Решения задач из предыдущих выпусков

1.1. Условие. Могут ли 1000 ладей в пространстве заматовать короля?

Решение. Ответ: могут.

Задача напоминает шахматный этюд и ее решение распадается на несколько этапов.

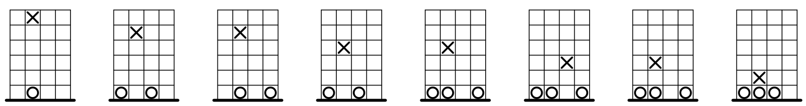
1. Понижение размерности. Ладьи, одна за другой, делают ходы в одном направлении на очень большое расстояние (превышающее общее число ходов в излагаемом алгоритме). Ясно, что по крайней мере половина ладей успеет сделать такой ход. Без ограничения общности считаем, что эти ходы делаются вдоль оси Oz и что z-координаты всех ладей после этого этапа различны. На следующих этапах можно игнорировать значения z-координат всех фигур, так что в дальнейшем идет по сути двумерная игра. Поэтому далее мы будем говорить о фигурах так, как если бы они находились в плоскости Oxy, имея в виду проекцию их положений в пространстве вдоль Oz.

Двумерная игра, к которой свелось матование короля в пространстве, состоит в следующем. По плоскости перемещается король и N_1 штук ладей ($N_1 \leqslant 500$). Король не имеет права стать на клетку, занятую ладьей. Цель ладей — добиться того, чтобы король не мог сделать хода. Эта игра напоминает известную игру «окружение десанта» не только внешне — для локализации используется основная идея построения выигрышной стратегии в «окружении десанта».

2. Локализация. На этапе локализации ладьи достигают более слабой цели, чем указанная выше, — король не может уйти «в бесконечность». Считаем, что король в начале второго этапа находится в клетке с координатами $(0;0)$. Ладьи размещаются и в дальнейшем ходят так, чтобы король в течение всей остальной игры гарантированно находился внутри квадрата размером $L \times L$ с центром в начале координат. Стратегия локализации будет обладать тем свойством, что, даже пропуская некоторые ходы (не реже чем один раз за L ходов), ладьи могут удерживать короля в указанной области.

Первыми ходами $13 \times 4 + 7 \times 4 = 80$ ладей размещаются так, чтобы занимать угловые клетки квадрата $L \times L$ и по 6 клеток вдоль сторон этого квадрата рядом с угловой, а также дополнительно по 7 клеток на каждой из сторон. Полагая $L = 332 \geqslant 2(2 \times 80 + 6)$, можно гарантировать, что король к концу этого размещения будет находиться на расстоянии 6 или больше от периметра квадрата.

Каждая семерка ладей на стороне квадрата не выпускает короля за эту сторону. Стратегия их действий (скажем, на нижней стороне квадрата) такова, что перед каждым ходом короля, когда он находится на расстоянии 5 или меньше от стороны, должна иметь место (с точностью до отражения относительно вертикали) одна из следующих позиций (король отмечен крестиком, ладьи — ноликами, отмеченные нолики обязательно присутствуют, но могут быть и другие). Расположение ладей в углах квадрата гарантирует, что на любой ход короля требуется ответ не более чем одной из семерок.



Заметим, что для реализации указанной стратегии достаточно 3 ладей на стороне; однако эта стратегия не гарантирует, что время от времени ладьи могут пропускать ход. Более детальный анализ приведенных позиций показывает, что, используя 7 ладей, можно время от времени пропускать ход, если только король не движется по самой нижней горизонтали в одну сторону. Но в этом последнем случае король через $\leqslant L$ ходов достигнет угла и вынужден будет повернуть или потратить лишний ход, чтобы угрожать следующей стороне. Это дает возможность пропуска хода не реже, чем раз за L ходов.

3. Деление пополам. Размер области, в которой находится король, последовательными итерациями уменьшается до прямоугольника размером $L \times L'$. Для этого, как и на последнем этапе, используется указанная выше возможность время от времени делать ходы, не относящиеся к стратегии локализации.

Используя $13 \times 2 + 7 = 33$ дополнительных ладьи, мы сужаем текущий прямоугольник путем построения новой стороны прямоугольника, параллельно оси Ox. Чтобы поставить ладьи на указанные позиции, нам потребуется 33 хода. (Не считая дополнительных 33 ходов в самом начале этапа, чтобы установить ладьи параллельно нужному размещению.) Значит, возможно сузить область локализации до прямоугольника $L \times L' = 332 \times 79$.

4. «Загонная охота». Прямоугольник из $2 \times L$ ладей («загонщики») движется из самого левого положения в прямоугольнике $L \times L'$ и до самого правого. Левый ряд ладей последовательно (сверху вниз) увеличивает значение своих x-координат на 2. Легко видеть, что x-координата короля должна быть больше x-координат загонщиков. Таким образом, после

$\leqslant L^2L'$ ходов область, в которой гарантированно находится король, станет пустым множеством. Это означает, что король к тому времени будет заматован.

Подсчитаем использованное число ладей. Оно равно

$$13 \times 4 + 7 \times 4 + \max(13 \times 2 + 7, 79 \times 2) = 238.$$

(*А. Я. Белов*)

1.5. Условие. Линия делит квадрат на две равные части. Всегда ли она проходит через центр квадрата? Тот же вопрос для куба.

Решение. Ответ: всегда.

Напомним, что два множества называются равными (или конгруэнтными), если существует движение (т. е. отображение, сохраняющее расстояния), при котором первое множество переходит во второе, а при обратном отображении второе переходит в первое.

Исследуем сперва одномерный случай. Пусть конечное число точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ разбивает отрезок $[A, B]$ на два конгруэнтных множества — Φ_1 и Φ_2. Докажем, что одна из точек — центр отрезка.

