О попарно смежных многогранниках

А. А. Заславский

Среди задач, предложенных 11-классникам на 64-й Московской математической олимпиаде, была такая:

> *Докажите, что в пространстве существует расположение* 2001 *выпуклого многогранника, такое что никакие три из многогранников не имеют общих точек, а любые два касаются друг друга* (*т. е. имеют хотя бы одну граничную точку, но не имеют общих внутренних точек*).

Вместо слова «касающиеся»[1)] мы будем далее использовать более точное слово «смежные». Понятно, что число 2001 в условии этой задачи несущественно.

Утверждение 1. Для любого n в пространстве существует n попарно смежных выпуклых многогранников.

Насколько нам известно, утверждение 1 было впервые сформулировано и доказано Титце в 1905 г. [2].

Следует сказать, что решение этой задачи, приведенное в посвященной олимпиаде брошюре [1], очень длинное и сложное[2)]. Более изящное решение нашел участник олимпиады Илья Межиров[3)], но и его нельзя считать достаточно простым (см. «Квант» №4, 2001 г.). И вот через некоторое время в Интернете была обнаружена статья [3], содержащая новый и чрезвычайно красивый метод решения. Более того, этот метод дает следующее усиление утверждения 1.

Утверждение 2. Для любого n в пространстве существует n попарно смежных выпуклых *конгруэнтных* многогранников.

[1)] При подготовке вариантов олимпиады в задачной комиссии бытовал еще более вольный термин «целующиеся».

[2)] Зато оно использует только лишь те скудные стереометрические факты, которые могут быть известны более-менее всем школьникам. В частности, используются только призмы.

[3)] За это решение он получил премию Делоне, присуждаемую на Московской математической олимпиаде за самое красивое решение геометрической задачи. Всего эту задачу решило 4 человека из 605 участников.

Мы будем строить искомые многогранники как части *областей Вороного* системы точек, лежащих на *винтовой линии*.

Пусть в пространстве даны точки $M_1, M_2, \ldots$ Для каждой точки пространства найдем ближайшую к ней из точек M_i. В результате все пространство будет разбито на области, которые называются *областями Вороного* точек $M_1, M_2, \ldots$ (Область Вороного точки M_i — это множество таких точек X, что $XM_i \leqslant XM_j$ для всех $j \neq i$). Из определения сразу вытекают следующие свойства областей Вороного.

1. Область Вороного точки M_i является выпуклым множеством, так как она есть пересечение полупространств, ограниченных серединными перпендикулярами к отрезкам M_iM_j.

2. Области Вороного двух точек не могут иметь общих внутренних точек, а общие граничные точки этих областей лежат в плоскости, являющейся серединным перпендикуляром к соединяющему эти точки отрезку.

3. Пересечением областей Вороного трех точек, не лежащих на одной прямой, является часть прямой, перпендикулярной плоскости, содержащей эти точки и проходящей через центр окружности, описанной около образованного ими треугольника.

4. Области Вороного четырех и более точек, не лежащих на одной окружности, имеют не более одной общей точки.

Винтовую линию можно задать уравнениями $x = t$, $y = \cos t$, $z = \sin t$, где $t \in \mathbb{R}$. Точку винтовой линии с координатами $(t, \cos t, \sin t)$ будем обозначать через $H(t)$. Наиболее важным для нас свойством винтовой линии является ее *самоконгруэнтность*: для любых точек A и B винтовой линии существует движение пространства, переводящее винтовую линию в себя, а точку A в B. Отметим, что кроме винтовых линий самоконгруэнтными являются только прямые и окружности.

Ключевую роль в построении играет следующая лемма.

Лемма 1. Если $|t_1 - t_2| < 2\pi$, то существует сфера, касающаяся винтовой линии в точках $H(t_1)$ и $H(t_2)$. Эта сфера не имеет с винтовой линией других общих точек.

Доказательство. В силу самоконгруэнтности винтовой линии достаточно доказать лемму для $t_1 = t$, $t_2 = -t$ при $0 < t < \pi$. Так как точки $H(t)$ и $H(-t)$ симметричны относительно оси y, центр сферы лежит на этой оси, т. е. ее уравнение имеет вид $x^2 + (y - a)^2 + z^2 = r^2$. Так как винтовая линия лежит на цилиндре $y^2 + z^2 = 1$, все точки ее пересечения со сферой принадлежат кривой γ пересечения сферы и цилиндра. Проекцией кривой γ на плоскость Oxy является парабола $y = y_1(x) = -(x^2 - r^2 + a^2 + 1)/2a$, а проекцией винтовой линии — кривая $y = y_2(x) = \cos x$, причем обе кривые касаются в точках $(t, \cos t)$ и $(-t, \cos t)$, т.е. уравнение $y_1 = y_2$ имеет на отрезке $(-\pi, \pi)$ по крайней мере 4 корня. Если бы у этого уравнения были другие корни, то уравнение $y_1''(x) = y_2''(x)$ имело бы на отрезке $(-\pi, \pi)$ более 2 корней, что невозможно, так как $y_1''(x) = 1/a$, $y_2''(x) = -\cos x$. Следовательно, на этом отрезке других корней нет. С другой стороны, при $|x| \geqslant \pi$ $y_1(x) \leqslant y_1(\pi) < \cos\pi = -1$, что и доказывает лемму.

Из леммы 1 следует, что если взять на винтовой линии произвольное множество точек, параметры которых отличаются меньше чем на 2π, то любая пара областей Вороного такой системы точек будет иметь общие граничные точки. Действительно, расстояния от центра сферы, касающейся винтовой линии в паре выбранных точек, равны между собой и меньше расстояния до любой другой точки винтовой линии.

Для решения задачи осталось преодолеть две трудности: во-первых, области Вороного неограничены, а во-вторых, не все тройные пересечения пусты. Первая трудность преодолевается без труда: нужно отсечь бесконечные части выбранных областей Вороного достаточно далекими плоскостями, параллельными оси x. Чтобы преодолеть вторую трудность, заметим, что пары многогранников пересекаются по граням, а тройки — по ребрам. Поэтому, «сточив» все ребра, получим искомую систему многогранников.

Замечание. Если взять точки $H_t = H(2\pi t/n)$, $n \in \mathbb{Z}$, то области Вороного любых n последовательных точек будут попарно касаться. При этом они будут конгруэнтны в силу самоконгруэнтности винтовой линии. Отсюда можно получить доказательство утверждения 2.

Список литературы

[1] *LXIV Московская математическая олимпиада.* М.: МЦНМО, 2001. Эл. версия: `www.mccme.ru/olympiads/mmo/2001/mmo2001.htm`

[2] Titze H. *Über das Problem der Nachbargite im Raum* // Monatshefte für Mathematik und Physik, 1905. Vol. 16. P. 211–216.

[3] Erickson J. *Arbitrary large neighborly families of congruent symmetric convex 3-polytopes.* `http://arxiv.org/abs/math/0106095`. 12.06.2001.