Нам пишут...

О длинах сторон правильного пятиугольника и правильного десятиугольника

Л. М. Коганов нашел в книгах [3, с. 52, формула (1)] и [2, с. 94, с. 201–202]) следующее соотношение между длинами a_5 и a_{10} сторон правильных пятиугольника и десятиугольника, вписанных в единичную окружность:

$$a_5^2 = a_{10}^2 + 1. \qquad (1)$$

Другими словами этот факт можно выразить так: стороны правильных пятиугольника, шестиугольника и десятиугольника, вписанных в единичную окружность, образуют прямоугольный треугольник (рис. 1).

Формулы для a_5 и a_{10}, из которых несложными аналитическими преобразованиями получается (1), содержатся во многих книгах по геометрии (см., например, [1]). Л. М. Коганов пишет, что ему не известно

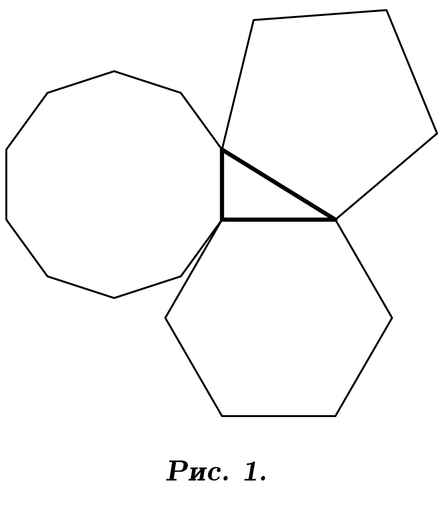

Рис. 1.

геометрическое доказательство этого соотношения. А. А. Заславский предоставил редакции такое доказательство, оно приводится ниже.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ — правильный десятиугольник, вписанный в окружность радиуса r. Проведем диагональ A_1A_4 и отложим на ее продолжении отрезок $A_4B = A_1A_2$ (рис. 2). Прямая BA_3 касается описанной около десятиугольника окружности, а отрезок BA_3 равен диагонали A_4A_2, т. е. стороне вписанного в эту окружность правильного пятиугольника. Следовательно, по теореме о квадрате касательной

$$BA_3^2 = BA_4 \cdot BA_1 = A_1A_2(A_1A_2 + A_1A_4) = A_1A_2^2 + A_1A_2 \cdot A_1A_4,$$

и, значит, соотношение (1) равносильно соотношению $A_1A_2 \cdot A_1A_4 = r^2$.

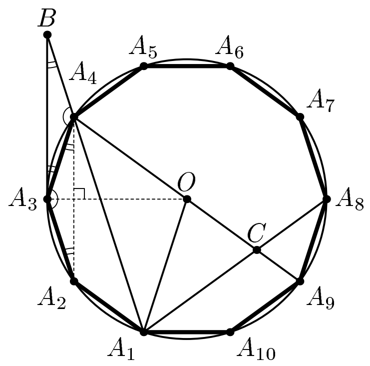

Рис. 2.

Пусть диагонали A_4A_9 и A_1A_8 пересекаются в точке C. Тогда

$$\angle A_4A_1C = \angle A_1CA_4 = 2\pi/5 = \angle A_1OC.$$

Поэтому $A_4C = A_1A_4$, $A_1C = A_1O = r$, и из подобия треугольников A_1A_4C и CA_1O следует требуемое равенство.

Список литературы

[1] Адамар Ж. *Элементарная геометрия.* Часть I. Планиметрия. М.: Учпедгиз, 1948. С. 159–160.

[2] Адлер А. *Теория геометрических построений.* Пер. с нем. под ред. С. О. Шатуновского. Одесса: Mathesis, 1910.

[3] Граве Д. А. *Трактат по алгебраическому анализу.* Том второй. Исторический обзор. Киев: Изд-во АН УССР, 1939. Гл. III. Группа многогранников. С. 52–73.