Как известно, движение прямой — это либо сдвиг $T_a x = x + a$, либо отражение прямой относительно некоторой точки O (если O имеет координату c, то это отображение таково: $x \to 2c - x$). Раскрасим отрезки первого множества в чёрный, а второго — в белый цвет. Пусть сдвиг T_a, $a > 0$, переводит первое множество во второе. Поскольку первый отрезок $[A, A_1]$ при отображении T_{-a} оказывается вне $[A, B]$, он принадлежит Φ_1, а $T_a[A, A_1]$ принадлежит Φ_2. Если при этом отрезок $[A, B]$ исчерпан, то A_1 — центр отрезка, если же нет, то мы отбрасываем отрезок $[A, A_2]$ и повторяем рассуждение. Через несколько шагов всё закончится и окажется, что чёрные и белые отрезки равной длины a чередуются, и, значит, середина отрезка является общей границей двух множеств. Если же это движение — отражение, то оно не может быть отражением не центральной точки O (а если O центральная, она принадлежит обоим множествам), ибо иначе образ самого удалённого от O конца отрезка не принадлежал бы ни Φ_1, ни Φ_2. Для отрезка всё доказано.

Переходим к плоскому случаю. Известна теорема Шаля, согласно которой движение на плоскости это либо сдвиг T_a на вектор a, либо поворот $R_O(\varphi)$ с центром в точке O на угол φ, либо скользящая симметрия, т. е. композиция сдвига и симметрии относительно некоторой оси, инвариантной относительно сдвига. Если движение — это сдвиг или скользящая симметрия относительно оси, проходящей через центр Q квадрата K, то проведя прямую, инвариантную относительно сдвига, (или ось скользящей симметрии) через центр, получим в пересечении этой прямой с K отрезок, к которому применимо одномерное рассуждение. Если же движение есть скользящая симметрия с осью l, не проходящей через центр, то окажется, что вершина квадрата, наиболее удалённая от l и лежащая в полуплоскости, содержащей центр квадрата, не может принадлежать ни Φ_1, ни Φ_2.

Осталось рассмотреть случай, когда движение — это поворот $R_O(\varphi)$.

Если центр поворота O не принадлежит квадрату K, то ближайшая к O точка границы квадрата при повороте на угол $\pm\varphi$ переходит в точки, не принадлежащие квадрату. Значит, эта точка не может принадлежать ни Φ_1, ни Φ_2. Противоречие. Аналогичные рассуждения приводят к противоречию и в том случае, когда O не лежит на серединном перпендикуляре к стороне квадрата и потому есть единственная вершина квадрата K на максимальном расстоянии от O.

Осталось рассмотреть случай, когда O лежит на серединном перпендикуляре к стороне квадрата, но не совпадает с его центром. Легко убедиться, что в этом случае угол поворота φ равен углу $\angle AOB$, где A и B — две самые далекие от точки O вершины квадрата. Но тогда, если C — отличная от A и B вершина квадрата, то $R_O(\varphi)^{\pm 1}(C) = R_O(\pm\varphi)(C) \notin K$. Получаем противоречие: $C \notin \Phi_1 \cup \Phi_2 = K$.

Задача решена.

Замечание. Аналогичными рассуждениями можно получить утвердительный ответ на вопрос задачи для произвольной выпуклой центрально-симметричной фигуры на плоскости, а также для сфер и кубов в n-мерном пространстве. Доказательство общего утверждения для n-мерного центрально-симметричного выпуклого тела мне неизвестно.

(А. Я. Канель)

2.7. Условие. Конечно или бесконечно множество многочленов без кратных корней, со старшим коэффициентом 1, все коэффициенты которых целые, а все корни вещественны и принадлежат отрезку $[-1{,}99; +1{,}99]$?

Решение. Ответ: конечно.

Многочлен с целыми коэффициентами называется неприводимым, если он не разлагается в произведение многочленов с целыми коэффициентами, отличных от константы. Пусть P_0 — неприводимый многочлен степени n с целыми коэффициентами, старшим коэффициентом единица, все корни которого вещественны и лежат на отрезке $[-2; 2]$. Докажем, что эти корни имеют вид $2\cos\dfrac{2p\pi}{q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$.

Действительно, пусть корни многочлена P_0 — это $\{e^{i\varphi_k} + e^{-i\varphi_k}\}_{k=1}^{n}$, т. е. $P_0(x) = \Pi_{k=1}^{n}(x - (e^{i\varphi_k} + e^{-i\varphi_k}))$. Рассмотрим многочлен P_1, имеющий корни $\{e^{2i\varphi_k}+e^{-2i\varphi_k}\}_{k=1}^n$ и старший коэффициент единица. Он имеет целочисленные коэффициенты, ибо, как легко видеть, $P_1(x)=Q(x+2)$, где $Q(x)=P_0(\sqrt{x})P_0(-\sqrt{x})$. Далее аналогично построим многочлены P_2, $P_3,\ldots$ Из теоремы Виета, согласно которой если

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n),$$

то

$$a_k=(-1)^k\sum_{i_1<i_2<\dots<i_k}x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_k},$$

следует, что все коэффициенты всех многочленов P_j ограничены, а значит, их конечное число. Таким образом, для некоторых m и l верно равенство $P_{m+l}=P_l$. Тогда получаем в силу конечности корней, что $\cos\varphi_j = \cos(2^{k_j}\varphi_j)$, т. е. $\varphi_j=\dfrac{2\pi p_j}{q}$, что и требовалось.

Теперь утверждение задачи вытекает из следующего факта:

Лемма. *Пусть P — неприводимый многочлен с целыми коэффициентами, имеющий корень $z=2\cos\dfrac{2\pi p}{q}$, где $\dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь. Тогда множество $\mathcal{M}$ его корней таково:*

$$\mathcal{M}=\Bigl\{2\cos\frac{2m\pi}{q}\mid \text{НОД}(m,q)=1\Bigr\}.$$

При этом все коэффициенты многочлена со множеством корней $\mathcal{M}$ и старшим коэффициентом единица целые.

