $B_{00}C_{00}$. А так как прямая EG проходит через точку A_{00}, то и прямая E_1G_1 также проходит через точку A_{00}, ч. т. д.

Задача 8. Доказать, что треугольник с вершинами в точках, симметричных точкам касания вписанной окружности со сторонами относительно соответствующих биссектрис (на рис. 9 $_\triangle D_1E_1G_1$), гомотетичен исходному $_\triangle ABC$.

Решение. Докажем, что, например, $E_1G_1 \parallel BC$. Пусть R и T — точки пересечения прямых E_1B_1 и G_1C_1 с прямой BC. Тогда $\angle BRB_1 = \angle BAB_1 = \angle CTC_1$ (рис. 9). Следовательно, $G_1T = TD = RD = RE_1$ как отрезки касательных, попарно образующих равные углы. Значит, E_1G_1TR — трапеция, и $E_1G_1 \parallel BC$, ч. т. д.

Задача 9. Точки A_0, B_0 и C_0 — середины сторон BC, AC и AB. Доказать, что прямые A_0A_{00}, B_0B_{00} и C_0C_{00} проходят через точку Фейербаха (рис. 10).

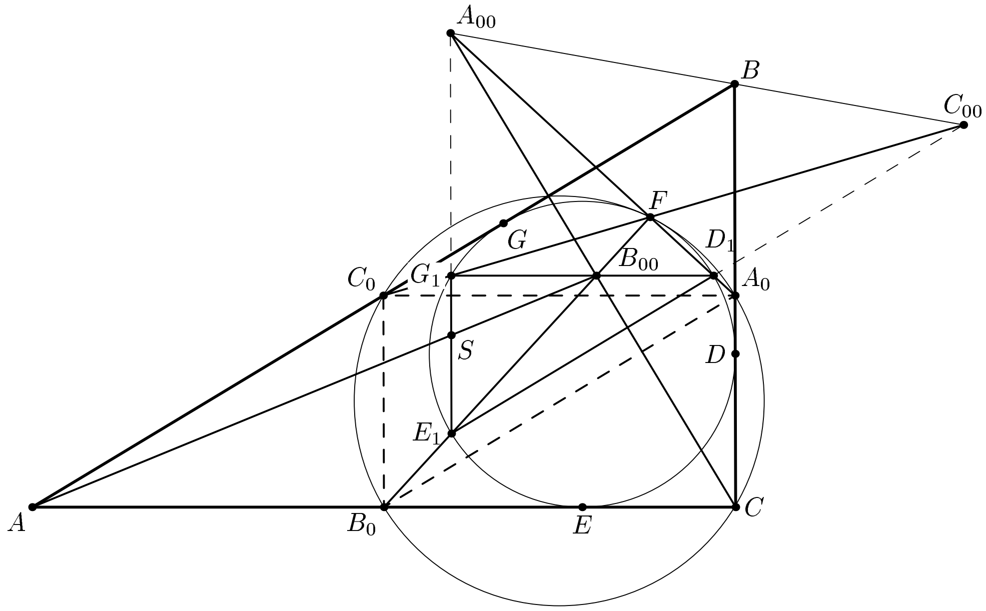


Рис. 10.

Решение. Прямая $A_{00}E_1$ пересекает вписанную окружность в точках G_1 и E_1, а прямую $B_{00}C_{00}$ в точке S. A_{00}, G_1, S, E_1 — гармоническая четверка точек. Следовательно, прямые $B_{00}A_{00}$, $B_{00}G_1$, $B_{00}S$ и $B_{00}E_1$ также образуют гармоническую четверку. Одна из этих прямых — $B_{00}G_1$ — параллельна стороне AC (задача 8), а, значит, три оставшиеся прямые высекают на прямой AC равные отрезки, т. е. прямая $B_{00}E_1$ проходит через середину отрезка AC — точку B_0. Аналогично, прямая $A_{00}D_1$

