Задачи Гельфанда и Кириллова

А. Г. Кулаков любезно предоставил редакции «Математического Просвещения» большой архив собранных им задач, предлагавшихся студентам мехмата в 1970-е годы. Здесь мы приводим небольшую часть этого архива.

Задачи И. М. Гельфанда

1. Докажите, что существует единственная функция $x \mapsto \Gamma(x)$ для $x > 0$, такая что $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ и $\ln\Gamma(x)$ выпукла вниз.

2. Функция f задана на $\mathbb{R}$, причем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = M_0, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| = M_1.$$

Какие значения может принимать $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$?

3. Разложить в ряд по степеням $1/n$ выражение $\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) - \ln n$.

4. $0 < x < \pi/2$, $x = x_0$, $\sin x_{n-1} = x_n$. Найти сильную асимптотику x_n.

5. Посчитать $\int_0^1 \sin 1000x \cdot e^{-x^2}\,dx$.

6. «Углом» между двумя плоскостями в $\mathbb{R}^n$ назовем полный набор инвариантов относительно движений $\mathbb{R}^n$. Описать «угол».

7. Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$ — самосопряженный оператор со спектром $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$ — одномерный самосопряженный оператор (т. е. $\operatorname{rg} B = 1$). Пусть $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ — спектр оператора $A + B$. Доказать, что числа $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ и $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ перемежаются.

8. Для любого выпуклого центрально-симметричного множества на плоскости и для любого $\varepsilon > 0$ найдется N и сечение N-мерного куба 2-мерной плоскостью такое, что в сечении получается множество, ε-близкое к заданному.

Задачи А. А. Кириллова

9. Функция $f \in C^n(\mathbb{R})$ называется «функцией класса n», если пространство, натянутое на $\{f(x+t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ n-мерно. Найти все функции класса $1, \ldots, n$.

10. Найти функции класса n

а) на окружности;

б) для вершин куба.