Если допустить, что многочленов, удовлетворяющих условию задачи, бесконечно много, то должны найтись неприводимые полиномы, имеющие корни вида $2\cos\dfrac{2\pi p}{q}$ со сколь угодно большими q. А это противоречит тому, что при больших q выполняется неравенство $2\cos\dfrac{2\pi}{q}>1{,}99$.

Осталось доказать лемму. Заметим, что корень z принадлежит полю деления круга, порожденному корнем q-й степени из единицы $\xi=e^{2\pi i/q}$, так как $2\cos\dfrac{2m\pi}{q}q=\xi^m+\xi^{-m}$. Теперь лемма вытекает из двух известных свойств полей деления круга (см., например, Б. Л. ван дер Варден «Алгебра», §42, §60). Во-первых, многочлен Φ_q, корнями которого являются в точности *примитивные корни* q-й степени из единицы (т. е. числа вида $e^{2\pi im/q}$, $\text{НОД}(m,q)=1$), имеет целые коэффициенты и неприводим. Во-вторых, отображение $\xi\mapsto\xi^m$, где $\text{НОД}(m,q)=1$, продолжается до автоморфизма поля деления круга. Поэтому $\mathcal{M}$ заведомо содержится среди корней P. Осталось показать, что многочлен $\tilde{P}$ с множеством корней $\mathcal{M}$ имеет целые коэффициенты. Заметим, что по теореме Виета коэффициенты $\tilde{P}$ выражаются как симметрические многочлены от корней из единицы с целыми коэффициентами. Тогда, в силу основной теоремы о симметрических многочленах (см. там же, §33), коэффициенты $\tilde{P}$ выражаются как многочлены с целыми коэффициентами от коэффициентов Φ_q.

Замечание 1. Как видно из приведенного решения, если вместо отрезка $[-1{,}99; +1{,}99]$ взять интервал $(-2; +2)$, то аналогичное множество многочленов будет бесконечным.

Замечание 2. Интересен вопрос: для каких отрезков вещественной оси справедливо утверждение данной задачи? (*А. Я. Канель*)

2.8. Условие. Выяснить, равномерно ли сходится на отрезке $[0; 1]$ ряд

$$\sum \frac{x^n}{(1+x^n)^n}.$$

Решение. Докажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(1+x^k)^k}, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

равномерно сходится.

Достаточно доказать равномерную сходимость на некотором полуинтервале $(r, 1]$, $r \in (0,1)$, ибо на каждом отрезке вида $[0, r]$, $0 < r < 1$, ряд (1) мажорируется рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k$ и потому равномерно сходится. Введем функцию

$$f(x,t) = \frac{x^t}{(1+x^t)^t}, \quad x \in [0,1], \quad t \in [2, \infty)$$

($f(x,k)$ — это члены ряда (1)).

Лемма 1. *Справедливо неравенство* $f(x,t) \leqslant \dfrac{1}{(t-1)}$, $x \in [0,1]$, $t \geqslant 2$.

Доказательство. Максимум функции вычисляется обычным способом; он равен $\dfrac{1}{t-1}(1-\dfrac{1}{t})^t < \dfrac{1}{t-1}$, что и требовалось.

Лемма 2. *Для любого* $x \in (0,1]$ *функция* $t \mapsto f(x,t)$ *имеет при* $t \in [2, \infty)$ *не более двух точек локального экстремума.*

Доказательство. Фиксируем $x \in (0,1]$ и положим $u(t) = \ln f(x,t)$. Имеем

$$u'(t) = \ln x - \ln(1+x^t) - t x^t (1+x^t)^{-1} \ln x,$$
$$u''(t) = x^t (1+x^t)^{-2} \ln(1/x)(2 + 2x^t + t \ln x).$$

На промежутке $[2, \infty)$ функция $t \mapsto 2 + 2x^t + t\ln x$ строго убывает, а потому имеет не более одного нуля. Следовательно, функция $u''(t)$ также имеет не более одного нуля. Но тогда функция $u'(t)$ имеет не более двух нулей (ибо между любыми двумя нулями функции $u'(t)$ лежит нуль функции $u''(t)$). Так как $f'_x(x,t) = f(x,t)u'(t)$, то и $f'_x(x,t)$ имеет не более двух нулей на $[2,\infty)$.

Лемма 3. *Равномерная сходимость ряда* (1) *равносильна равномерной сходимости интеграла*

$$\int\limits_2^\infty f(x,t)\,dt. \tag{2}$$

Доказательство. Если функция $g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, где a, b — целые числа, монотонна, то разность $\sum\limits_{k=a}^{b} g(k) - \int\limits_a^b g(t)\,dt$ заключена между величинами $g(a), g(b)$. Если функция $g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, имеет не более m интервалов монотонности, то применение этого факта к каждому из этих интервалов (с последующим сложением неравенств) приводит к неравенству

$$\Bigl|\sum_{k=a}^{b} g(k) - \int\limits_a^b g(t)\,dt\Bigr| \leqslant m \max_{t\in[a,b]} |g(t)|.$$

В нашем случае (здесь используем леммы 1, 2) для целого $A \geqslant 2$ имеем

$$\Bigl|\sum_{k=A}^{\infty} f(x,k) - \int\limits_A^\infty f(x,t)\,dt\Bigr| \leqslant \frac{3}{A-1}\,.$$

Отсюда следует, что хвосты ряда (1) и интеграла (2) бесконечно близки при $A \to \infty$. Это доказывает лемму.