проходит через точку A_0, прямая $C_{00}G_1$ — через точку C_0. Треугольники $D_1E_1G_1$ и ABC гомотетичны с отрицательным коэффициентом (задача 8), серединный треугольник $A_0B_0C_0$ и треугольник ABC гомотетичны также с отрицательным коэффициентом. Следовательно, треугольники $D_1E_1G_1$ и $A_0B_0C_0$ гомотетичны с положительным коэффициентом, т. е. гомотетичны с центром в точке F касания соответствующих им описанных окружностей (вписанной окружности и окружности девяти точек $\triangle ABC$). Следовательно, прямые $A_{00}D_1$, $B_{00}E_1$ и $C_{00}G_1$ проходят через точку Фейербаха, ч. т. д.

Чтобы доказать пункт в) теоремы, достаточно показать, что семейство окружностей, описанных около $\triangle XYZ$, порожденного подвижной точкой Y указанным в теореме способом, имеет единственную общую точку. Это будет именно точка Фейербаха, так как в ней касаются две различные окружности этого семейства — вписанная и окружность девяти точек. Ближайшая наша цель — показать, что в это семейство входят еще и три прямые, т. е. подвижная окружность трижды «распрямляется», проходя все свои положения, и эти прямые заведомо проходят через точку Фейербаха.

Покажем, например, что прямая $A_{00}A_0$ — это «окружность» из нашего семейства. Действительно, если одно из оснований чевиан, например,

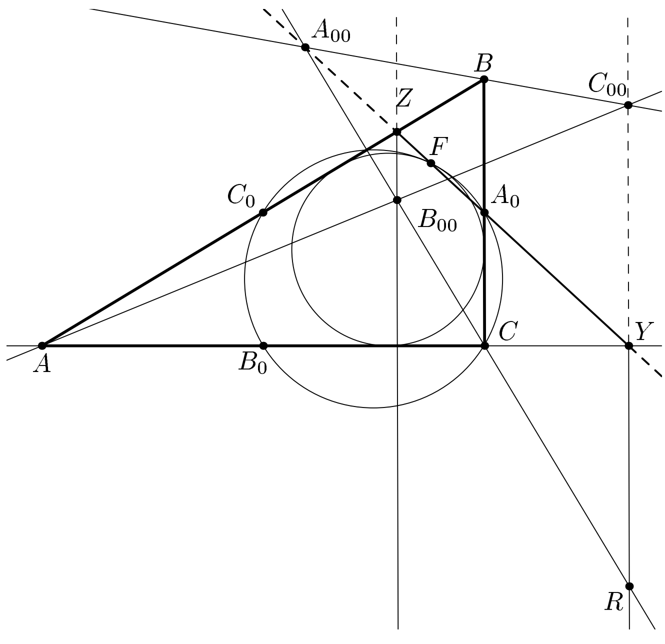


Рис. 11.

точка X становится бесконечно удаленной точкой прямой BC, то стороны ZX и YX превращаются в параллельные BC прямые (рис. 11). Пусть R — точка пересечения прямых XY и $A_{00}B_{00}$. Так как точки C_{00}, Y, R, X составляют гармоническую четверку, а X — бесконечно удаленная точка, то $C_{00}Y = YR$. Но отрезок $C_{00}R$ параллелен отрезку BC. Следовательно, прямая $A_{00}Y$ делит пополам и отрезок BC, а, значит, совпадает с прямой $A_{00}A_0$. Окружность же, проходящая через точки Y, Z и бесконечно удаленную точку X, имеет бесконечный радиус, т. е. вырождается в прямую YZ (в данном случае совпадающую с прямой $A_{00}A_0$).

Итак, «семейство Фейербаха» пополнилось тремя прямыми A_0A_{00}, B_0B_{00} и C_0C_{00} (прямыми, соединяющими полюсы с серединами сторон).

Доказательство пункта в) теоремы

Эта часть доказательства сильно отличается от предыдущего изложения. Возможно, искушенный читатель придумает более изящное, более геометрическое доказательство этого факта. Приведем наше доказательство, избегая излишней детализации преобразований и опираясь на их геометрический смысл.

