

Формула для объема тетраэдра

Любопытную формулу, выражающую объем тетраэдра через длины его ребер, прислал С. Маркелов.

Объем тетраэдра с ребрами U, V, W, u, v, w (первые 3 ребра образуют треугольник, ребро u противоположит ребру U и т. д.) можно посчитать следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= (w - U + v)(U + v + w); & x &= (U - v + w)(v - w + U); \\ Y &= (u - V + w)(V + w + u); & y &= (V - w + u)(w - u + V); \\ Z &= (v - W + u)(W + u + v); & z &= (W - u + v)(u - v + W); \\ a &= \sqrt{xYZ}; & b &= \sqrt{yZX}; & c &= \sqrt{zXY}; & d &= \sqrt{xyz}; \end{aligned}$$

$$\text{Объём} = \frac{\sqrt{(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)}}{192uvw}.$$

Эту формулу можно рассматривать как трехмерный аналог формулы Герона. С. Маркелов пишет, что геометрический смысл этой формулы ему неизвестен (ее правильность можно проверить, например, с помощью программы Maple).

Возможно, кому-то из читателей удастся прояснить смысл этого загадочного соотношения?