Итак, осталось доказать равномерную сходимость интеграла (2). Дело сводится к оценке его хвоста, т. е. величины $r(x,A) = \frac{1}{2}\int\limits_{2A}^{\infty} f(x,t)\,dt$ (множитель $\frac{1}{2}$ и $2A$ вместо A удобны для дальнейшего). Пользуясь очевидным неравенством $1 + s \geqslant e^{s/2}$, $s \in [0,1]$ (оно следует из того, что функция $1 + s - e^{s/2}$ возрастает на $[0,1]$ и равна нулю при $s = 0$), получаем, что $r(x,A) \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{2A}^{\infty} x^t e^{-tx^t/2}\,dt$. После замены $x^t = z$ и перехода от x к переменной $H = (2\ln(1/x))^{-1}$ перепишем правую часть неравенства в виде $R(H,A) = H\int\limits_0^{e^{-A/H}} z^{Hz}\,dz$.

Достаточно доказать, что функция $R(H,A)$ стремится к нулю при $A \to \infty$ равномерно относительно $H \in [2,\infty)$.

Функция $z \mapsto z^z$ принимает максимальное значение 1 при $z = 0$, $z = 1$. Поэтому резонно изучить интегралы от функции z^{Hz} по отрезкам, в которых играет роль одна из точек $0, 1$.

Лемма 4. 1) *Справедливо неравенство*

$$H\int_0^b z^{Hz}dz \leqslant \frac{M(b)}{\ln H} \qquad \text{при } H \geqslant 2,\ 0 < b < 1 \tag{3}$$

(*здесь* $M(b)$, $b \in [0,1)$, — *некоторая функция*).

2) *Если* $0 < a < b < 1$, *то*

$$H\int_a^b z^{Hz}dz \leqslant a^{-1}b^{Ha}. \tag{4}$$

Добавим к неравенствам (3), (4) очевидную оценку

$$H\int_0^b z^{Hz}dz \leqslant Hb \tag{5}$$

(следует из того, что подынтегральная функция в (5) не превосходит единицы).

Доказательство. 1) Взяв любое $c \in (0, b)$ имеем

$$H\int_0^b z^{Hz}\,dz \leqslant H\int_0^c c^{Hz}\,dz + H\int_c^b b^{Hz}\,dz <$$
$$< H\left(\int_0^\infty c^{Hz}\,dz + \int_c^\infty b^{Hz}\,dz\right) = \frac{1}{\ln(1/c)} + \frac{b^{Hc}}{\ln(1/b)}\,.$$

Взяв $c = bH^{-1/2}$, получаем оценку (3) (поясним лишь, что при таком выборе числа c величина b^{Hc}, входящая в правую часть последней оценки превращается в $b^{b\sqrt{H}}$, что меньше величины $\dfrac{L}{\ln H}$ с константой L, зависящей от b).

2) Имеем

$$H\int_a^b z^{Hz}\,dz \leqslant H\int_a^b z^{Ha}\,dz \leqslant H\int_0^b z^{Ha}\,dz = H(Ha+1)^{-1}b^{Ha+1} < a^{-1}b^{Ha},$$

что и требуется.

Лемма 5. *Справедливо неравенство* $R(H,A) \leqslant M_0(\ln A)^{-1}$ *при* $A \geqslant 2$, $H \geqslant 2$, *здесь* M_0 — *абсолютная постоянная.*

Доказательство. 1) Если $H \leqslant \sqrt{A}$, то

$$R(H,A) < He^{-A/H} \leqslant \sqrt{A}e^{-\sqrt{A}}.$$

2) Если $\sqrt{A} \leqslant H \leqslant A$, то $e^{-A/H} < e^{-1} < 1/2$. Применяя неравенство (3), получаем

$$R(H,A) \leqslant M(1/2)(\ln H)^{-1} \leqslant 2M(1/2)(\ln A)^{-1}.$$

3) Если $H > A$, то $e^{-A/H} \geqslant e^{-1} > 1/3$. Применяя (3), (4), получаем

$$R(H,A) = H\int\limits_0^{1/3} z^{Hz}\,dz + H\int\limits_{1/3}^{e^{-A/H}} z^{Hz}\,dz \leqslant \frac{M(1/3)}{\ln H} + 3e^{-A/3} < \frac{M}{\ln A}$$

(M — абсолютная постоянная).

Полученные неравенства для $R(H,A)$ доказывают лемму.

Из леммы следует равномерная сходимость интеграла (2) (и ряда (1)).

(*Р. С. Исмагилов*)

2.9. Условие. Даны матрицы $A_1, \ldots, A_k$ размера $n \times n$. Известно, что все произведения вида $A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_h}$, где $h \leqslant n$ нильпотентны. Докажите, что любое произведение вида $A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_{n^2}}$ равно нулю.

Решение. Пусть A обозначает алгебру, порожденную матрицами a_i, $|v|$ есть длина слова v, $u \sqsubset v$ означает, что u есть подслово v. $(u)_k$ есть начальный отрезок длины k слова u. Алгебра называется *ненильпотентной*, если в ней есть ненулевое произведение любой длины.

Каждому слову в алфавите $\{a_i\}$ соответствует матрица, являющаяся произведением образующих, составляющих это слово.

Сперва покажем, что если есть ненулевое произведение $a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_{n^2}}$, то A ненильпотентна. В самом деле, пространство всех матриц порядка n имеет размерность n^2. Поэтому матрицы $v_0 = E$, $v_1 = a_{i_1}$, $v_2 = a_{i_1}a_{i_2}, \ldots$, $v_{n^2} = a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_{n^2}}$ линейно зависимы. Но тогда одна из v_i есть линейная комбинация слов бóльшей длины, и замена подслова $v_i \sqsubset v_{n^2}$ на некоторое слово бóльшей длины дает ненулевую матрицу. Поэтому существует ненулевое слово (соответствующее ненулевой матрице) длины бóльшей, чем n^2. С получившимся словом можно провести аналогичные рассуждения и т. д. Таким образом, возникают ненулевые слова любой длины.

Отметим, что константу n^2 можно заменить на n, если воспользоваться следующей (довольно трудной) теоремой из линейной алгебры:

Любая нильпотентная подалгебра алгебры матриц приводится к верхнетреугольному виду (на главной диагонали и под ней — нули).

Предположим, что утверждение задачи не выполняется, и алгебра A ненильпотентна.