Введем на плоскости систему координат (x, y) так, чтобы ось абсцисс совпадала с прямой AC. Пусть точка Y имеет координаты $(t, 0)$. Тогда координаты точек Z и X имеют вид

$$\left(\frac{p_1t+q_1}{a_1t+b_1}, \frac{r_1t+s_1}{a_1t+b_1}\right) \text{ и } \left(\frac{p_2t+q_2}{a_2t+b_2}, \frac{r_2t+s_2}{a_2t+b_2}\right),$$

т. е. являются дробно-линейными функциями от t. (Предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно.)

Покажем, что семейство Фейербаха — однопараметрическое семейство, определяемое уравнением третьей степени.

Как известно, уравнение окружности, проходящей через три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3), задается с помощью определителя четвертого порядка следующим уравнением $\Delta(x, y) = 0$, где

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая определитель по первой строке, преобразуем уравнение к виду

$$s \cdot (x^2+y^2) + a \cdot x + b \cdot y + c = 0,$$

где коэффициент $s = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$, его геометрический смысл — удвоенная ориентированная площадь треугольника с вершинами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

Определим вид коэффициентов s, a, b, c при подстановке координат точек Y, Z и X. Так, например,

$$s = \begin{vmatrix} t & 0 & 1 \\ \dfrac{p_1t+q_1}{a_1t+b_1} & \dfrac{r_1t+s_1}{a_1t+b_1} & 1 \\ \dfrac{p_2t+q_2}{a_2t+b_2} & \dfrac{r_2t+s_2}{a_2t+b_2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{P_3(t)}{(a_1t+b_1)(a_2t+b_2)},$$

где $P_3(t)$ — многочлен 3-й степени от t.

Корни знаменателя, а также $t = \infty$ обращают s в бесконечность. Это соответствует бесконечной площади $_\triangle XYZ$, когда одна из его вершин становится бесконечно удаленной. Корни числителя обращают s в ноль. Это происходит в тех случаях, когда две вершины $_\triangle XYZ$ сливаются с одной из вершин $_\triangle ABC$ (в определителе s две одинаковые строки).

Вычисляя таким же образом коэффициенты a, b и c, наше уравнение можно записать в виде

$$\frac{P_3(t)}{(a_1t+b_1)(a_2t+b_2)}(x^2+y^2) + \frac{P_3(t)Q_3(t)}{(a_1t+b_1)^2(a_2t+b_2)^2}x + \\ + \frac{P_3(t)R_3(t)}{(a_1t+b_1)^2(a_2t+b_2)^2}y + \frac{P_3(t)S_3(t)}{(a_1t+b_1)^2(a_2t+b_2)^2} = 0,$$

где $Q_3(t)$, $R_3(t)$ и $S_3(t)$ — многочлены 3-й степени от t, а многочлен $P_3(t)$ — общий множитель у всех коэффициентов, так как все они обращаются в ноль, когда сливаются две из трех точек X, Y, Z (в определителе $\Delta(x, y)$ две одинаковые строки).

Умножим обе части уравнения на $\dfrac{(a_1t+b_1)^2(a_2t+b_2)^2}{P_3(t)}$ и покажем, что полученное таким образом уравнение $(a_1t+b_1)(a_2t+b_2)(x^2+y^2)+Q_3(t)x + R_3(t)y + S_3(t) = 0$ описывает все наше семейство окружностей, за исключением одной линии (прямой $B_{00}B_0$).