Под *сверхсловом в* A понимается бесконечное вправо произведение образующих алгебры A. Результат такого произведения не определен, но определено *равенство* или *неравенство нулю сверхслова* как существование или несуществование нулевого подслова.

Поскольку A есть подалгебра алгебры матриц порядка n, она действует на n-мерном векторном пространстве V и для любого вектора $\vec{v} \in V$ и сверхслова W в A определено понятие *равенства нулю* произведения $\vec{v}W$. Ясно, что если $W \neq 0$, то для некоторого $\vec{v} \in V$ выполняется неравенство $\vec{v}W \neq 0$.

Упорядочим образующие $a_1 \prec \cdots \prec a_s$. Этот порядок индуцирует *лексикографический порядок* на множестве слов (и сверхслов): $u \prec v$ если при некотором $k \geqslant 0$ начальные участки длины k слов u и v совпадают, а $(k+1)$-я буква u меньше $(k+1)$-й буквы v. Если u есть начало v или наоборот, то u и v *лексикографически несравнимы.*

Рассмотрим теперь лексикографически минимальное ненулевое сверхслово W.

Такое существует. В самом деле. Назовем слово u *неограниченно продолжаемым*, если оно служит началом сколь угодно длинного ненулевого слова. Ясно, что минимальное неограниченно продолжаемое слово длины m при любом m служит началом минимального неограниченно продолжаемого слова длины $m+1$, и объединение минимальных неограниченно продолжаемых слов дает минимальное сверхслово W.

Положим $W = (W)_i W^{(i)}$, где $(W)_i$ — начало W длины i. Если $i < j$, то $(W)_j = (W)_i \tau_{ij}$, $W^{(i)} = \tau_{ij} W^{(j)}$, где τ_{ij} — слово длины $j - i$.

Разберем два случая.

Случай 1. При некотором $j = i + s$, $s \leqslant n$, выполняется равенство $W^{(i)} = W^{(j)}$.

Тогда $W^{(i)} = \tau_{ij} W^{(j)} = W^{(j)}$; $|\tau_{ij}| = s \leqslant n$ и потому для любого $k \in \mathbb{N}$ $\tau_{ij}^k W^{(j)} = \tau_{ij}^{k+1} W^{(j)}$. В этом случае $W^{(j)}$ есть периодическая последовательность τ_{ij}^{∞} с периодом, не превосходящим n, и сверхслово $W = 0$, что противоречит выбору W.

Случай 2. Все сверхслова $W^{(i)}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, различны. Пусть $\vec{v}W \neq 0$. Поскольку $\dim V = n$, набор из $n+1$ вектора $\vec{v}_0 = \vec{v} = \vec{v}(W)_0$; $\vec{v}_1 = \vec{v}(W)_1$, $\ldots$, $\vec{v}_n = \vec{v}(W)_n$ линейно зависим, т. е. выполняется равенство

$$\sum_{k:\ \alpha_k \neq 0} \alpha_k \vec{v}_{i_k} = 0 \tag{1}$$

Рассмотрим такое m, что члену суммы (1) с индексом m отвечает максимальное сверхслово $W^{(i_m)}$ среди прочих ее членов. Равенство (1) можно переписать в виде:

$$\vec{v}(W)_{i_m} = \sum_{k\neq m;\ \alpha_k\neq 0} \frac{\alpha_k}{\alpha_m}\vec{v}(W)_{i_k} \tag{2}$$

Так как $\vec{v}(W)_{i_m}W^{(i_m)} = vW \neq 0$, одно из произведений $\vec{v}(W)_{i_k}W^{(i_m)} \neq \neq 0$ и $k \neq m$. Но тогда $0 \neq U = (W)_{i_k}W^{(i_m)} \prec (W)_{i_k}W^{(i_m)} = W$.

Мы получили противоречие с минимальностью сверхслова W. Задача решена.

Замечание. Эта задача была поставлена известным израильским математиком С. Амицуром, а также И. П. Шестаковым и простояла около 10 лет. В конце концов, были получено несколько ее решений, базировавшихся на различных подходах. См. Уфнаровский В. А. *Теорема о независимости и ее следствия.* Мат. сб., 1985, т. 128, №1, с. 124–132. Чекану Г. П. *О локальной конечности алгебр.* Мат. исслед. (Кишинев), 1988, №105, с. 153–171. А также Белов А. Я. *О базисе Ширшова относительно свободных алгебр сложности n.* Мат. сб., 1988, т. 135, №31, с. 373–384.

Данное доказательство было впервые опубликовано в работе Belov A. *About height theorem.* Comm. in Algebra, 1995, vol 23, No 9, p. 3551–3553.

(*А. Я. Канель*)

3.7. Условие. Две кривые второго порядка проходят через точки A, B, C, D. Через точку O пересечения прямых AC и BD проведены хорды KM, LN одной кривой и $K'M'$, $L'N'$ другой. Прямые KL и $K'L'$ пересекаются в точке P, MN и $M'N'$ — в точке Q. Доказать, что точки P, Q, O лежат на одной прямой.

Решение. Пусть φ — такое проективное преобразование, что

$$\varphi(A) = C, \quad \varphi(C) = A, \quad \varphi(B) = D, \quad \varphi(D) = B.$$

Докажем, что преобразование φ переводит в себя прямые, проходящие через точку O, причём $\varphi(X)$ — вторая точка пересечения прямой OX с коникой, проходящей через точки A, B, C, D, X.

Обозначим через R точку пересечения прямых AB и CD, а через S — точку пересечения прямых AD и BC.

Преобразование φ сопряжено центральной симметрии с центром O (представьте, что RS — бесконечно удалённая прямая, тогда $ABCD$ — параллелограмм). Поэтому оно оставляет на месте точку O и каждую точку прямой RS. Значит, φ переводит в себя любую прямую, проходящую через O.

Пусть прямая XO пересекает прямую RS в точке I. Поскольку φ сопряжено центральной симметрии, то $[X, \varphi(X), O, I] = -1$. Но такое же условие выполняется для второй точки пересечения прямой OX с коникой, проходящей через A, B, C, D, так как RS — поляра O относительно этой коники.

Для решения задачи осталось заметить, что $\varphi(P) = Q$.

(*М. Н. Вялый*)

3.8. Условие. Внутри выпуклого пятиугольника проведены диагонали. Докажите, что они образуют пятиугольник, проективно эквивалентный исходному.

Решение. Нам понадобятся следующие факты из проективной геометрии:

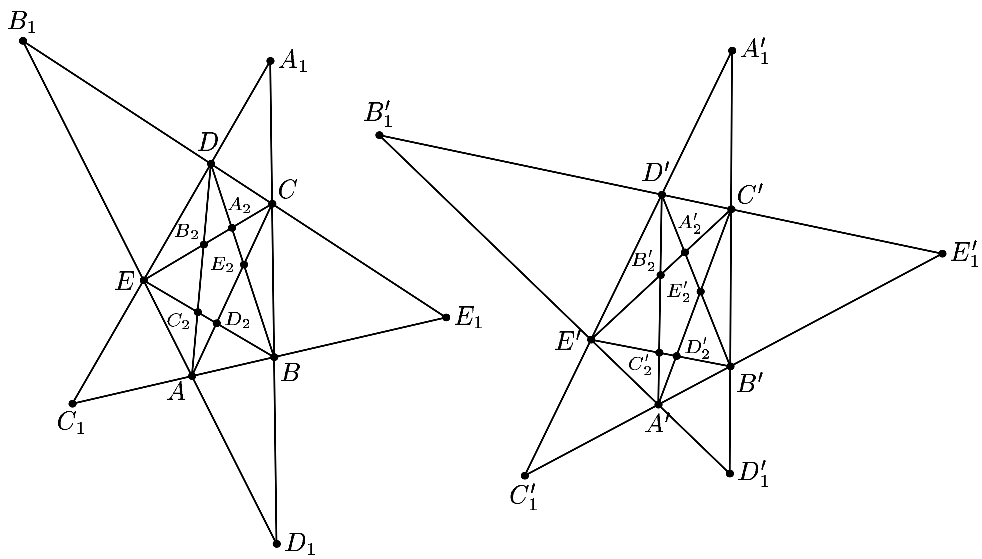
- Пусть A_1, B_1 и C_1 — три различные точки на прямой l_1, A_2, B_2 и C_2 — на прямой l_2. Тогда существует единственное проективное преобразование $f\colon l_1 \to l_2$, переводящее A_1 в A_2, B_1 в B_2, C_1 в C_2 соответственно. Если l_2 — координатная прямая, $A_2 = 0$, $B_2 = 1$, $C_2 = \infty$ и $D_1 \in l_1$, то число $f(D_1)$ называется *двойным отношением* (упорядоченной) четверки точек (A_1, B_1, C_1, D_1). Одна четверка переводится в другую проективным преобразованием тогда и только тогда, когда соответствующие двойные отношения равны.
- Двойное отношение упорядоченной четверки точек, являющихся пересечениями упорядоченной четверки прямых с некоторой вспомогательной прямой не зависит от выбора вспомогательной прямой и называется *двойным отношением* четверки прямых.
- Двойные отношения различных четверок прямых, проходящих через общую четверку точек, совпадают.
- Существует и единственно проективное преобразование плоскости, переводящее упорядоченный набор вершин одного невырожденного четырехугольника в упорядоченный набор вершин другого невырожденного четырехугольника.

Из этих фактов непосредственно вытекает следующая

Лемма. *Пятиугольники $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ (вершины упорядочены) проективно эквивалентны друг другу тогда и только тогда, когда двойные отношения соответствующих четверок точек совпадают: $(C_1ABE_1) = (C_1'A'B'E_1')$, $(C_1EDA_1) = (C_1'E'D'A_1')$.*

В самом деле, переведем четырехугольник $ABDE$ в четырехугольник $A'B'D'E'$. Тогда C_1 перейдет в C_1', а, значит, и A_1 — в A_1', E_1 — в E_1'. Остается заметить, что $C = [A_1B] \cap [E_1D]$ и $C' = [A_1'B'] \cap [E_1'D']$. Лемма доказана.

Для решения задачи остается проверить совпадение двойных отношений, связанных с большим и маленьким пятиугольником. Но для каждой



пары соответствующих четверок точек можно указать четверку прямых, на которых они лежат.

Например, обе четверки точек C_1ABE_1 и EB_2A_2C лежат на четверке прямых, проходящих через точку D (см. рис). *(А. Я. Канель)*

4.1. Условие. Дано 109-значное число, в десятичной записи которого нет нулей. Докажите, что в его десятичной записи либо некоторая группа соседних цифр повторится 10 раз подряд, либо найдутся записи 10 различных 100-значных чисел.

Решение. Введем обозначения. Через AB обозначается результат приписывания к числу A числа B, соответственно, A^n обозначает результат n-кратного приписывания.

Обозначим через V исходное 109-значное число; через U_i (при $i = 0, \dots, 9$) — 100-значное число, запись которого представляет собой участок записи V, начиная с $(i+1)$-ой по $(100+i)$-ю позицию включительно; через s_i — соответствующие начальные участки V ($s_iU_i\tau_i = V$); через t_{ij} (при $j > i$) — участок записи V с $(i+1)$-й по j-ю позицию. Длина t_{ij} равна $j - i$ и не превосходит 9.

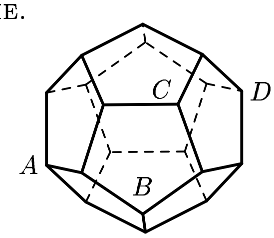
Если все числа U_i попарно различны, то утверждение задачи выполнено. Иначе при некоторых $j = i + k$, $0 < k \leqslant 9$, выполняется равенство $U_i = U_j$.