Посмотрим, как ведёт себя окружность, проходящая через точки X, Y, Z, когда, двигаясь по прямой AC, точка Y проходит через точку A, т.е. совпадает с точкой Z (рис. 12), и при этом многочлен $P_3(t)$ обращается в ноль. В этом случае окружность (по двум точкам), вообще говоря, определить нельзя. Но из соображений непрерывности коэффициентов последнего уравнения ясно, что при соответствующем значении t это тоже будет уравнение окружности, при этом секущая ZY превращается в касательную. Таким образом, это будет окружность, проходящая через точку

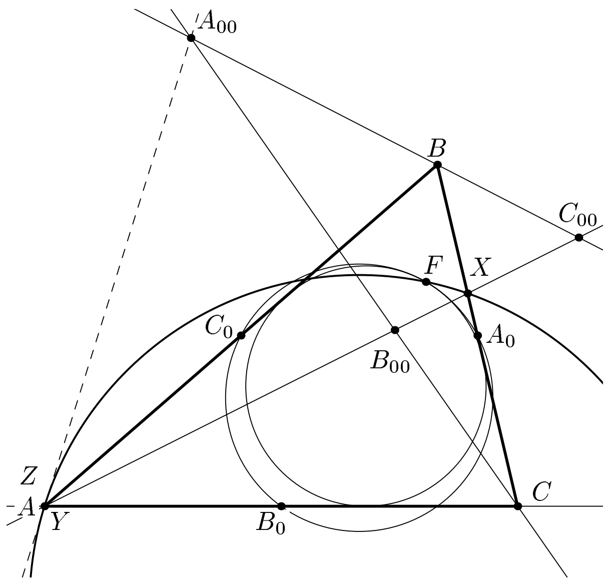


Рис. 12.

X и касающаяся прямой AA_{00}. Далее, при двух конечных значениях t, когда коэффициент при x^2+y^2 обращается в ноль, это уравнение определяет прямые $A_{00}A_0$ и $C_{00}C_0$. (Прямая $B_{00}B_0$ является предельной для нашего семейства при $t \to \infty$.) Эти прямые, а также вписанная окружность и окружность девяти точек — четыре линии, соответствующие различным значениям t — имеют общую точку — точку Фейербаха. Подставив координаты этой точки в наше уравнение, мы получим уравнение от t степени не выше 3, имеющее четыре различных корня. Отсюда следует, что точка Фейербаха является общей точкой этого семейства (и понятно, что единственной). На этом доказательство теоремы заканчивается.

Из теоремы следует: чтобы выяснить, проходит ли окружность, описанная около некоторого «чевианного» треугольника, через точку Фейербаха, достаточно проверить, проходит ли его сторона (как прямая) через соответствующий полюс.

Задача 10. Доказать, что окружность, описанная около треугольника с вершинами в точках касания вневписанных окружностей со сторонами $\triangle ABC$, проходит через точку Фейербаха.

Предлагаем читателю самостоятельно решить эту задачу.

Вот еще несколько интересных фактов, над которыми мы предлагаем подумать читателю. (Обозначения те же, что и в теореме.)

Задача 11. Доказать, что треугольники XYZ и $A_{00}B_{00}C_{00}$ перспективны, т. е. прямые XA_{00}, YB_{00} и ZC_{00} пересекаются в одной точке.

Задача 12. Доказать, что три прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с одноименными полюсами, порожденными треугольником Жергонна и серединным треугольником, параллельны.

Задача 13. Доказать, что окружность, проходящая через точку касания вневписанной окружности со стороной $\triangle ABC$, точку касания этой же вневписанной окружности с окружностью девяти точек и точку касания вписанной окружности с этой стороной, проходит через точку Фейербаха.

Задача 14[3]. Отразим стороны ортотреугольника (прямые) относительно соответствующих сторон треугольника Жергонна. Доказать, что три полученные таким образом прямые образуют треугольник с вершинами на вписанной окружности.

Задача 15. (*Другое описание семейства Фейербаха*) Пусть $\triangle A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику Жергонна с центром гомотетии в центре вписанной окружности I. Известно, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Обозначим X, Y, Z точки их пересечения с соответствующими сторонами треугольника ABC. Доказать, что семейство окружностей, описанных около треугольников XYZ, совпадает с семейством Фейербаха.

[3]Эта задача предлагалась на XLI Международной математической олимпиаде (Сеул, 2000 г.).