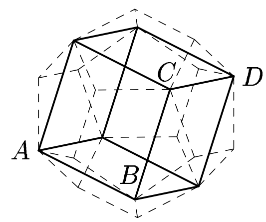
Но $V = s_iU_i\tau_i = s_it_{ij}U_j\tau_j$ и, следовательно, для некоторого h имеем $t_{ij}U_i = U_ih$. Если запись U_i есть начало записи $t_{ij}U_i$, то и при любом $k \in \mathbb{N}$ запись $t_{ij}^kU_i$ есть начало записи $t_{ij}^{k+1}U_i$. Поэтому запись числа U_i

есть начало бесконечной периодической последовательности с периодом t_{ij}, длина которого не превосходит 9. Поскольку число U_i — 100-значное, период успевает отложится 11 раз. Мы доказали несколько более сильное утверждение, чем требовалось в задаче. (*А. Я. Канель*)

4.5. Условие. Найдите угол между диагоналями AB и CD правильного додекаэдра.

Решение.





В додекаэдр можно вписать куб, сторона которого равна диагонали грани додекаэдра (правильного пятиугольника). Из рисунка видно, что угол между AB и CD равен 90°. (*С. С. Анисов*)

4.6. Условие. а) Двое флатландцев спускаются к морю с высочайшей вершины Флатландии «Пик Кипа» — один по левому склону, другой по правому. Гора нигде не опускается ниже уровня моря, а ее поверхность — график кусочно-линейной непрерывной функции. Флатландцы «непрерывно» двигаются, так что зависимость координат флатландца от времени — непрерывная функция, на скорость ограничений нет.

Могут ли флатландцы достичь моря, все время находясь на одинаковой высоте над уровнем моря?

б) Верно ли аналогичное утверждение для нескольких гор равной высоты, с каждой из которых спускается пара флатландцев (все они должны все время находиться на одинаковой высоте)?

в) Пусть поверхность горы есть график дифференцируемой функции. Верно ли утверждение пункта а)?

Решение. Ответы: а)–б): могут, в) не всегда.

Будем использовать систему координат Oxy, в которой ось абсцисс проходит по уровню моря.

а) Пусть гора является графиком функции $y = h(x)$, причем $h(x) = 0$ при $x \leqslant -L$ и при $x \geqslant R$, а ее высочайшая вершина (глобальный максимум) имеет абсциссу 0.

Вначале рассмотрим случай $h(x)$, у графика которой нет горизонтальных участков.

На вспомогательной *фазовой плоскости* с координатами (l, r) рассмотрим прямоугольник $\Pi = \{(l, r)\colon 0 \leqslant l \leqslant L,\ 0 \leqslant r \leqslant R\}$, а в нем —

множество допустимых состояний пары альпинистов

$$A = \{(l, r)\colon h(-l) = h(r),\ (l, r) \in \Pi\}.$$

Легко понять, что множество A состоит из конечного числа прямолинейных отрезков, так что множество V тех точек, окрестности которых в A не гомеоморфны интервалу прямой, конечно. Будем смотреть на множество A как на граф с вершинами V и ребрами — компонентами связности $A \setminus V$. (В этом графе могут быть ребра, у которых нет концов, — они соответствуют компонентам связности, гомеоморфным окружности.) Непосредственно из определений проверяется, что у этого графа есть две вершины степени 1 — $(0, 0)$ и (L, R), а степени всех остальных вершин равны 4 (точка $(l_0; r_0)$ является вершиной степени 4, если у $h(x)$ есть локальные экстремумы одновременно в $-l_0$ и в r_0). Это означает, что вершины степени 1 принадлежат одной компоненте связности, что и означает возможность спуска, удовлетворяющего условию задачи.

Общий случай сводится к рассмотренному выше: всякую непрерывную кусочно-линейную функцию $h(x)$ можно получить из некоторой непрерывной не постоянной на любом интервале кусочно-линейной функции $\tilde{h}(x)$, вставляя в конечное число точек $x_0, \ldots, x_N$ интервалы, на которых функция h постоянна. Спуск по графику $\tilde{h}(x)$ легко преобразуется в спуск по графику $h(x)$: каждый раз, когда одному из альпинистов нужно преодолеть горизонтальный участок, второй ждет его в точке, в которой он оказался.

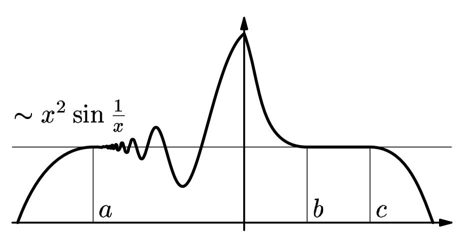
б) Решение аналогичное, только нужно рассматривать $2n$-мерное фазовое пространство (n — количество гор).

в) Приведем контрпример.

Функция $h(x)$ в правой полуокрестности точки a имеет вид

$$h(x) = h_0 + (x-a)^2 \sin(x-a)^{-1},$$

и на всем отрезке $[b, c]$ значение h равно h_0. Предположим, что спуск по такой горе возможен. Пусть абсцисса левого альпиниста в момент времени t равна $l(t)$ (непрерывная функция от t), абсцисса правого — $r(t)$, и они все время находятся на одной высоте. Обозначим $t_0 = \min\{t\colon l(t) \leqslant a\}$. Для любого полуинтервала $(t_0 - \varepsilon, t_0]$ область значений $r(t)$ содержит отрезок $[b, c]$, поэтому $r(t)$ разрывна в точке t_0.

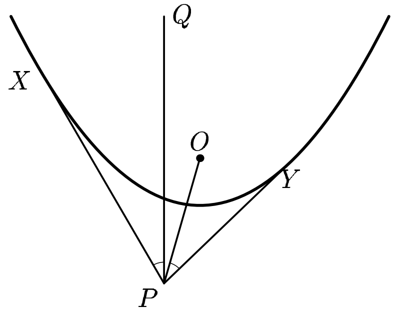


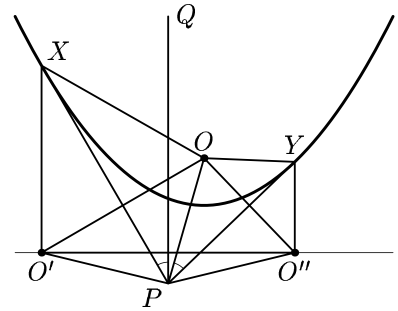
(*Н. Н. Константинов*)

4.7. Условие. К данной параболе проведены три касательные. Докажите, что окружность, описанная около образованного ими треугольника, проходит через фокус параболы.

Решение. Докажем сначала следующую лемму.

Пусть прямые PX и PY касаются параболы с фокусом O, PQ параллельна оси параболы. Тогда углы XPQ и OPY равны.





Рассмотрим случай, изображенный на рисунке слева (точка P лежит под директрисой параболы), из точки P остальные четыре видны в порядке Y, O, Q, X. Остальные три случая разбираются аналогично.

Построим точки O', O'', симметричные O относительно прямых PX и PY. Так как прямые XO', YO'' параллельны оси параболы, и $XO = XO'$, $YO = YO''$, точки O' и O'' лежат на директрисе параболы. При этом $PO = PO' = PO''$ и, значит, высота PQ равнобедренного треугольника $PO'O''$ является его биссектрисой, т.е. угол $O''PQ$ равен половине угла $O'PO''$. Но угол $O'PO''$ равен удвоенному углу XPY, а равенство углов XPY и $O''PQ$ равносильно доказываемому утверждению.

Обозначим точки пересечения касательных A, B, C. По лемме прямые AO, BO и CO симметричны относительно биссектрис углов A и B треугольника ABC некоторым параллельным прямым AA', BB' и CC'. Две из этих прямых, например AA' и BB', проходят вне треугольника. Но тогда $\angle AOB = \pi - \angle A'AC - \angle B'BC = \pi - (\angle A'AB + \angle B'BA - \angle CAB - - \angle CBA) = \pi - \angle ACB$, и, следовательно, точки A, B, C, O лежат на одной окружности. (*А. А. Заславский*)

5.1. Условие. В телесериале «Тайна Санты-Барбары» 15 действующих лиц. Серия называется *содержательной*, если в ней происходит одно из следующих событий. Либо кто-то узнает тайну, либо кто-то узнает, что кто-то знает тайну, либо кто-то узнает, что кто-то не знает тайну. Каково максимально возможное число содержательных серий? (тайна одна и первоначально ее не знает никто).

Решение. Расклассифицируем содержательные серии на три группы:

1. Когда кто-то узнает, что кто-то не знает тайну.

2. Когда кто-то узнает тайну.

3. Когда кто-то узнает, что кто-то знает тайну.

Легко убедиться, что максимальное количество серий в первой и в третьей группе не превосходит $15 \cdot 14/2$ (числа пар действующих лиц), а число серий во второй группе — 15 (числа действующих лиц). Поэтому общее число серий не превосходит $2 \cdot 15 \cdot 14/2 + 15 = 15^2 = 225$.

Соответствующий пример очевиден: сперва каждый узнает про каждого, что тот не знает тайну; затем все поочередно узнают тайну; и, наконец, каждый узнает про каждого, что тот знает тайну.

(*А. Я. Канель*)

5.3. Условие. $A_1, \ldots, A_n$ — ненулевые матрицы. Докажите, что найдется матрица B такая, что

$$BA_1BA_2 \cdot \ldots \cdot BA_nB \neq 0.$$

Решение. Будем рассматривать матрицы как операторы в k-мерном пространстве V. Пусть $\vec{v} \in V \setminus \bigcup \ker A_i$, и пусть U есть $(k-1)$-мерное подпространство V, не пересекающееся с $\bigcup\{A_i\vec{v}\}$. Легко видеть, что тогда в качестве B можно взять произвольный линейный оператор с ядром U и образом, равным одномерному пространству, порожденному $\vec{v}$.

Отметим, что если $r = \min_i \operatorname{rank} A_i$, то с помощью аналогичной конструкции можно добиться того, чтобы $\operatorname{rank} BA_1B \ldots A_nB = r$.

(*А. Я. Канель*)

5.7. Условие. G — группа без кручения, т. е. нет неединичных элементов конечного порядка. Известно, что $(ab)^n = a^nb^n$. Докажите, что группа абелева, т. е. для любых a, b выполнено $ab = ba$.

Решение. Сокращая равенство $a^nb^n = (ab)^n$ слева на a, справа на b, получаем тождество $(ba)^{n-1} = a^{n-1}b^{n-1}$, из которого вместе с тождеством $a^nb^n = (ab)^n$ вытекает тождество

$$(ab)^{n(n-1)} = (a^nb^n)^{n-1} = (b^n)^{n-1}(a^n)^{n-1} = b^{n(n-1)}a^{n(n-1)}. \qquad (1)$$

Далее $(aba^{-1})^{n-1} = ab^{n-1}a^{-1}$, а с другой стороны, имеем $(aba^{-1})^{n-1} = a^{-(n-1)}b^{n-1}a^{n-1}$. Сравнивая правые части этих равенств, получаем тождество $a^{-n}b^{n-1}a^nb^{-(n-1)} = e$, где e — единичный элемент. Подставив $a = x^{-(n-1)}$, $b = y^n$ и дважды воспользовавшись (1) получаем тождество:

$$(y^{-1}x^{-1}yx)^{n(n-1)} = e \qquad (2)$$

Поскольку G — группа без кручения, отсюда следует, что $y^{-1}x^{-1}yx = e$, т. е. выполняется свойство коммутативности $xy = yx$.

(*А. Я. Канель*)